



A **STUK-A198** / TAMMIKUU 2007

GEOFYSIIKAN KENTTÄTEORIA

Esko Eloranta

GEOFYSIIKAN KENTTÄTEORIA

Esko Eloranta

Tässä raporttisarjassa esitetyt johtopäätökset ovat tekijöiden johtopäätöksiä, eivätkä ne välttämättä edusta Säteilyturvakeskuksen virallista kantaa.

Toinen, uudistettu painos
ISBN 978-952-478-194-7 (nid.)
ISBN 978-952-478-195-4 (pdf)
ISSN 0781-1705

Yliopistopaino, Helsinki 2007

Myynti:
STUK – Säteilyturvakeskus
PL14, 00881 Helsinki
Puh. (09) 759881
Faksi (09) 75988500

ELORANTA, Esko. Geofysiikan kenttäteoria. STUK-A198. Helsinki 2007, 423 s.

Avainsanat: geofysiikka, kentät, sähkömagnetismi, sähköstatiikka, sähkövirta, magnetostatiikka, sähködynamiikka, sähkömagneettiset aallot, sähkömagneettinen säteily, potentiaaliteoria, painovoima, kontinuumimekaniikka, kimmoaallot, kalliomekaniikka, geohydrologia, vektorianalyysi, dyadit, tensorit, konstitutiiviset yhtälöt, lämmön- ja aineen siirtyminen, ydinjätteen geologinen loppusijoitus, laskennallinen mallinnus

Tiivistelmä

Geofysiikan kenttäteoria sisältää sähkömagnetismin, kontinuumimekaniikan ja potentiaaliteorian peruseriaatteet, jotka ovat pohjana geofysikaalisten ilmiöiden laskennallisessa mallintamisessa. Vektorianalyysi on keskeinen matemaattinen työkalu kenttäteoreettisissa tarkasteluissa. Sähköstatiikka, sähköinen virtausstatiikka, magnetostatiikka sekä sähködynamiikka muodostavat geofysiikan kenttäteorian sähkömagnetismin osuuden. Potentiaaliteorian piiriin kuuluu eritoten painovoiman teoria, mutta myös sähkö- ja magnetostatiikkaa. Kiinteän aineen mekaniikka ja nesteiden mekaniikka muodostavat puolestaan kontinuumimekaniikan keskeisen sisällön. Kiinteän aineen mekaniikkaan kuuluvat kimmoaaltojen teoria sekä kalliomekaniikan teoria. Nesteiden mekaniikkaan sisältyvät geohydrologian sekä aineiden kulkeutumisen kenttäteoriat. Lämmön-siirtyminen kuuluu myös osana kontinuumimekaniikkaan.

ELORANTA, Esko. Geophysical Field Theory. STUK-A198. Helsinki 2007, 423 pp.

Keywords: geophysics, fields, electromagnetism, electrostatics, electric current, magnetostatics, electrodynamics, electromagnetic waves, electromagnetic radiation, potential theory, gravity, continuum mechanics, elastic waves, rock mechanics, geohydrology, vector analysis, dyadics, tensors, constitutive equations, heat and mass transfer, geological disposal of nuclear waste, computational modelling

Abstract

The geophysical field theory includes the basic principles of electromagnetism, continuum mechanics, and potential theory upon which the computational modelling of geophysical phenomena is based on. Vector analysis is the main mathematical tool in the field analyses. Electrostatics, stationary electric current, magnetostatics, and electrodynamics form a central part of electromagnetism in geophysical field theory. Potential theory concerns especially gravity, but also electrostatics and magnetostatics. Solid mechanics and fluid mechanics are central parts in continuum mechanics. Also the theories of elastic waves and rock mechanics belong to geophysical solid mechanics. The theories of geohydrology and mass transport form one central field theory in geophysical fluid mechanics. Also heat transfer is included in continuum mechanics.

Alkusanat

Geofysiikka on matemaattinen luonnontiede, jonka juuret ovat syvällä perusfysiikan kenttäteorioissa. Perusfysiikka tarkoittaa klassillisen fysiikan keskeisiä periaatteita, jotka ilmenevät voimallisimmin erilaisissa säilymis- eli ta-selaeissa (kuten massan, varauksen, liikemäärän, energian ja liikemäärämo-mentin). Geofysiikan kenttäteorian muodostaa kolme keskeistä aihepiiriä: (i) *sähkömagnetismi*, (ii) *kontinuumimekaniikka* sekä näihin läheisesti liittyvä (iii) *potentiaalteoria*. Nämä aihepiirit kuuluvat myös tämän kirjan sisältöön.

Kirjan alussa pohditaan geofysiikan kenttäteorian luonnetta ja sen suh-detta geofysiikan menetelmiin ja geofysikaalisiin prosesseihin. Varsinaisesti kirjassa ei käsitellä itse geofysikaalisia menetelmiä tai prosesseja, lyhyitä viit-tauksia lukuun ottamatta. Ne ovat kuitenkin koko ajan esityksen taustalla ja sen vahvana motiivina. Kenttäteorian kannalta keskeiset matemaattiset työ-kalut käydään läpi myös merkintätavat selventävässä mielessä. Näistä keskei-sin on vektorianalyysi. Olen liittänyt mukaan myös dyadilaskennan periaat-teiden esittelyn. Monien, varsinkin matemaatikkojen, mielestä dyadilaskenta on vanhanaikaista, mutta kaikesta huolimatta se elää varsin voimakkaasti sähkömagnetismissä ja kontinuumimekaniikassa. Sen avullahan monet kaa-vojen johdot voidaan lyhentää huomattavasti. Matemaattisena taustatietona kirjan aihepiirin ymmärtäminen edellyttää yksi- ja moniulotteisen analyysin eli differentiaali- ja integraalilaskennan hallintaa. Muutoin kirja pyrkii mate-matiikassa itseriittoauteen.

Varsinainen kenttien tarkastelu aloitetaan sähköstatiikasta eli staattisis-ta sähkökentistä, joiden jälkeen tarkastellaan sähköisiä virtausstationaarisia kenttiä eli virtausstatiikkaa. Näiden jälkeen vuorossa ovat staattiset mag-neettikentät. Dynaamisesta sähkömagnetismista esitetään induktiiviset ken-tät sekä sähkömagneettiset aallot. Aaltojen sirontaa tarkastellaan muuta-massa geofysiikan kannalta keskeisessä geometriassa. Sähkömagnetismi muo-dostaa tärkeän 'prototyypin' myös muille kenttäteorioille, joten sen osuus kirjassa on laajin.

Sähkömagneettisen kenttäteorian jälkeen esitetään painovoiman kenttä-teoria, joka on analoginen sähköstatiikan esitykselle.

Muista kenttäteorioista esitetään kontinuumimekaniikan kenttäteoria. Se jakautuu kiinteän aineen mekaniikkaan ja nesteiden mekaniikkaan eli virtausmekaniikkaan. Kiinteän aineen mekaniikasta esitetään jännitys- ja muodonmuutoskenttien teorit. Jännitys- ja muodonmuutoskenttien pohjalta ymmärretään kimmoaaltojen teoria sekä kalliomekaniikan kenttäteoria. Virtausmekaniikan geofysikaalisena aiheena tarkastellaan pohjaveden virtauksen kenttäteoriaa.

Tämä kirja on syntynyt niistä luennoista, joita olen pitänyt Teknillisessä korkeakoulussa vuodesta 1989 alkaen. Varsinaisia laskuharjoituksia ei ole sisällytetty tähän kirjaan. Ne on tarkoitettu julkaista erillisessä harjoituskirjassa. On syytä painottaa laskutehtävien omakohtaista ratkaisemista asioiden syvällisen oppimisen edellytyksenä. Kirjallisuusluettelo kattaa apunani käyttämän keskeisen kirjallisuuden. Jotkut käyttämistäni lähteistä ovat hyvinkin vanhoja, mikä vain osoittaa kenttäteorioiden kestävästä luonnetta. Kirjan eri aihepiireistä on olemassa runsaasti erityyppistä kirjallisuutta. Huomattava osa siitä, varsinkin sähkömagneetiikan osalta, on kirjoitettu tekniikan sovelluksia silmällä pitäen. Sen vuoksi ne ovat siten suurelta osin geofysiikan kannalta epätarkoituksenmukaisia. Tämä epätarkoituksenmukaisuus onkin ollut itse asiassa keskeinen motiivi tämän kirjan kirjoittamiselle. Samassa teoksessa on harvoin käsitelty useita fysikaaliselta luonteeltaan erilaisia, mutta matemaattiselta rakenteeltaan hyvinkin samankaltaisia aihepiirejä. Tämä kirja pyrkii pureutumaan myös tämäntyypiseen esitystapaan.

Kirjan sisällön voi katsoa kuuluvan geofysiikan soveltajan perustietämykseen, jota ilman vähänkään syvällisempi asioiden tarkastelu ei ole mahdollista. Geofysiikan moninaisissa sovelluksissa malminetsinnästä ydinjätteiden loppusijoituspaikkatutkimuksiin on tärkeää ymmärtää ilmiöitten ja menetelmien taustana olevaa teoriaa ainakin kvalitatiivisella tasolla. Kvalitatiivinen taso ei kuitenkaan ole riittävä silloin, kun geofysikaalisia ilmiöitä halutaan laskennallisesti mallintaa. Kvantitatiivisen mallinnuksen lähtökohtana on juuri geofysiikan kenttäteoria. Luonnon rakenteitten, erityisesti kallio- ja maaperän eli maankamaran, epähomogeenisuus asettaa suuria haasteita mallinnukselle. Kenttäteoria ei kuitenkaan menetä arvoansa maankamaran epähomogeenisuuden takia, vaan päinvastoin.

Kirjassa on noudatettu käytäntöä, jonka mukaan kertolasku suoritetaan ennen jakolaskua, ellei suluilla ole toisin määrätty tehtäväksi. Tämä sopimus on tarpeen esimerkiksi yksiköiden esittämisessä. Nykyään näkee usein kertolaskua ja jakolaskua pidettävän samanarvoisina laskutoimituksina. Toinen käytäntö liittyy tavallisen derivaatan, differentiaalın jne. merkintään. Tässä kirjassa kyseinen operaattori merkitään kursivilla, esimerkiksi d/dt . Käytetty merkintä poikkeaa vuonna 1999 vahvistetusta standardista SFS-ISO 31-11 (Suureet ja yksiköt. Osa 11: matemaattiset merkinnät fysikaalisissa tieteissä

ja tekniikassa), jonka mukaan kyseiset merkinnät tulee kirjoittaa antiikvalla.

Erilliset huomautukset alkavat kursiivilla kirjoitetulla sanalla *Huomautus* ja ne päättyvät mustaan neliöön ■.

Kirjan syntymisen on mahdollistanut Jenny ja Antti Wihurin rahaston myöntämä apuraha. Säteilyturvakeskus sekä Teknillinen korkeakoulu ovat suhtautuneet hankkeeseen myötämielisesti ja tukeneet kirjan kirjoittamista monin tavoin antaen käyttöni sen teossa tarvittavia välineitä. Säteilyturvakeskus on lisäksi hyväksynyt käsikirjoitukseni tutkimusraporttisarjaansa. Lausun kaikille tahoille lämpimät kiitokseni työtäni kohtaan osoitetusta tuesta ja kannustuksesta.

Työni on kirjoitettu L^AT_EX-järjestelmällä ja matemaattisissa tarkasteluisa olen hyödyntänyt MATLAB®-ohjelmaa, joiden käyttöön olen saanut merkittäviä neuvoja useilta henkilöiltä Teknillisessä korkeakoulussa. Kirjan eri osia ovat kriittisesti kommentoineet useat henkilöt. Heille kaikille lausun lämpimät kiitokseni. Erityisesti haluan kiittää prof. emer. Eero-Matti Salosta Teknillisestä korkeakoulusta monista hyvistä neuvoista ja huomioista. Tekn. tri Olli Okko, kollegani Säteilyturvakeskuksesta, on kommentoinut seismisten kimmoaaltojen teoriaa. Itse tietenkin vastaan työni lopputuloksesta kaikkine puutteineen ja virheineen.

Kirjassa olevien asioiden saattaminen kirjalliseen muotoon on vaatinut pitkään kypsyttelyä. Monet ajatukset ovatkin peräisin opettajiltani sekä työ- ja opiskelukavereiltani neljännesvuosisadan ajalta. Merkittäviä taustavaikuttajia sähkömagneettisen kenttäteorian asioissa ovat olleet professorit Markku Peltoniemi, Ismo Lindell, Keijo Nikoskinen ja Ari Sihvola Teknillisestä korkeakoulusta, Lauri Eskola Geologian tutkimuskeskuksesta, Sven-Erik Hjelt Oulun yliopistosta sekä tekn. lis. Matti Oksama Geologian tutkimuskeskuksesta.

Kontinuumimekaniikan osalta taustavaikuttajinani ovat olleet useat Teknillisen korkeakoulun mekaniikan opettajat ja tutkijat opiskeluvuosistani lähtien sekä entiset kollegani 1980-luvulta VTT:n palotekniikan laboratoriosta, jossa ensi kerran tutustuin konkreettisesti lämmön- ja aineensiirron sekä virtausmekaniikan problematiikkaan. Sittemmin toimintani Säteilyturvakeskuksen rahoittamissa kansainvälisissä DECOVALEX-projekteissa kahdentoista vuoden aikana (1991-2003) on tarjonnut oivan mahdollisuuden tietämyksen lisäämiseksi kytketyistä lämmön, virtauksen ja kiinteän aineen mekaniikan ongelmista. Tällöin myös useat ulkomaalaiset ystäväni ja kollegani ovat monin tavoin selventäneet kontinuumimekaniikan käsitteitä ja sisältöä.

Kiitokseni ei valitettavasti tavoita enää kaikkia hyviä ystäviäni, joiden ajatuksista ja toimintamalleista olen vuosien varrella paljon oppinut. Haluan mainita tässä yhteydessä edesmenneen opiskelutoverini tekn. tri Heikki Soinisen, jonka kanssa monet kerrat ruudimme geofysiikan syväolemusta. Yhtenä

merkittävänä taustavaikuttajana haluan mainita myös edesmenneen opettajani dosentti Pertti Louneston Teknillisessä korkeakoulussa. Hänen loistavat luentonsa vektorianalyysistä ja sen laajennuksista ovat toimineet innoittajanani vuosien varrella. Minulla oli ilo keskustella hänen kanssaan työstäni hieman ennen hänen poismenoaan kesäkuussa vuonna 2002.

Lopuksi, mutta ei vähiten, kiitän perhepiiriäni tuesta kirjoitusprosessin aikana.

Näillä saatesanoilla jätän vaatimattoman ja useassa kohdissa vajavaisen ”kontribuutioni” geofysiikan kenttäteoriasta opiskelijoiden ja alan harrastajien käyttöön. Toivottavasti se voi virittää mielenkiintoa asioitten syvällisempään tutkimiseen. Kaikki paino- ja etenkin asiavirheet pyydän ystävällisesti saattamaan tietooni.

Esko Eloranta

Helsingin Laajasalossa
marraskuussa 2003

Alkusanojen täydennys kirjan 2. painokseen

Kirjan toiseen painokseen on tehty joitakin kielellisiä täsmennyksiä sekä korjattu havaittuja paino- ja asiavirheitä saadun palautteen perusteella. Yksi muutos koskee tensori-indeksien merkintätapaa, jossa on nyt käytetty kirjallisuudessa tavallisimmin omaksuttua tulkintaa. Kiitos tarkkasilmäisille lukijoilleni ja oppilailleni. Teknillinen korkeakoulu myönsi kirjalle vuoden 2004 oppikirjapalkinnon, mikä kiitollisuudella tulkoon mainituksi.

Esko Eloranta

Kittilässä
syyskuussa 2006

Sisältö

Alkusanat	i
1 Geofysiikan kenttäteoria	1
1.1 Mitä kenttäteoria on?	1
1.2 Mihin kenttäteoriaa tarvitaan?	3
2 Matemaattisia apuvälineitä ja työkaluja	7
2.1 Kenttäteoriassa esiintyviä funktiotyyppejä	7
2.2 Vektorialgebra	8
2.2.1 Skalaarit ja vektorit	8
2.2.2 Vektorien yhteen- ja vähennyslasku	9
2.2.3 Skalaarin ja vektorin tulo	10
2.2.4 Vektorien kertolasku	11
2.3 Koordinaattijärjestelmät ja niiden muunnokset	15
2.3.1 Karteesinen (x, y, z) -koordinaatisto	16
2.3.2 Sylinterikoordinaatisto (ρ, φ, z)	18
2.3.3 Pallokoordinaatisto (r, θ, φ)	22
2.4 Vektorianalyysi	25
2.4.1 Differentiaaligeometriset alkiot	25
2.4.2 Viiva-, pinta- ja tilavuusintegraalit	29
2.4.3 Vektoriarvoisen funktion derivaatta skalaarimuuttujan suhteen	31
2.4.4 Skalaarifunktion gradientti ja gradienttilause	32
2.4.5 Divergenssi ja Gaussin lause	35
2.4.6 Roottori ja Stokesin lause	38
2.4.7 Laplacen operaattori ja nablalla operoimissäännöt	41
2.4.8 Greenin kaavat	43
2.4.9 Vektorikenttien luokittelu ja Helmholtzin lause	44
2.4.10 Paikkavektorin vektorikenttä ja avaruuskulma	47
2.4.11 Diracin δ -funktio	50
2.5 Tensori- ja dyadilaskenta	52

2.5.1	Tensorit	52
2.5.2	Dyadit	57
2.6	Erikoisfunktiot ja sarjaoppi	61
2.6.1	Taylorin sarja	61
2.6.2	Binomiteoreema	62
2.6.3	Legendren polynomit	63
2.6.4	Besselin funktiot	65
3	Sähköstatiikka	71
3.1	Sähköstatiikan kenttäyhtälöt tyhjiössä	72
3.1.1	Coulombin laki	72
3.1.2	Varausjakaumat	74
3.1.3	Sähkökenttä	74
3.1.4	Sähkökentän differentiaaliyhtälöt ja sähköpotentiaali	77
3.1.5	Sähköinen dipoli	81
3.2	Sähköstatiikan kenttäyhtälöt väliaineessa	86
3.2.1	Aineet sähköstatiikassa – johteet ja eristeet	86
3.2.2	Johde sähkökentässä – influenssi	87
3.2.3	Eriste sähkökentässä – dielektrinen polarisaatio	87
3.2.4	Sähkövuon tiheyskenttä	91
3.2.5	Sähköstatiikan konstitutiiviset yhtälöt	92
3.2.6	Kenttävektoreiden rajapintaehdot	95
3.3	Sähköstaattisten probleemien ratkaiseminen	98
3.3.1	Probleemien luokittelu	98
3.3.2	Laplacen yhtälön ratkaisun yleiset ominaisuudet	100
3.3.3	Pallosymmetrisen varausjakauman potentiaali ja sähkökenttä	101
3.3.4	Äärettömän pitkän, homogeenisesti varatun suoran viivalähteen potentiaali ja sähkökenttä	110
3.3.5	Pistevaraus johdetason yläpuolella – kuvalähdeperiaate	111
3.3.6	Äärettömän pitkä, homogeenisesti varattu suora viivalähde johdetason yläpuolella	115
3.3.7	Kaksidimensioinen johdesylinteri äärettömän pitkän viivalähteen kentässä	117
3.3.8	Johdepallo pistevarauksen kentässä – Kelvinin inversioratkaisu	119
3.3.9	Pistevaraus eristetasarajapinnan lähellä	121
3.3.10	Eristepallo homogeenisessa sähkökentässä	123
3.3.11	Eristepallo pistevarauksen kentässä	128
3.3.12	Loppuhuomautus sähköstatiikan potentiaaliprobleemeista	131

4	Sähköinen virtausstatiikka	133
4.1	Sähkövirta ja virrantiheys	133
4.2	Varauksen säilymlaki	135
4.3	Sähkönjohtavuus	136
4.4	Stationaaritilan muodostuminen	139
4.5	Virtausstatiikan kenttäyhtälöt	141
4.5.1	Rajapintaehdot	142
4.5.2	Reunaehdot	144
4.6	Virtausstaattisten probleemien ratkaiseminen	145
4.6.1	Pistemäinen virtalähde ja viivavirtalähde johtavassa kokoavaruudessa	146
4.6.2	Pistemäinen virtalähde johtavassa puoliavaruudessa	147
4.6.3	Pistemäinen virtalähde kerrostuneen puoliavaruuden pinnalla	149
4.6.4	Pistemäinen virtalähde anisotrooppisessa väliaineessa	154
4.6.5	Täydellinen eristepallo ($g = 0$) pistemäisen virtalähteen kentässä	165
4.6.6	Loppuhuomautus virtausstatiikan potentiaaliprobleemeista	167
5	Magnetostatiikka	169
5.1	Magnetostatiikan kenttäyhtälöt tyhjiössä	169
5.1.1	Magneettinen voimavaikutus	169
5.1.2	Umpinaisten virtasilmukoiden välinen magneettinen voima – Ampèren voimalaki	174
5.1.3	Stationaaristen sähkövirtojen aikaansaama magneettikenttä – Biot-Savartin laki	175
5.1.4	Magneettivuon tiheyskentän differentiaaliyhtälöt	176
5.1.5	Magneettinen vektoripotentiaali	179
5.1.6	Mielivaltaisen virtasilmukan kenttä kaukana silmukasta	180
5.1.7	Magneettinen skalaaripotentiaali	183
5.2	Magnetostatiikan kenttäyhtälöt väliaineessa	183
5.2.1	Magnetoituneen aineen aikaansaama magneettikenttä	184
5.2.2	Magnetostatiikan konstitutiiviset yhtälöt	191
5.2.3	Kenttävektoreiden rajapintaehdot	193
5.3	Magnetostaattisten probleemien ratkaiseminen	196
5.3.1	Äärettömän pitkän suoran viivajohtimen kenttä	197
5.3.2	Ympyrävirtasilmukan kenttä	199
5.3.3	Magnetoituva (permeaabeli) pallo homogeenisessä magneettikentässä	201
5.3.4	Homogeenisesti magnetoituneen pallon magneettikenttä	203

5.3.5	Magneettisten anomalioiden laskenta	207
5.3.6	Loppuhuomautus magnetostatiikasta	211
6	Sähködynamiikka	215
6.1	Sähkömagneettinen induktio	216
6.2	Maxwellin yhtälöt	217
6.2.1	Sähkömagneettiset potentiaalit	221
6.2.2	Harmoninen aikariippuvuus	221
6.2.3	Aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt	222
6.2.4	Sähködynamiikan konstitutiiviset yhtälöt	223
6.3	Sähkömagneettiset aalto- ja diffuusioyhtälöt	224
6.3.1	Sähkö- ja magneettikentän differentiaaliyhtälöt	224
6.3.2	Sähkömagneettisten potentiaalien differentiaaliyhtälöt	226
6.3.3	Aikaharmonisten kenttien differentiaaliyhtälöt	228
6.3.4	Hitaasti muuttuvat kentät	230
6.3.5	Kenttävektoreiden rajapintaehdot	231
6.4	Maxwellin yhtälöiden ratkaiseminen	234
6.4.1	Tasoaallot	235
6.4.2	Värähtelevä sähköinen dipoli	246
6.4.3	Värähtelevä magneettinen dipoli	252
6.4.4	Johtava ja permeaabeli pallo homogeenisessä harmonisesti värähtelevässä magneettikentässä	253
6.4.5	Loppuhuomautus sähködynaamisista problemeista	261
7	Painovoima	263
7.1	Painovoimakentän kenttäyhtälöt	263
7.1.1	Newtonin vetovoimalaki	263
7.1.2	Massajakaumat	265
7.1.3	Gravitaatiokenttä	266
7.1.4	Gravitaatiopotentiaali	267
7.1.5	Painovoimakentän differentiaaliyhtälöt	270
7.1.6	Painovoimakenttävektorin rajapintaehdot	272
7.1.7	Geologisten materiaalien tiheyksiä	274
7.1.8	Geoidi ja normaalipainovoima	275
7.2	Painovoiman kenttäprobleemien ratkaiseminen	276
7.2.1	Pallon gravitaatiokenttä	277
7.2.2	Laatan gravitaatiokenttä	278
7.2.3	Loppuhuomautus painovoiman kenttäprobleemeista	279

8	Yleinen kontinuumimekaniikka	283
8.1	Jatkuvan aineen oletus	284
8.2	Kontinuumimekaniikan aksioomat	285
8.3	Kinematiikka	286
8.3.1	Lagrangen esitystapa	287
8.3.2	Eulerin esitystapa	290
8.4	Kontinuumin muodonmuutos	296
8.4.1	Deformaatiogradientit ja siirtymägradientit	296
8.4.2	Deformaatiotensorit ja äärelliset venymätensorit	297
8.5	Kontinuumimekaniikan kenttäyhtälöt	300
8.5.1	Massan säilyminen	300
8.5.2	Liikemäärän tase	301
8.5.3	Liikemäärämomentin tase	308
8.5.4	Energian tase	309
8.6	Loppuhuomautus kontinuumimekaniikasta	312
9	Kiinteän aineen mekaniikka	315
9.1	Pienten muodonmuutosten teoria	315
9.2	Kiinteän aineen konstitutiiviset yhtälöt	321
9.2.1	Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen	321
9.2.2	Jännitys-venymä	323
9.2.3	Lämpökapasiteetti ja sisäenergia	328
9.2.4	Lämmönjohtavuus	329
9.2.5	Yksinkertaisten kiinteiden aineiden ominaisuuksia	329
9.3	Seismisten kimmoaaltojen teoria	330
9.3.1	Seismisen aaltoyhtälön ratkaisu kokoavaruudessa	334
9.3.2	Seismiset aallot rajapintojen tapauksessa	336
9.3.3	Loppuhuomautus seismisestä kenttäteoriasta	345
9.4	Kalliomekaniikan kenttäteoria	346
9.4.1	Kalliomekaniikan tasapainoyhtälöt	346
9.4.2	Primaarijännityskenttä	348
9.4.3	Pääjännitykset ja jännityskentän invariantit	350
9.4.4	Loppuhuomautus kalliomekaniikan kenttäteoriasta	355
10	Nesteiden mekaniikka	357
10.1	Virtausmekaniikan jaottelu	357
10.2	Geohydrologian kenttäteoria	359
10.2.1	Pohjaveden virtauksen jatkuvuusyhtälö	359
10.2.2	Darcyn laki	361
10.2.3	Tiheyden ja huokoisuuden paineriippuvuus	365
10.3	Rakovirtaus ja virtauksen kuutiolaki	370

10.3.1 Navier-Stokesin yhtälö	370
10.3.2 Rakovirtaus	372
10.4 Advektiivinen lämmönsiirtyminen	374
10.5 Diffuusio ja dispersio	376
10.5.1 Diffuusio nesteessä	377
10.5.2 Diffuusio huokoisessa aineessa	378
10.5.3 Matriisidiffuusio	380
10.6 Loppuhuomautus nesteiden mekaniikasta	385
Kirjallisuutta	387
Hakemisto	394

Luku 1

Geofysiikan kenttäteoria

1.1 Mitä kenttäteoria on?

Kentän käsite liittyy olennaisesti geofysiikkaan. Geofysiikka mittaa, havainnoi ja tulkitsee erilaisia kenttiä. Kentällä tarkoitetaan jonkin tietyn fysiikaalisen suureen jakautumista paikan ja ajan funktiona jossakin alueessa. Kentät voivat olla matemaattiselta luonteeltaan *skalaareja*, kuten lämpötila, *vektoreita*, kuten painovoima ja magneettivuon tiheys tai *tensoreita*, kuten jännitys ja muodonmuutos kiinteässä aineessa. Klassillisen fysiikan kenttäteoriat — sähkömagnetismi ja kontinuumimekaniikka sekä näihin molempiin liittyvä potentiaaliteoria — luovat myös geofysiikan ja sen sovellutusten keskeisen perustan. Siksi ne yhdessä muodostavat oppiaineen, jota voidaan kutsua *geofysiikan kenttäteoriaksi*. Sähkömagnetismissä on kysymys sähköisten ja magneettisten vuorovaikutusten tarkastelemisesta. Vastaavasti kontinuumimekaniikassa tarkastellaan mekaanisia ja termisiä vuorovaikutuksia.

Kenttäsuureiden käyttäytyminen on useimmiten kuvattavissa tavallisten differentiaaliyhtälöiden tai osittaisdifferentiaaliyhtälöiden muodossa. Tästä johtuu, että ratkaisujen etsiminen erilaisille kenttäteoreettisille problemeille on viime kädessä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista. Kenttien käyttäytymistä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden muodostaminen perustuu keskeisesti vuorovaikutuslakeihin ja säilymislakeihin, joita voidaan pitää kaikkein fundamentaalisimpana totuutena fysikaalisesta maailmasta. Tärkeimmät säilymislait tai oikeammin taseperiaatteet koskevat massan, energian, varauksen, liikemäärän ja liikemäärämomentin säilymistä fysikaalisissa systeemeissä. Säilymislakien paikkansapitävyyden osoittamiseksi ja varmentamiseksi on tehty valtava määrä kokeita. Koska kokeet ovat tukeneet käsitystä säilymislakien paikkansapitävyydestä, niitä voidaan pitää myös tietyntyyppeinä aksioomina. Säilymislait ovat yleispäteviä, universaaleja lakeja. Siksi lakien sisäistä-

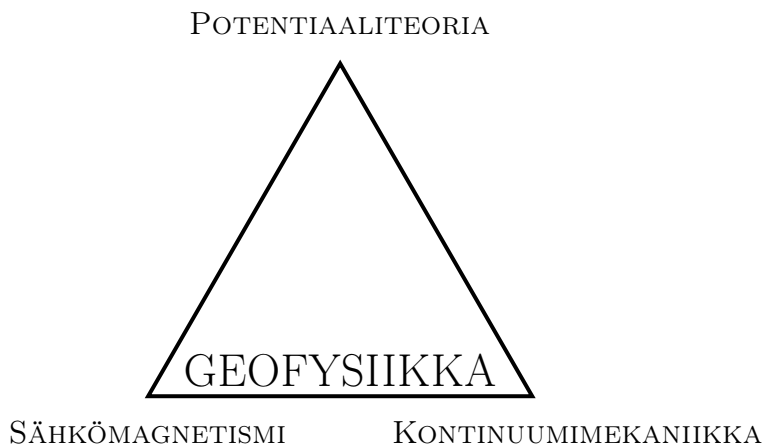
minen ja niiden käytön ja matemaattisen esitystavan oppiminen on tärkeä osa kenttäteorian opiskelua.

Kenttien käyttäytymistä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden lisäksi tarvitaan väliaine yhtälöitä, jotka kuvaavat eri kenttäsuureiden välisiä yhteyksiä väliaineessa. Väliaine yhtälöitä kutsutaan myös konstitutiivisiksi yhtälöiksi. Väliaine yhtälöiden muoto riippuu täysin väliaineesta. Ne eivät ole mitään yleisiä luonnonlakeja, kuten edellä mainitut säilymis lait, vaan niillä on omat rajalliset väliaineen luonteesta ja ominaisuuksista riippuvat pätevyysalueensa.

Klassillisen fysiikan kenttäteoriat kuvaavat makroskooppisia systeemejä. Tämä tarkoittaa sitä, että aineiden atomaarista ja molekulaarista rakennetta ei tarvitse ottaa huomioon. Mikäli aineen atomaarista rakennetta halutaan jotenkin luonnehtia, riittää makroskooppisen kenttäteorian tarpeita varten hyvin ns. Rutherford - Bohrin¹ atomimalli, jonka mukaan atomi muodostuu protonien ja neutronien muodostamasta raskaasta ytimeistä ja tätä kiertävistä keveistä elektroneista. Protoneilla on positiivinen alkeisvaraus ja elektroneilla itseisarvoltaan vastaavan suuruinen, mutta negatiivinen alkeisvaraus. Neutronit ovat varauksettomia hiukkasia. Alkeisvarauksen itseisarvo on $1,6021 \cdot 10^{-19}$ C (coulombia).

Makroskooppisuus tarkoittaa myös sitä, että ainetta voidaan pitää jatkuvana. Sen voidaan ajatella muodostavan jatkumon eli kontinuumin. On syytä huomata, että jatkuvan aineen oletus ei tarkoita sitä, että aine olisi välttämättä tasalaatuista eli *homogeenista*. Väliaine voi muodostua esimerkiksi paloittain jatkuvista, homogeenisista tai epähomogeenisista osista tai se voi muodostua jopa eri fysikaalisissa olomuodoissa (kiinteät aineet, nesteet, kaasut) olevista osista. Väliaineen ominaisuuksiin liittyvät myös käsitteet *isotrooppinen* ja *anisotrooppinen*. Väliaineen sanotaan olevan isotrooppinen jonkin ominaisuuden suhteen, jos mikään suunta väliaineessa ei ole erikoisase-massa jonkin toisen suunnan suhteen eli aineen ominaisuus ei riipu suunnasta. Anisotrooppisessa väliaineessa on puolestaan suuntariippuvuus. Ominaisuus muuttuu riippuen mihin suuntaan tarkastelupisteestä katsotaan. On tärkeää erottaa käsitteet homogeenisuus ja epähomogeenisuus sekä isotrooppisuus ja anisotrooppisuus. Aine voi olla jonkin ominaisuuden suhteen esimerkiksi homogeenista ja samalla jonkin toisen ominaisuuden suhteen epähomogeenista. Sama koskee myös isotrooppisuutta ja anisotrooppisuutta. Yleisimmäl-lään väliaine voi olla jonkin ominaisuuden osalta epähomogeenista ja anisotrooppista. Myöhemmin tarkastellaan myös mitä tarkoitetaan lineaarisella ja epälineaarilla väliaineella, kun olemme tarkemmin perehtyneet itse kent-

¹Ernest Rutherford (1871–1937), britt. ydinfysikko ja Niels Bohr (1885–1962), tansk. fyysikko.



Kuva 1.1: Geofysiikan kenttäteoreettinen sisältö.

täsuureisiin. Geologisten väliaineiden kirjo kattaa kaikkia edellä kuvattuja väliaineen ominaisuustyypppejä.

1.2 Mihin kenttäteoriaa tarvitaan?

Geofysiikan sisältö voidaan siis kenttäteorioiden valossa esittää tiivistetyksi tasasivuisena kolmiona, jonka kärkipisteissä ovat sähkömagnetismi, kontinuumimekaniikka ja potentiaaliteoria (kuva 1.1). On huomattava, että potentiaaliteoria on itse asiassa matematiikan ala, jolla on kuitenkin vahvat fyysikaaliset sovellukset. Geofysiikassa potentiaaliteorialla on keskeinen asema erityisesti painovoiman teoriassa. Tämän kirjan tarkoituksena on valottaa kutakin kolmion kärkipistettä peruseriaatteita korostaen.

Potentiaaliteoriaa tarvitaan painovoiman ja staattisten sähkö- ja magneettikenttien käsittelyssä. Sähkömagnetismia tarvitaan luonnollisesti geofysiikan sähkömagneettisissa menetelmissä. Kontinuumimekaniikan sovellusalue on laaja. Sen avulla voidaan ymmärtää virtausmekaniikan, esimerkiksi pohjaveden virtauksen, lämmönsiirtymisen, aineiden kulkeutumisen sekä jännitys- ja muodonmuutoskenttien teorit. Seismisten menetelmien kannalta keskeinen kimmoaaltojen teoria pohjautuu puolestaan osittain jännitys- ja muodonmuutoskenttien teoriaan. Jännitys- ja muodonmuutoskentillä on tärkeä asema myös kalliomekaniikassa.

Kirjassa korostetaan myös matemaattisia analogioita eli samankaltaisuuk-

sia eri fysikaalisten kenttien välillä. Tästä on suuresti hyötyä itse kenttäteoreettisten probleemien ratkaisemisessa. Jollekin kentälle olemassa olevaa ratkaisua voidaan käyttää lähes sellaisenaan, useimmiten vain symboleja muuttaen, jonkin toisen kentän ratkaisuun.

Varsinaisia geofysikaalisia mittausta- ja tulkintamenetelmiä tai geofysikaalisia ilmiöitä ja prosesseja ei tarkastella tässä kirjassa kuin korkeintaan viittauksenomaisesti. Geofysiikan menetelmistä on olemassa runsaasti ulkomaista kirjallisuutta. Suomenkielisenä teoksena sopii käytettäväksi prof. Markku Peltoniemen² oppikirja [59].

Geofyysikko tarvitsee kenttäteoriaa, kun halutaan ymmärtää fysiikan peruseräilyä lähtien (geo)fysikaalisia ilmiöitä ja dynaamisia prosesseja tai kun halutaan kehittää kenttien mittausta- ja tulkintamenetelmiä. Myös olemassa olevien mittausmenetelmien käyttökelpoisuuden ja soveltuvuuden arviointi eri tilanteisiin vaatii kenttäteoriaan pohjautuvaa analyysiä. Kenttien laskennallinen käsittely ja niiden numeeris-approksimatiivinen määrittäminen kuuluvat geofysikaalisen mallintamisen piiriin. Kenttäteoria luo tähän tarpeellisen teoreettisen viitekehyksen. Ymmärrämme sen avulla, mistä ratkaistavat yhtälöt tulevat, mitä ne tarkoittavat ja mitkä niiden soveltamis- ja pätevyysalueet ovat.

On tärkeää oppia arvioimaan kenttäprobleemien ratkaisujen suuruusluokkia. Tähän tarjoaa oivan tavan erilaiset tässäkin kirjassa esitettävät kenttien analyttiset ratkaisut, jotka ovat myös pedagogisesti opettavaisia. Niiden huolellinen läpikäyminen paljastaa kentistä mielenkiintoisia ominaisuuksia, joita puhtaasti numeeris-approksimatiivisilla menetelmillä ei saataisi selkeästi esille. Analyttiset ratkaisut onnistutaan useimmiten muodostamaan vain yksinkertaisille geometrioille, kuten pallolle ja sylinterille tai kerrostunnelle vaakarakenteelle. Aluksi voi tuntuakin siltä, että esitetyillä ratkaisuilla ei olisi kovin suurta käytännön arvoa todellisten geologis-geofysikaalisten ongelmien tarkasteluissa, koska luonnossa jo geologiset rakenteet ovat hyvin monimuotoisia ja geologinen väliaine miltei poikkeuksetta vahvasti epähomogeenista, mikä johtuu maankamaraan monimutkaisesta ja monivaiheisesta syntyhistoriasta. Kenttäteorian yksi voima on kuitenkin juuri siinä, että ilmiöt ja rakenteet pyritään pelkistämään mahdollisimman pitkälle ja saamaan esiin niiden olennaisin ydin.

Kenttäteorian opiskelu vaatii teoreettista ajattelutapaa sekä vahvaa motivaatiota ja sitkeyttä sekä halua oppia teoreettispainotteisia asioita. Nykyisissä geofysiikan koulutusohjelmissa teoreettisten opintojen määrä on hyvin vähäistä, mikä osaltaan nostaa kynnyksen kenttäteorian opiskelulle. Kenttäteorian opiskelu on tavallisesti jatkuvaa ylämäkeä nousemista, välillä vahvas-

²Markku Peltoniemi, s. 1943, Teknillisen korkeakoulun geofysiikan prof. vuodesta 1983.

ti maitohapoilla polkien, välillä toki hieman kevyemmin rullaten. Ongelmia aiheuttaa monien asioiden konkretisoinnin vaikeus. Myös käytettävä matematiikka vaatii oman sisäistämisensä. Kun aikanaan sitten saavutaan laelle uusia asioita oppineena, voi vakuuttua siitä, että ponnistelut eivät ole olleet turhia. Kenttäteorian opeilla ja tuloksilla on nimittäin pysyvä arvo. Kenttäteorian perustana oleva matematiikka ja fysiikka eivät ole juurikaan muuttuneet vuosikymmenien kuluessa. Teorioiden formalismit voivat kenties kuitenkin muuttua. Kenttäteorian opiskelussa voi parhaimmillaan saavuttaa voimakkaan oppimisen tunteen. Koska matemaattisten asioiden opiskelu ja oppiminen ovat hyvinkin yksilöllisiä, mitään selviä ohjeita siitä, miten kenttäteoriaa tulisi opiskella, ei ole kuitenkaan helppo antaa. Aikaa siihen olisi kuitenkin syytä käyttää. Asiat vaativat usein kypsymistä. Lopuksi muistutettakoon siitä, että moderni tietotekniikka ja internet tarjoavat runsaasti myös kenttäteorian opiskeluun liittyvää hyödyllistä aineistoa. Tietotekniikan käyttö ei kuitenkaan saa hämärtää asioiden sisäistämistä eikä rajoittaa omaehtoista asioiden pohdiskelua.

Seuraavaksi siirrymme tarkastelemaan kenttäteorian matemaattisia apuvälineitä ja sen opiskelussa tarpeellisia työkaluja.

Luku 2

Matemaattisia apuvälineitä ja työkaluja

2.1 Kenttäteoriassa esiintyviä funktiotyyppejä

Kenttäteorian matematiikka on suureksi osaksi yhden ja useamman muuttujan differentiaali- ja integraalilaskentaa eli korkeampaa reaalianalyysyä. Eriytyisen tärkeitä ovat (i) vektori- ja skalaarimuuttujan skalaarifunktiot, kuten $f = f(\mathbf{r}, t)$, (ii) vektori- ja skalaarimuuttujan vektoriarvoiset funktiot, kuten $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ sekä (iii) vektori- ja skalaarimuuttujan tensoriarvoiset funktiot, kuten $T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{r}, t)$. Vektorimuuttujana on tavallisimmin pisteen paikkaa kuvaava paikka- eli radiusvektori \mathbf{r} ja skalaarimuuttujana aika t .

Joissakin yhteyksissä on myös tarpeen ottaa käyttöön (iv) reaali- ja kompleksiarvoisen funktion kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio tai (v) vektori- ja skalaarimuuttujan kompleksivektoriarvoinen funktio, esimerkiksi $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{re}(\mathbf{r}, t) + i\mathbf{E}_{im}(\mathbf{r}, t)$, missä $\mathbf{E}_{re}(\mathbf{r}, t)$ ja $\mathbf{E}_{im}(\mathbf{r}, t)$ ovat kompleksivektorifunktion $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ vektoriarvoinen reaali- ja vastaavasti imaginaariosa sekä i on imaginaariyksikkö, joka toteuttaa yhtälön $i^2 = -1$. Joissakin yhteyksissä imaginaariyksikön symbolina käytetään myös j -kirjainta.

Oletamme ilman erillisiä tarkasteluja, että funktiomme ovat riittävän säännöllisiä, jotta kaikki matemaattiset operaatiot, kuten derivoinnit ja integroinnit, ovat sallittuja ja ylipäättään mielekkäitä. Kentissä olevat mahdolliset epäjatkuvuudet ovat lisäksi hallittuja epäjatkuvuuksia. Useimmissa tapauksissa fysikaaliset kentät ovat onneksi riittävän säännöllisiä, joten asiaa ei tarvitse enempää problematisoida.

2.2 Vektorialgebra

Aloitamme kenttäteorian matemaattisen työkalupakin kokoamisen vektorialgebran periaatteista. Oletamme, että lukijalla on jo käsitys vektoreista, joten seuraava esitys pyrkii vain kertaamaan keskeiset asiat ilman todistuksia sekä selventämään käytettäviä merkintätapoja.

2.2.1 Skalaarit ja vektorit

Olemme jo edellisessä luvussa ja edellä puhuneet ilman tarkempaa määrittelyä skalaareista, vektoreista ja tensoreista. Monissa kohdin riittääkin varsin intuitiivinen käsitys siitä, mitä näillä termeillä tarkoitetaan. Matemaattisesti eksakti määrittely perustuu invarianttisuuteen eli niiden komponenttien muunnos- eli transformaatio-ominaisuuksien tarkasteluun koordinaatistojen kierroissa, joissa komponentit muuttuvat tiettyjen sääntöjen mukaan. Skalaareita ja vektoreita voidaan pitää tensoreiden erikoistapauksina.

Skalaarisuureen, kuten lämpötilan tai massan, luonnehtimiseksi riittää pelkästään reaalityyppinen suuren suuruuden. Joitakin skalaarisuuksia kuvataan myös kompleksiluvuilla. Vektorilla on sen sijaan sekä suuruus (pituus) että suunta. Vektoreita on tapana merkitä, kuten jo edellä teimme, lihavoiduilla (\mathbf{V}) symboleilla tai suureen päälle pantavalla nuolella (\vec{V}) tai viivalla (\bar{V}). Kahta viimeksi mainittua tapaa on välttämätöntä käyttää vektoreita käsin kirjoitettaessa. Graafisesti vektoreita kuvataan janoilla, joiden pituus on vektorisuureen itseisarvo ($|\mathbf{V}|$ eli V) skaalattuna jollakin sopivalla tavalla ja suunta ilmaistaan liittämällä janan päähän vektorin suuntaa osoittava nuoli. Tässä kirjassa käytetään vektoreille pääsääntöisesti lihavoitua merkintätapaa.

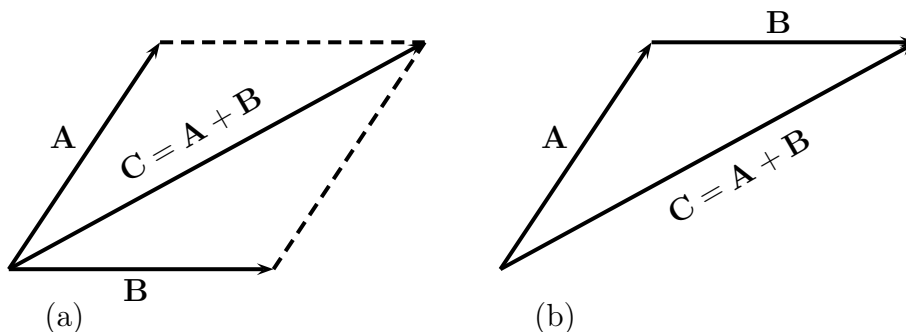
Tensoreista ei ole valitettavasti yhtä helposti muodostettavissa geometrista mielikuvaa. Niiden osalta onkin turvaututtava komponenttien transformaatio-ominaisuuksiin, kuten myöhemmin tulemme menettelemään.

Kaksi vektoria ovat yhtäsuuria, jos niillä on sama suuruus eli itseisarvo ja suunta. On huomattava, että vektoreiden sijainnilla avaruudessa ei ole merkitystä vektorien yhtäsuuruuteen, ainoastaan siis niiden suuruudella ja suunnalla. Vektoreita voidaan siis vapaasti liikuttaa avaruudessa suuruutensa ja suuntansa säilyttäen ilman, että ne muuttuisivat toisiksi vektoreiksi.

Yksikkövektori on vektori, jonka pituus eli itseisarvo on 1. Vektorin suuntainen yksikkövektori saadaan jakamalla vektori pituudellaan:

$$(2.1) \quad \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}}{A}.$$

Huomautus 1. Yksikkövektorin symbolissa käytettyä yläindeksiä 0 ei tule



Kuva 2.1: Vektoriyhteenlaskun (a) suunnikassääntö, (b) kolmiosääntö.

ymmärtää vektorin korottamisena potenssiin 0, vaan kysymyksessä on puhtaasti symbolinen vektorin pituutta 1 korostava merkintä. Useimmiten yläindeksi 0 jätetäänkin pois. ■

Huomautus 2. Kompleksilukuja voidaan käyttää myös samassa tasossa olevien vektoreiden eli vektoreiden, joilla on kaksi komponenttia, käsitteilyssä. Edellä mainittu skalaarisuureen ilmaiseminen kompleksilukuna viittaa sen suuruuteen eli itseisarvoon (magnitudiin) ja vaiheeseen. Siihen ei liitetä tällöin vektorinkaltaista suuntatietoa. ■

2.2.2 Vektorien yhteen- ja vähennyslasku

Kaksi vektoria \mathbf{A} ja \mathbf{B} voidaan laskea yhteen eli muodostaa summavektori \mathbf{C}

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

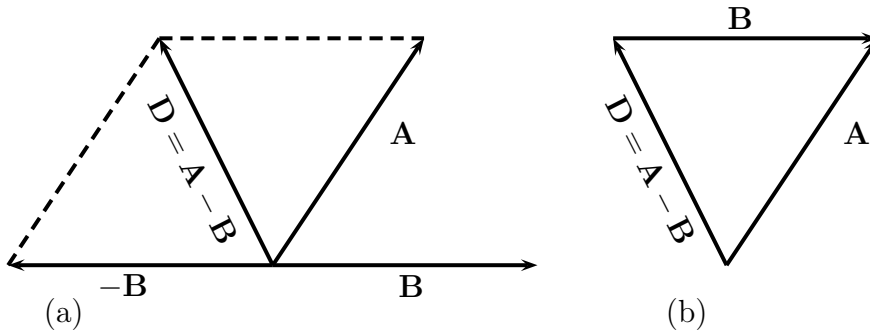
käyttäen joko suunnikassääntöä tai kolmiosääntöä. Suunnikassäännössä summavektori \mathbf{C} muodostaa suunnikkaan lävistäjän (kuva 2.1(a)) ja kolmiosäännössä vektori \mathbf{B} siirretään suuntansa säilyttäen alkamaan vektorin \mathbf{A} kärki eli loppupisteestä. Yhdistämällä vektorin \mathbf{A} alkupiste vektorin \mathbf{B} loppupisteeseen saadaan summavektori \mathbf{C} (kuva 2.1(b)).

Vektorien yhteenlasku noudattaa vaihdantalakia

$$(2.2) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

sekä liitäntälakia

$$(2.3) \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$



Kuva 2.2: Vektorivähennyslaskun (a) suunnikassääntö, (b) kolmiosääntö.

Vaihdanta- ja liitântälakien mukaan vektorit voidaan laskea yhteen mielivaltaisessa järjestyksessä ja ryhmitellä tarvittaessa halutulla tavalla.

Vektorin \mathbf{A} vastavektori $-\mathbf{A}$ tarkoittaa vektorin \mathbf{A} pituista, mutta vastakkaisuuntaista vektoria. Vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} erotus $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ määritellään vektorin \mathbf{A} ja vektorin $-\mathbf{B}$ summana. Vektorivähennyslaskun suunnikas- ja kolmiosäännöt ilmenevät kuvasta 2.2.

Huomautus. Edellä totesimme, että vektori pysyy muuttumattomana, kun sitä siirretään avaruudessa suuruutensa ja suuntansa säilyttäen. Kentäteoriassa tarkastellaan vektorikenttiä ja vektoreita jossakin avaruuden pisteessä. Tällöin esimerkiksi vektorien yhteenlaskussa summavektorin muodostaminen koskee vain tässä pisteessä vaikuttavien, vieläpä vain samansuureisten vektoreiden yhteenlaskua. Kolmiosäännössä tehtävä vektorin yhdensuuntaissiirtäminen on puolestaan laskentatekninen seikka, joka ei liity vektorin sijaintiin avaruudessa. ■

2.2.3 Skalaarin ja vektorin tulo

Vektorin kertominen skalaarilla $p\mathbf{A}$ vaikuttaa vektorin suuruuteen ja suuntaan. Jos $p > 0$, tulovektori on samansuuntainen alkuperäisen kanssa ja jos $p < 0$, tulovektori on vastakkaisuuntainen, mutta kuitenkin edelleen yhdensuuntainen alkuperäisen vektorin kanssa. Tulovektorin itseisarvo on $|p||\mathbf{A}|$.

Skalaarin ja vektorin tulolle ovat voimassa seuraavat säännöt:

$$(2.4) \quad p\mathbf{A} = \mathbf{A}p \quad (\text{vaihdantalaki}),$$

$$(2.5) \quad p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A} \quad (\text{liitäntälaki}),$$

$$(2.6) \quad p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B} \quad (\text{osittelulaki}),$$

$$(2.7) \quad (p + q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A} \quad (\text{osittelulaki}).$$

Nämä lait pätevät myös kompleksisten skalaarien ja vektorien tulolle.

2.2.4 Vektorien kertolasku

Edellä käsitellyn skalaarin ja vektorin tavanomaisen tulon lisäksi on kolme muuta tärkeää kertolaskun muotoa. Nämä ovat kahden vektorin \mathbf{A} ja \mathbf{B} välinen *skalaari- eli pistetulo* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, kahden vektorin välinen *vektori- eli ristitulo* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sekä kahden vektorin välinen *dyaditulo* $\mathbf{A}\mathbf{B}$. Seuraavassa käydään läpi skalaari- ja vektoritulo. Dyadituloa käsitellään tuonnempana siihen läheisesti liittyvien tensoreiden yhteydessä.

Skalaaritulo

Kahden vektorin \mathbf{A} ja \mathbf{B} skalaari- eli pistetulo määritellään yhtälöllä

$$(2.8) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta = AB \cos \theta.$$

Tuloksena on siis positiivinen tai negatiivinen luku riippuen vektorien välisen kulman θ suuruudesta. Terävä kulma antaa positiivisen arvon skalaaritulolle, vastaavasti tylppä negatiivisen arvon. Kulman θ suuruus valitaan väliltä $0 \leq \theta \leq 180^\circ$. Erityisen tärkeä on tapaus, jolloin skalaaritulo saa arvon nolla

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Tämä toteutuu nollostasta eroaville vektoreille, jos ja vain jos $\cos \theta = 0$ eli $\theta = 90^\circ$. Tekijävektorit ovat siis tällöin *kohtisuorassa* toisiaan vastaan.

Skalaaritulolle ovat voimassa seuraavat säännöt:

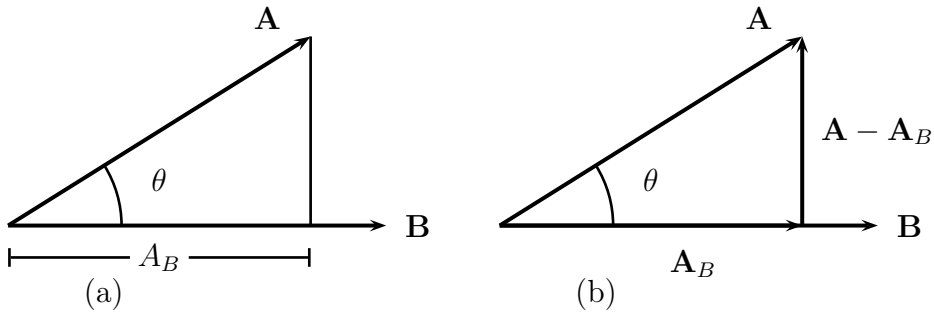
$$(2.9) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{vaihdantalaki}),$$

$$(2.10) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (\text{osittelulaki}),$$

$$(2.11) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{osittelulaki}),$$

$$(2.12) \quad (p\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = p(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (p\mathbf{B}),$$

$$(2.13) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = A^2.$$



Kuva 2.3: Vektorin \mathbf{A} (a) skalaarikomponentti A_B , (b) vektorikomponentti \mathbf{A}_B vektorin \mathbf{B} suunnassa.

Viimeksi mainittua sääntöä on myös tapana merkitä seuraavasti: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = A^2$. Vektorin pituus voidaan siten laskea kaavasta

$$(2.14) \quad A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}.$$

Skalaaritulon avulla voidaan määrittää myös vektorin *skalaari- ja vektorikomponentit* jollakin suunnalla. Kuva 2.3 havainnollistaa komponenttien määrittämistä. Vektorin \mathbf{A} skalaarikomponentti vektorin \mathbf{B} suunnassa on

$$(2.15) \quad A_B = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}^0 = A \cos \theta,$$

missä \mathbf{b}^0 on vektorin \mathbf{B} suuntainen yksikkövektori. Vektorin \mathbf{A} vektorikomponentti vektorin \mathbf{B} suunnassa on yksinkertaisesti skalaarikomponentti (2.15) kerrottuna vektorin \mathbf{B} suuntaisella yksikkövektorilla \mathbf{b}^0 (yksikkövektoria ei ole piirretty kuvaan 2.3)

$$(2.16) \quad \mathbf{A}_B = A_B \mathbf{b}^0 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}^0) \mathbf{b}^0.$$

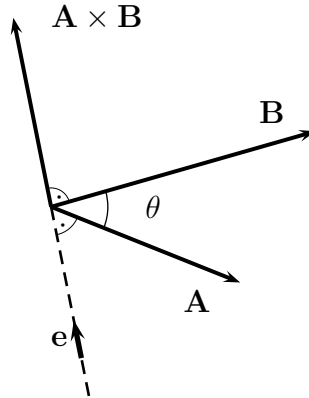
Huomautus. Käytämme tässä esityksessä molempia nimityksiä skalaaritulo ja pistetulo. ■

Vektoritulo

Kahden vektorin \mathbf{A} ja \mathbf{B} välinen vektori- eli ristitulo määritellään yhtälöllä

$$(2.17) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin \theta \mathbf{e},$$

missä θ on, kuten aiemminkin, vektorien välinen kulma, ja \mathbf{e} on yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreita \mathbf{A} ja \mathbf{B} vastaan siten, että \mathbf{A} , \mathbf{B}



Kuva 2.4: Vektoritulo.

ja \mathbf{e} (tässä järjestyksessä) muodostavat oikean käden systeemin. Oikean käden systeemissä peukalo osoittaa ensimmäisen vektorin eli \mathbf{A} :n suuntaan, etusormi toisen vektorin eli \mathbf{B} :n suuntaan, jonka jälkeen keskisormi pannaan osoittamaan näiden määräämän tason normaalin eli vektorin \mathbf{e} suuntaan. On olemassa myös muita sääntöjä vektorin \mathbf{e} suunnan selvittämiseksi. Yksi tällainen tunnetaan nimellä oikeakätinen (korkki)ruuvisääntö, jossa vektoria \mathbf{A} kuvitellaan käännettävän tai kammettavan lyhintä tietä vektoria \mathbf{B} kohden, jolloin oikeakätinen ruuvi lähtee etenemään vektorin \mathbf{e} suuntaan. Toisessa säännössä vektoritulon eli \mathbf{e} :n suunta määräytyy oikean käden peukalon suunnan avulla, kun muut sormet pannaan osoittamaan kiertosuuntaa vektorista \mathbf{A} vektoria \mathbf{B} kohden. Kuva 2.4 havainnollistaa vektorituloa.

Vektoritulo tuottaa siis vektorin, jonka itseisarvo on tekijävektoreiden määrittämän suunnikkaan pinta-ala $AB \sin \theta$.

Vektoritulon määritelmästä seuraa mm., että tekijävektoreiden ollessa nollassa eroavia vektoritulo on nollavektori, jos ja vain jos $\sin \theta = 0$ eli $\theta = 0$ tai $\theta = 180^\circ$. Tämä tarkoittaa siis sitä, että tekijävektorit ovat yhdensuuntaiset; joko samansuuntaiset ($\theta = 0$) tai vastakkaisuuntaiset ($\theta = 180^\circ$).

Vektoritulolle ovat voimassa seuraavat säännöt:

$$(2.18) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A},$$

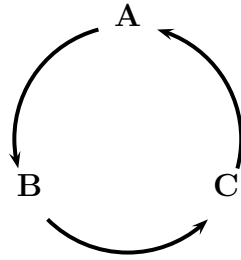
$$(2.19) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (\text{osittelulaki}),$$

$$(2.20) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A} \quad (\text{osittelulaki}),$$

$$(2.21) \quad (p\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = p(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (p\mathbf{B}),$$

$$(2.22) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0,$$

$$(2.23) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} = 0.$$



Kuva 2.5: Skalaarikolmitulon tekijöiden kiertosääntö.

Huomautus. Käytämme tässä esityksessä molempia nimityksiä vektoritulo ja ristitulo. ■

Skalaarikolmitulo

Skalaarikolmitulon nimellä tunnetaan seuraava kolmen vektorin kertolasku

$$(2.24) \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Yhtälöstä (2.24) havaitaan se, että skalaarikolmitulon lopputulos on skalaari (johon skalaarikolmitulon nimikin viittaa). Lisäksi skalaarikolmitulo pysyy samana, kun tekijävektoreiden järjestystä vaihdetaan kuvan 2.5 mukaisesti. Tämä tunnetaan nimellä kiertosääntö, jonka mukaisesti yhtälö (2.24) on esitetty. Skalaarikolmitulo pysyy myös samana, kun vaihdetaan piste ja risti keskenään

$$(2.25) \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad \text{vaihtosääntö.}$$

Huomattakoon, että skalaarikolmitulon kaavoista (2.24) ja (2.25) voitaisiin jättää sulut kokonaan pois, koska laskujärjestys määräytyy yksikäsitteisesti joka tapauksessa tekijöiden vektoriluonteen mukaisesti. Skalaarin ja vektorin vektoritulo ei ole mielekäs eikä sitä niin muodoin ole määritelty.

Vektorikolmitulo

Vektorikolmitulossa on kysymys seuraavasta kolmen vektorin kertolaskusta, jonka kehityskaava on

$$(2.26) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Englanninkielisessä kirjallisuudessa tämä sääntö tunnetaan myös nimellä 'bac-cab'-sääntö, joka voi auttaa kehityskaavan mielinpalauttamisessa kirjainmuodossa. Vektorikolmitulo on vektorisuure, johon sen nimikin viittaa.

Vektorikolmitulon kehityskaavan osalta on huomionarvoista, että

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \neq \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

mutta

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

Jälkimmäisessä yhtälössä on kysymyksessä vektorin \mathbf{C} kertominen skalaarilla $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Huomattakoon, että vektorikolmitulon kehityskaavassa (2.26) sulkujen käyttö on välttämätöntä, sillä

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C},$$

kuten kehityskaavaa (2.26) soveltamalla helposti havaitaan.

Tähän päättyy vektorialgebran eli siis vektorien yhteen- ja vähennyslaskun sekä erityyppisten kertolaskujen esittely. Vektorien jakolasku ei ole yleisessä tapauksessa mielekäs eikä sitä niin muodoin määritellä.

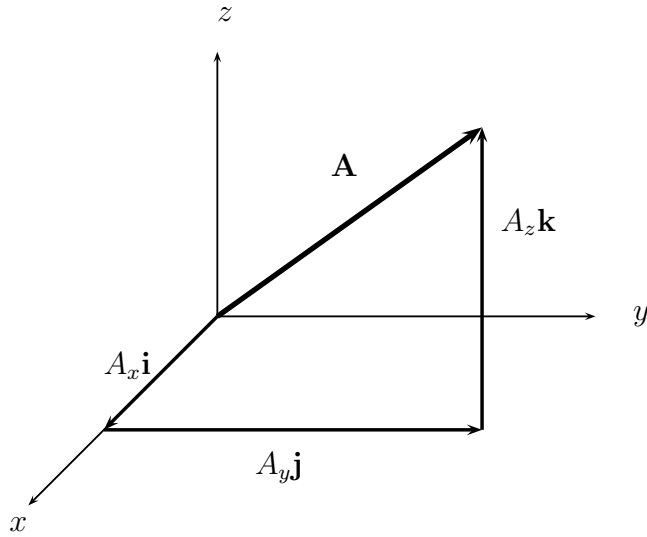
2.3 Koordinaattijärjestelmät ja niiden muunnokset

Edellä tarkastelimme vektoreita sitomatta niitä mihinkään koordinaatistoon. Vektorilaskennan yksi merkittävä piirre onkin siinä, että sen formalismi voidaan kehittää koordinaatistoista riippumatta. Vektorit ovat invariantteja koordinaatistojen muunnoksissa. Tämä on intuitiivisesti selvää, koska vektorin täytyy säilyä samana tarkasteltiinpa sitä minkälaisessa koordinaatistossa hyvänsä. Käytännössä probleemit ratkaistaan kuitenkin useimmiten jossakin koordinaatistossa, joten siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan erilaisia koordinaatistoja, niiden välisiä muunnoksia ja vektoreiden esittämistä niissä.

Tarkastelemme kolmea suorakulmaista ja oikeakätistä koordinaatistoa: karteesisista¹ (x, y, z) -koordinaatistoa, (ympyrä)sylinterikoordinaatistoa ja pallokoordinaatistoa. Suorakulmaisissa eli ortogonaalisissa koordinaatistoissa koordinaattiakselit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Muistutettakoon, että näiden tavallisimpien koordinaatistojen lisäksi on olemassa joukko muitakin, suorakulmaisista ja ei-suorakulmaisista, oikea- ja vasenkätisiä koordinaatistoja, mutta esityksemme tarpeita varten riittävät kol-

¹Nimitys tulee ransk. matemaatikon René Descartesin (1596–1650) mukaan.



Kuva 2.6: Karteesinen koordinaatisto.

me edellä mainittua koordinaatistoa. Koordinaatiston valinta riippuu mm. tehtävän geometriasta.

2.3.1 Karteesinen (x, y, z) -koordinaatisto

Karteesisessa (suoraviivaisessa) ja suorakulmaisessa koordinaatistossa (ks. kuva 2.6) pisteen paikka ilmaistaan lukukolmikolla (x, y, z) .

Koordinaattien arvojen vaihteluvälit ovat

$$(2.27) \quad \begin{aligned} -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \\ -\infty < z < \infty. \end{aligned}$$

Akseleiden positiivisten suuntien yksikkövektoreita merkitään usein kirjallisuudessa tunnuksilla \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} . Karteesisen koordinaatiston yksikkövektorit ovat vakiovektoreita eli niillä aina sama suunta riippumatta pisteen sijainnista koordinaatistossa.

Huomautus. Yksikkövektoreille käytetään tässä kirjassa myös symboleja \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y ja \mathbf{e}_z tai, kuten menettelemme tuonnempana dyadeja käsitellessämme, \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 ja \mathbf{e}_3 . ■

Vektorin \mathbf{A} esitys kolmiulotteisessa karteesisessä koordinaatistossa on

$$(2.28) \quad \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

missä A_x , A_y ja A_z ovat vektorin \mathbf{A} skalaarikomponentit x , y ja z -akselien suunnilla.

Huomautus. Kuvassa 2.6 on selvyuden vuoksi piirretty esimerkkivektori \mathbf{A} alkamaan origosta, mutta tietenkin vektori voi alkaa mistä muustakin koordinaatiston pisteestä tahansa. Sen komponentit ovat kuitenkin aina yhtälön (2.28) esittämää muotoa. ■

Vektorin pituus saadaan Pythagoraan² teoreeman mukaisesta yhtälöstä

$$(2.29) \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Pisteen sijainnin määräävä lukukolmikko (x, y, z) vastaa origosta lähtevää paikka- eli radiusvektoria

$$(2.30) \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Paikkavektorin itseisarvo eli pisteen (x, y, z) etäisyys origosta on

$$(2.31) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Vektori \mathbf{A} muodostaa kulmat θ_1 , θ_2 ja θ_3 koordinaattiakselien positiivisten suuntien eli yksikkövektoreiden \mathbf{i} , \mathbf{j} ja \mathbf{k} kanssa. Vektorin pituuden laskentakaavasta (2.29) sekä pistetulon kaavasta (2.8) seuraa tällöin kulmien välillä vallitseva yhteys

$$(2.32) \quad \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1.$$

Luvut $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$ ja $\cos \theta_3$ ovat vektorin ns. *suuntakosinit*.

Vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} ($= B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$) summavektori \mathbf{C} saadaan vastaavien vektorikomponenttien summana

$$(2.33) \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}.$$

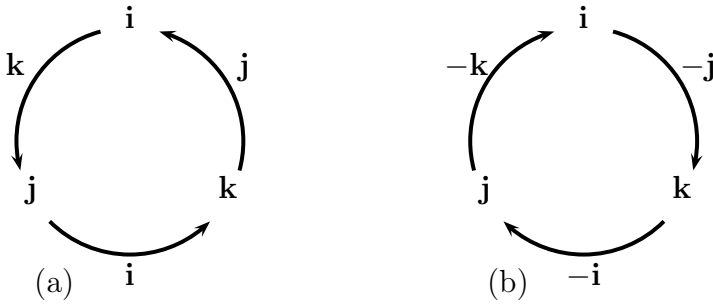
Yksikkövektoreiden pistetuloille saadaan pistetulon määritelmää (2.8) soveltamalla seuraavat kaavat:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= 0, \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0, & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0. \end{aligned}$$

Vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} pistetulo saadaan kertomalla jäsenittäin komponentti-muodossa (2.28) olevat vektorit sekä ottamalla huomioon yksikkövektoreiden keskinäiset pistetulot yhtälöiden (2.34) mukaisesti:

$$(2.35) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

²Pythagoras (n. 580–500 eKr.), kreikk. filosofi ja koulukunnan luoja.



Kuva 2.7: Yksikkövektoreiden ristitulot.

Yksikkövektoreiden ristitulojen osalta muistisääntönä voi pitää mielessä kuvan 2.7 kiertoympyrät, joista nähdään yksikkövektoreiden ristitulot ja niiden algebralliset etumerkit. Kun kaksi tulotekijää seuraavat toisiaan kuten $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, tulo on positiivinen. Päinvastaisessa kiertojärjestyksessä tulo on negatiivinen.

Kirjoitettakoon ristitulot vielä eksplisiittisesti näkyviin

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, & \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, & \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, & \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, & \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} ristitulolle on voimassa helposti muistettava determinanttityyppinen kaava

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

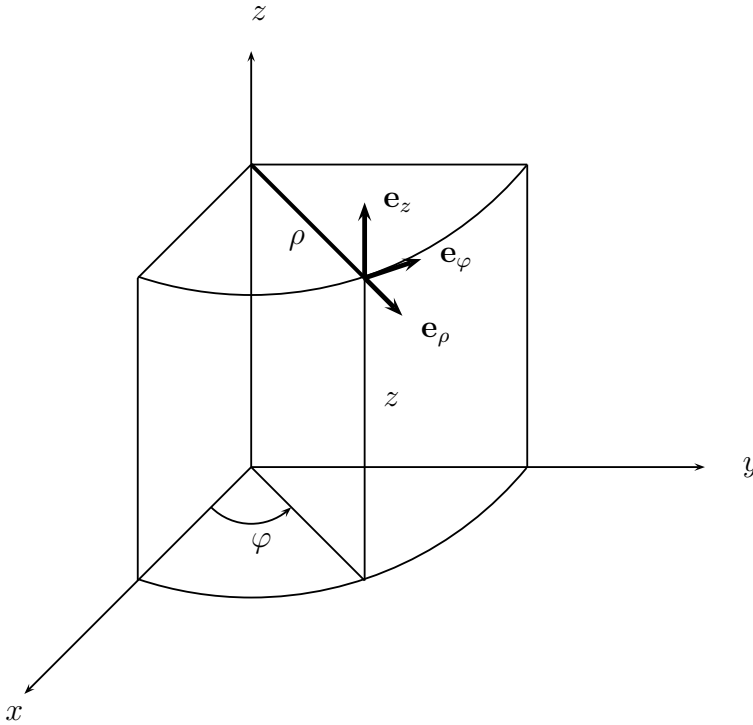
jossa jälkimmäinen muoto on determinantti kehitettynä ensimmäisen vaakarivin suhteen.

Lopuksi todettakoon, että skalaarikolmitulo voidaan esittää determinantin avulla:

$$(2.38) \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

2.3.2 Sylinterikoordinaatisto (ρ, φ, z)

Sylinterikoordinaatisto on käyräviivainen suorakulmainen koordinaatisto. Tarkastelemme ainoastaan ympyräsylinterikoordinaatistoa, jolle käytämme seu-



Kuva 2.8: Sylinterikoordinaatisto.

raavassa lyhyiden vuoksi sylinterikoordinaatisto-nimitystä. Sylinterikoordinaatistossa pisteen paikka ilmaistaan lukukolmikun (ρ, φ, z) avulla kuvan 2.8 mukaisesti. Kulmaa φ kutsutaan atsimuuttikulmaksi. Sylinterikoordinaatiston koordinaattien vaihteluvälit ovat

$$(2.39) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \rho < \infty, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi, \\ -\infty &< z < \infty. \end{aligned}$$

Vektorin \mathbf{A} esitys sylinterikoordinaatistossa on

$$(2.40) \quad \mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z,$$

missä A_ρ , A_φ ja A_z ovat vektorin vastaavat skalaarikomponentit.

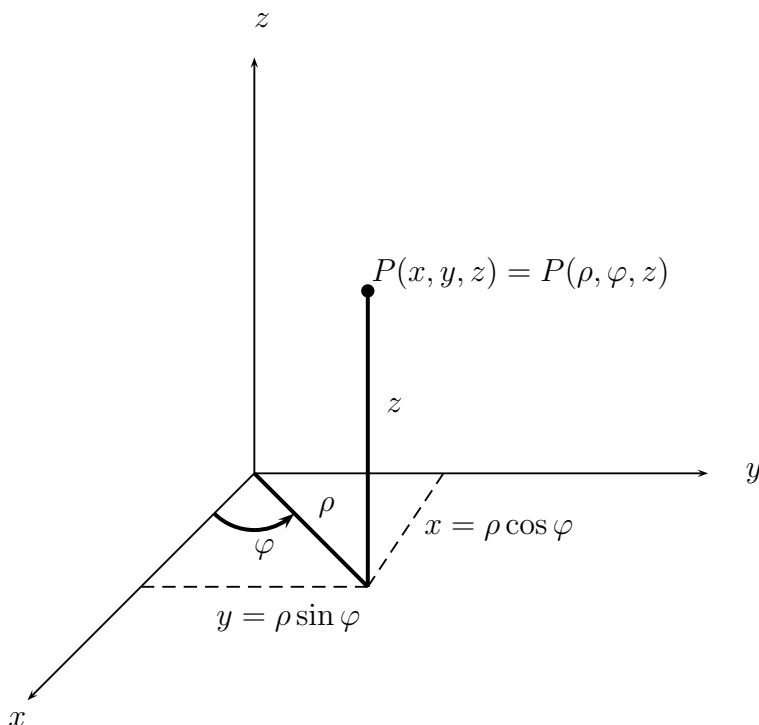
Paikkavektori

$$(2.41) \quad \mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z.$$

Sylinterikoordinaatiston yksikkövektoreista vain \mathbf{e}_z on vakiovektori. Sen sijaan kahden muun yksikkövektorin \mathbf{e}_ρ ja \mathbf{e}_φ suunta riippuu pisteen sijainnista. Yksikkövektori \mathbf{e}_z on sama kuin karteesisen koordinaatiston \mathbf{k} . Yksikkövektorien piste- ja ristituloille ovat voimassa yhtälöt (2.34) sekä (2.36), kun yhtälöihin tehdään vain vaihdos

$$(2.42) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &\rightarrow \mathbf{e}_\rho, \\ \mathbf{j} &\rightarrow \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{k} &\rightarrow \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Sylinterikoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston välillä ovat voimassa seuraavat yhtälöt (kuva 2.9):



Kuva 2.9: Karteesisen koordinaatiston ja sylinterikoordinaatiston välinen yhteys.

$$(2.43) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z$$

tai

$$(2.44) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Yhtälö (2.43) kuvaa muunnoksen karteesisesta koordinaatistosta sylinterikoordinaatistoon ja vastaavasti yhtälö (2.44) sylinterikoordinaatistosta karteeseeseen koordinaatistoon.

Vektorin \mathbf{A} komponenttien muunnokselle karteesisesta koordinaatistosta (A_x, A_y, A_z) sylinterikoordinaatistoon (A_ρ, A_φ, A_z) siirryttäessä on voimassa (kuten vaikkapa geometrisen tarkastelun pohjalta on melko helposti todettavissa) matriisiyhtälö

$$(2.45) \quad \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}.$$

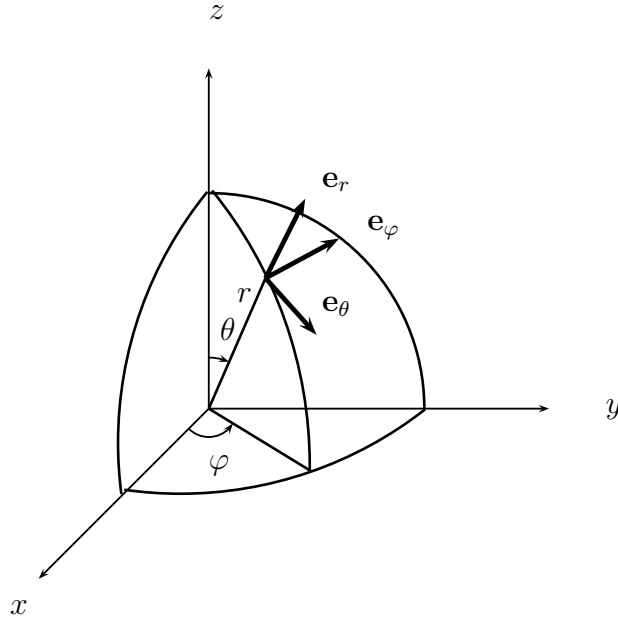
Vastaavasti siirryttäessä sylinterikoordinaatistosta karteeseeseen koordinaatistoon vektorin komponentit muuntuvat seuraavasti:

$$(2.46) \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}.$$

On huomattava, että, jos samastamme edellä vektorin \mathbf{A} komponentit karteesisen koordinaatiston ja sylinterikoordinaatiston yksikkövektoreihin $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ja vastaavasti $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$, niin tässä on voimassa ortogonaalisten koordinaatistojen kannanvaihtomatriiseille yleinen ominaisuus: kannanvaihtomatriisiin käänteismatriisi on sama kuin kannanvaihtomatriisin transpoosi eli pysty- ja vaakarivit vain vaihdetaan keskenään matriisiyhtälössä (2.45), jolloin saadaan matriisiyhtälön (2.46) kerroinmatriisi.

Huomautus. Kannanvaihtomatriisit voidaan muodostaa formaalisti yksikkövektoreiden suuntakosinien avulla. Esimerkiksi sylinterikoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston välillä on voimassa seuraava matriisiesitys:

$$(2.47) \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}. \blacksquare$$



Kuva 2.10: Pallokoordinaatisto.

2.3.3 Pallokoordinaatisto (r, θ, φ)

Pallokoordinaatisto on käyräviivainen suorakulmainen koordinaatisto. Pallokoordinaatistossa pisteen paikka ilmaistaan lukukolmikon (r, θ, φ) avulla kuvan 2.10 mukaisesti. r on pisteen etäisyys origosta eli sama kuin jo aiemmin esillä ollut radiusvektorin pituus (2.31). Kulma θ on *kolatitudi*. Kulma φ on *atsimuuttikulma*. Näiden koordinaattien vaihteluvälit ovat

$$(2.48) \quad \begin{aligned} 0 &\leq r < \infty, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Huomautus. Pallokoordinaatisto on erittäin käyttökelpoinen globaaligeofysikaalisten kenttien, kuten maan painovoima- ja magneettikentän, tarkasteluissa. Tällöin kuitenkin usein käytetään kolatitudin sijasta geosentristä tai maantieteellistä *latitudia*. Kolatitudin (θ) ja latitudin (ϑ) välinen yhteys on $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \theta$. Latitudin nollakohtana on ekvaattori, josta se joko kasvaa pohjoisnapaa eli positiivista suuntaa ('pohjoiset leveysasteet') kohden tai pienenee etelänapaa eli negatiivista suuntaa ('eteläiset leveysasteet') kohden. Navoilta latitudin itseisarvo on $\frac{\pi}{2}$ eli 90° . Latitudin laskennallinen vaihtelualaue on

siis $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$. Atsimuuttikulma, joka vastaa longitudua, voidaan laittaa alkamaan Greenwichin nollameridiaanin kohdalta. Tällöin vastapäivään eli itään eteneminen vastaa positiivista suuntaa eli 'itäistä pituutta' ja myötäpäivään eli länteen eteneminen negatiivista suuntaa eli 'läntistä pituutta'. Atsimuuttikulman laskennallinen vaihtelualue on siis tällöin $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. ■

Vektorin \mathbf{A} esitys pallokoordinaatistossa on

$$(2.49) \quad \mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

missä A_r , A_θ ja A_φ ovat vastaavat skalaarikomponentit ao. suunnissa.

Paikkavektori

$$(2.50) \quad \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r.$$

Pallokoordinaatiston yksikkövektorit, \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ ja \mathbf{e}_φ eivät ole vakiovektoreita, vaan niiden suunta riippuu aina pisteen sijainnista koordinaatistossa. Yksikkövektoreiden piste- ja ristituloille ovat voimassa yhtälöt (2.34) sekä (2.36), kun yhtälöihin tehdään vain vaihdos

$$(2.51) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} &\rightarrow \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{j} &\rightarrow \mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{k} &\rightarrow \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Pallokoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston välillä ovat voimassa yhtälöt (kuva 2.11),

$$(2.52) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

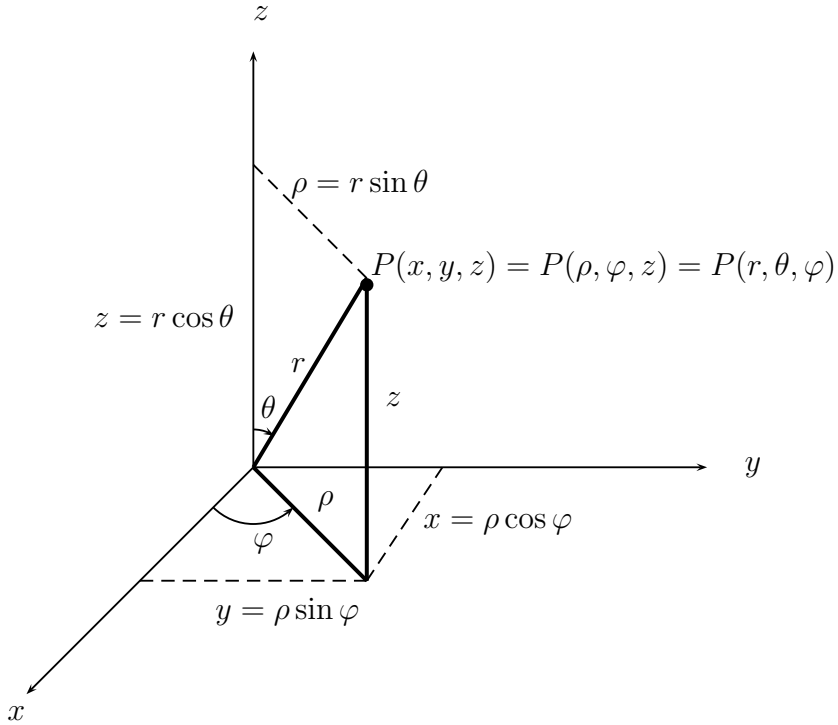
kun siirrytään karteesisestä koordinaatistosta pallokoordinaatistoon.

Siirryttäessä pallokoordinaatistosta karteesiseen koordinaatistoon ovat voimassa seuraavat yhtälöt:

$$(2.53) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Vektorin \mathbf{A} komponenttien muunnokselle karteesisestä koordinaatistosta pallokoordinaatistoon on voimassa seuraava muunnosyhtälö:

$$(2.54) \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}.$$



Kuva 2.11: Karteesisen koordinaatiston, sylinterikoordinaatiston ja pallokoordinaatiston välinen yhteys.

Vastaavasti muunnokselle pallokoordinaatistosta karteesiseen koordinaatistoon pätee

$$(2.55) \quad \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}.$$

Kuvasta 2.11 nähdään myös muunnos sylinteri- ja pallokoordinaatistojen välillä

$$(2.56) \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{\rho}{z}, \quad \varphi = \varphi,$$

joka on voimassa sylinterikoordinaatistosta pallokoordinaatistoon siirryttäessä. Pallokoordinaatistosta sylinterikoordinaatistoon siirtyminen tapahtuu yhtälöitä

$$(2.57) \quad \rho = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

soveltamalla.

Vektorin \mathbf{A} komponenttien muunnokselle sylinterikoordinaatistosta pallokoordinaatistoon pätee seuraava muunnoskaava:

$$(2.58) \quad \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix}.$$

Vastaavasti pallokoordinaatistosta sylinterikoordinaatistoon siirryttäessä vektorin komponentit muuntuvat yhtälön

$$(2.59) \quad \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{bmatrix}$$

mukaisesti.

2.4 Vektorianalyysi

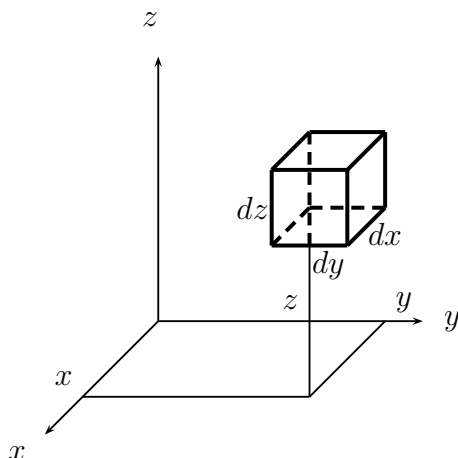
Seuraavaksi siirrymme tarkastelemaan vektoriarvoisten funktioiden differentiaali- ja integraalilaskentaa eli varsinaista vektorianalyysiä. Vektorianalyysin tuloksilla on suorat sovellukset geofysiikan kenttäteoriassa. Siksi hyvä vektorianalyysin ja sen tulosten ymmärtäminen ja hallinta helpottavat suuresti itse kenttäteorian omaksumista.

2.4.1 Differentiaaligeometriset alkiot

Käytännön laskujen kannalta osoittautuvat erittäin hyödyllisiksi viiva-, pinta- ja tilavuusalkioiden differentiaaligeometriset vastineet. Näiden alkioden muoto riippuu valitusta koordinaatistosta. Ne muodostetaan antamalla kullekin koordinaatille differentiaalinen lisäys. Karteesisessa koordinaatistossa näin saatava muoto on ilmeinen, kuten kuva 2.12 osoittaa. Akselien suuntaiset differentiaaliset lisäykset ovat suoraviivaisia, pinta-alkioista tulee suorakaiteita ja tilavuusalkioista suorakulmaisista suuntaissärmiöitä. Sen sijaan sylinteri- ja pallokoordinaatistossa (kuvat 2.13 ja 2.14) differentiaalisten lisäysten synnyttämien alkioden käyräviivaisuus unohdetaan, koska tarkastelemme asioita differentiaalimaailmassa. Pinta- ja tilavuusalkiot saadaan käsittelemällä käyräviivaisia kuvioita suoraviivaisina suorakaiteina tai suorakulmaisina suuntaissärmiöinä ja laskemalla niiden tahkojen pinta-aloja ja tilavuuksia yksinkertaisesti kertomalla särmien pituuksia keskenään. Tämä menettely johtaa oikeisiin tuloksiin, vaikkakaan matemaattisesti edellä kuvattua differentiaaligeometristen alkioden muodostamistapaa ei voikaan pitää aukottomana.

Soveltamalla edellä kuvattua menettelyä saamme seuraavat differentiaaligeometriset alkiot.

Kartesisen koordinaatiston differentiaaligeometriset alkiot



Kuva 2.12: Differentiaaligeometrisen tilavuusalkio karteesisessa koordinaatistossa.

1. Differentiaalinen jana

$$(2.60) \quad d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}.$$

2. Differentiaalinen pinta-alkio

$$(2.61) \quad \begin{aligned} d\mathbf{S} &= dy \, dz \mathbf{i} && \text{tai} \\ &dz \, dx \mathbf{j} && \text{tai} \\ &dx \, dy \mathbf{k}. \end{aligned}$$

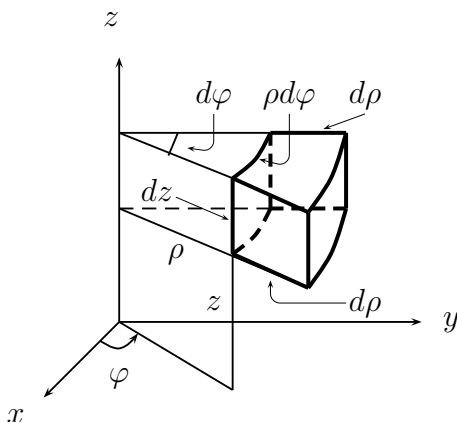
3. Differentiaalinen tilavuusalkio

$$(2.62) \quad dV = dx \, dy \, dz.$$

Huomautus. Pinta-alaa käsitellään yleisesti vektorisuureena, jonka suunnaksi määritellään pinnan ulkonormaalien suunta, toisin sanoen $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$,

missä \mathbf{n} on ulkonormaanin suuntainen yksikkövektori. Jos pinta on umpinainen, sen ulkopuolta pidetään positiivisena pintana, jonka ulkonormaali osoittaa pinnasta poispäin. Jos pinta ei ole umpinainen, voidaan toinen pinnan puolista valita positiiviseksi eli ulkonormaanin suunta voidaan silloin valita kahdesta mahdollisesta suunnasta. ■

Sylinterikoordinaatiston differentiaaligeometriset alkiot



Kuva 2.13: Differentiaaligeometrisen tilavuusalkio sylinterikoordinaatistossa.

1. Differentiaalinen jana

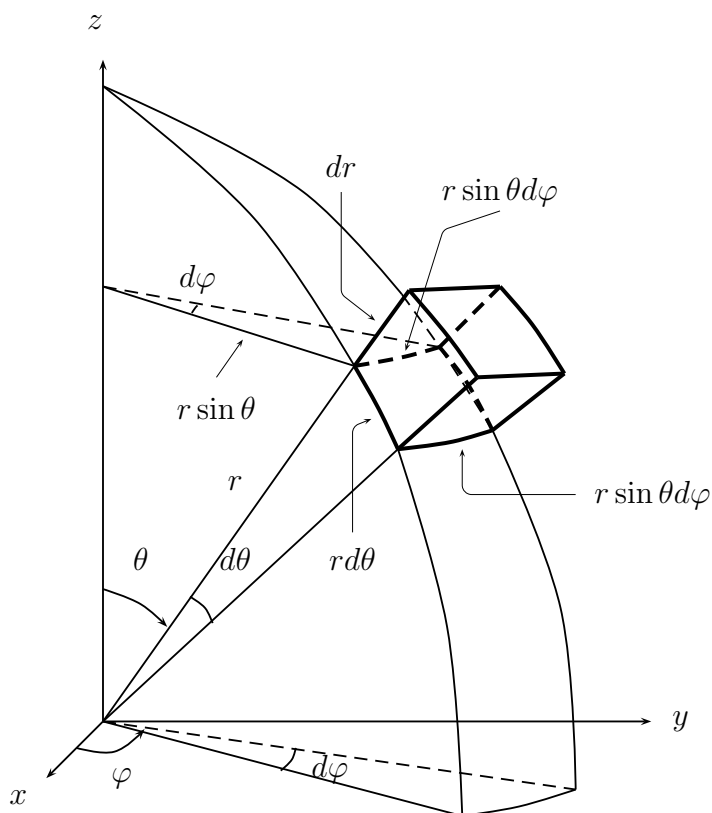
$$(2.63) \quad d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi \mathbf{e}_\varphi + dz \mathbf{e}_z.$$

2. Differentiaalinen pinta-alkio

$$(2.64) \quad \begin{aligned} d\mathbf{S} &= \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho && \text{tai} \\ &= d\rho dz \mathbf{e}_\varphi && \text{tai} \\ &= \rho d\varphi d\rho \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

3. Differentiaalinen tilavuusalkio

$$(2.65) \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$



Kuva 2.14: Differentiaaligeometrinen tilavuusalkio pallokoordinaatistossa.

Pallokoordinaatiston differentiaaligeometriset alkiot

1. Differentiaalinen jana

$$(2.66) \quad d\mathbf{l} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi.$$

2. Differentiaalinen pinta-alkio

$$(2.67) \quad \begin{aligned} d\mathbf{S} &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \mathbf{e}_r && \text{tai} \\ &= r \sin \theta dr d\varphi \mathbf{e}_\theta && \text{tai} \\ &= r dr d\theta \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

3. Differentiaalinen tilavuusalkio

$$(2.68) \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Huomautus. Koordinaatistoista toiseen siirryttäessä eli tehtäessä muuttujan vaihdos differentiaaaligeometristen alkioiden muuntuminen voidaan määrittää myös ns. Jacobin³ funktionaalideterminantin J avulla. Esimerkiksi siirryttäessä karteesisesta koordinaatistosta pallokoordinaatistoon differentiaalinen tilavuusalkio dV tulee korvata alkiolla JdV' , toisin sanoen

$$(2.69) \quad dx dy dz = J dr d\theta d\varphi,$$

missä Jacobin funktionaalideterminantti on

$$(2.70) \quad J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Kuten havaitsemme, päädyimme näin differentiaaaligeometriseen yhtälöön (2.68).

■

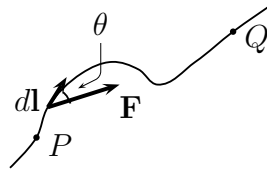
2.4.2 Viiva-, pinta- ja tilavuusintegraalit

Vektorikenttien yhteydessä joudutaan hyvin usein laskemaan viiva-, pinta- ja tilavuusintegraaleja. Merkitään seuraavassa vektorikenttää \mathbf{F} :lla, joka on yleisesti paikan \mathbf{r} ja ajan t funktio eli $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.

Viivaintegraali

Määrittelemme vektorin \mathbf{F} viivaintegraalin käyrää L pitkin pisteestä P pisteeseen Q (kuva 2.15) lausekkeella

$$(2.71) \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q |\mathbf{F}| \cos \theta dl.$$



Kuva 2.15: Vektorifunktion viivaintegraalin polku pisteestä P pisteeseen Q .

³Carl Gustav Jacobi (1804–1851), saks. matemaatikko.

Jos integroimistie muodostaa umpinaisen käyrän, on tapana korostaa tätä panemalla integraalimerkkiin ympyrä

$$(2.72) \quad \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Integraalia (2.72) kutsutaan vektorin \mathbf{F} *sirkulaatioksi* käyrän L ympäri.

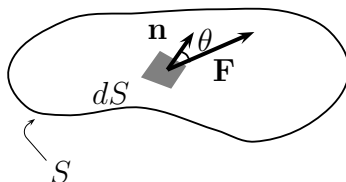
Huomautus. Terminologisena seikkana tulkoon korostetuksi, että käyttäme mieluummin termiä *umpinainen* kuin *suljettu*, koska jälkimmäisellä termillä on tarkkaan määrätty topologinen merkityksensä. Usein näitä termejä käytetään kuitenkin fyysisessä kirjallisuudessa synonyymeinä. ■

Pintaintegraali

Vektorin \mathbf{F} pintaintegraali eli vektorin *vuon* pinnan S läpi (kuva 2.16) on

$$(2.73) \quad \Psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

missä \mathbf{n} on pinnan S ulkonormaanin suuntainen yksikkövektori. Usein merkitään lyhyesti myös $\mathbf{n}dS = d\mathbf{S}$.



Kuva 2.16: Vektorifunktion vuon määrittäminen pinnan S läpi.

Jos kysymyksessä on umpinainen pinta S , käytetään merkintää

$$(2.74) \quad \Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Tätä kutsutaan vektorin \mathbf{F} *nettovuoksi* pinnan S läpi.

Tilavuus- eli avaruusintegraali

Integraali

$$(2.75) \quad \int_V \mathbf{F} \, dV$$

on vektorin \mathbf{F} tilavuus- eli avaruusintegraali tilavuuden V yli. Usein tilavuusintegraalissa integrandina on skalaarifunktio, kuten edellä viiva- ja pintaintegraaleissa. Viiva- ja pintaintegraaleissa integrandina voi puolestaan olla myös vektorifunktio.

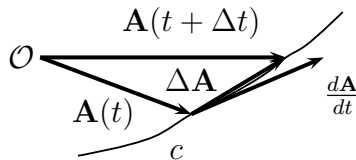
Huomautus. Esityksemme tarpeita varten riittää, että tarkastelemme viivoja, pintoja ja tilavuuksia ajan suhteen muuttumattomina integrointialueina. Jos näiden aikariippuvuus halutaan ottaa huomioon, tulee tästä lisätermiä edellä mainittuihin viiva-, pinta- ja tilavuusintegraalien kaavoihin. ■

2.4.3 Vektoriarvoisen funktion derivaatta skalaarimuuttujan suhteen

Vektoriarvoisen skalaarimuuttujan funktion $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ derivaatta skalaarin t suhteen määritellään kaavalla

$$(2.76) \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}.$$

Kenttäteoriassa muuttuja t tarkoittaa useimmiten aikaa. Jos \mathbf{A} tulkitaan kiinteästä origosta \mathcal{O} alkavaksi paikkavektoriksi, ts. $\mathbf{A} = \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, piirtää paikkavektorin kärki ajan funktiona tietyn käyrän c (kuva 2.17). Derivaatta $d\mathbf{r}/dt$ on käyrän c tangentin suuntainen vektori. Jos erityisesti vektorin \mathbf{r} itseisarvo $|\mathbf{r}|$ on vakio, seuraa tästä, että derivaatta $d\mathbf{r}/dt$ on kohtisuorassa vektoria \mathbf{r} vastaan. Jos vektorin \mathbf{r} itseisarvo on 1 eli kysymys on yksikkövektorista, saamme tärkeän tuloksen, jonka mukaan *yksikkövektorin derivaatta on kohtisuorassa itse yksikkövektoria vastaan*. Jos yksikkövektori on vakiovektori (kuten karteesisen koordinaatiston akselien suuntaiset yksikkövektorit), tällöin yksikkövektorin derivaatta on nolla. Muutoin on varmistuttava siitä, että derivointi kohdistuu myös t :stä riippuviin yksikkövektoreihin.



Kuva 2.17: Vektorifunktion derivaatta.

Vektorifunktioiden \mathbf{A} ja \mathbf{B} summan ja tulon derivaatalle ovat voimassa

tavanmukaiset derivoimissäännöt

$$(2.77) \quad \frac{d(\mathbf{A} + \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

$$(2.78) \quad \frac{d(p\mathbf{A})}{dt} = \frac{dp}{dt}\mathbf{A} + p\frac{d\mathbf{A}}{dt},$$

$$(2.79) \quad \frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

$$(2.80) \quad \frac{d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

missä p on skalaarifunktio $p = p(t)$.

2.4.4 Skalaarifunktion gradientti ja gradienttilause

Yhden muuttujan funktioiden analyysissä funktion käyttäytymistä, kuten kasvunopeutta, tutkitaan derivaatan avulla. Usean muuttujan skalaarifunktioiden tapauksessa derivaatta-käsite laajennetaan osittaisderivaatoiksi eri muuttujien suhteen. Lisäksi derivaatta voidaan muodostaa eri suuntiin. Tämä johtaa käsitteeseen *suunnattu derivaatta*.

Skalaarifunktion $f = f(\mathbf{r}, t)$ gradientti (merkitään ∇f) on määritelmän mukaan sellainen vektorifunktio, että mielivaltaisen yksikkövektorin \mathbf{e}_s suuntaan muodostettu suunnattu derivaatta df/ds saadaan skalaaritulosta

$$(2.81) \quad \frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \mathbf{e}_s,$$

missä yksikkövektori \mathbf{e}_s on ilmaistavissa edelleen paikkavektorin \mathbf{r} derivaatan avulla

$$\mathbf{e}_s = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Määritelmä (2.81) on yleinen, koordinaatistoista riippumaton. Sen mukaan siis skalaarifunktion f derivaatta tiettyyn suuntaan on sama kuin funktion gradientin skalaarikomponentti kyseisellä suunnalla. Yhtälöstä (2.81) seuraa myös kaksi tärkeää gradientin ominaisuutta:

1. funktio kasvaa voimakkaimmin gradientin suuntaan, koska silloin yhtälön (2.81) pistetulo on suurimmillaan eli vektorit ∇f ja \mathbf{e}_s ovat yhdensuuntaiset, ja
2. derivaatta gradientin suuntaan on sama kuin gradientin itseisarvo.

Gradientti liittyy siis skalaarikenttään vektorikentän. Skalaarikenttää ja skalaarifunktiota voidaan kuvata tasa-arvo- eli nivoopinnoilla, joilla funktio

saa vakioarvon. Gradienttikenttä on näitä nivoopintoja vastaan kohtisuorassa suunnassa oleva vektorikenttä. Vektorikenttää voidaan kuvata kenttä- eli vektoriviivoilla, joiden tangenti kussakin pisteessä yhtyy siinä pisteessä olevan vektorin suuntaan.

Gradientin esitysmuoto eri koordinaatistoissa saadaan yhtälöä (2.81) soveltamalla. Gradientin esitysmuodot eri koordinaatistoissa ovat:

Kartesinen koordinaatisto:

$$(2.82) \quad \nabla f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Sylinterikoordinaatisto:

$$(2.83) \quad \nabla f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Pallokoordinaatisto:

$$(2.84) \quad \nabla f(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

Edellä otettiin käyttöön symboli *nabla*, ∇ , jolla on erittäin keskeinen asema kenttäteoriassa. Kyseessä on derivointioperaattori, toiselta nimeltään Hamiltonin⁴ operaattori, jonka avulla voidaan helposti ja kompaktissa muodossa esittää erilaisia skalaari- ja vektorifunktioihin liitettäviä operaatioita ja toisia funktioita. Nabla-operaattorin muoto eri koordinaatistoissa voidaan päätellä yhtälöistä (2.82–2.84).

Kartesinen koordinaatisto:

$$(2.85) \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Sylinterikoordinaatisto:

$$(2.86) \quad \nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Pallokoordinaatisto:

$$(2.87) \quad \nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Huomautus 1. On huomattava, että skalaarifunktion $f = f(\mathbf{r}, t)$ gradientin muodostamisessa derivoinnit kohdistuvat vain funktion paikka- eli spati-aalimuuttujiin. Näin ollen funktio saa riippua myös ajasta t , jota korostimmekin laittamalla ajan yhdeksi muuttujaksi. Jatkossa tosin jätämme muuttujat useimmiten merkitsemättä, ellei ole vaaraa väärinkäsitykseen. ■

⁴William Hamilton (1805–1865), irlantilainen matemaatikko.

Huomautus 2. Skalaarifunktion arvo jossakin pisteessä on vektorin lailla invariantti eli riippumaton koordinaatistosta. Edellä käytimme yleistä koordinaatistosta riippumatonta vektorimuuttuja-merkintää $f = f(\mathbf{r}, t)$. Invarianttisuus voidaan ilmaista myös eri koordinaatistojen muuttujien avulla $f = f(\mathbf{r}, t) = f(x, y, z, t) = f(\rho, \varphi, z, t) = f(r, \theta, \varphi, t)$. ■

Huomautus 3. Tarkkaavainen lukija voi ihmetellä $f = f(\mathbf{r}, t) = f(r, \theta, \varphi, t)$ -merkintätapaa pallokoordinaatiston kohdalla. Yhtälön (2.50) mukaanhan paikkavektori \mathbf{r} ilmaistaan muodossa $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, joten mistä tulevat θ - ja φ -riippuvuus? Yksinkertainen selitys on siinä, että paikkavektorissa oleva yksikkövektori \mathbf{e}_r ei ole vakiovektori, vaan sen avaruudellinen suunta riippuu myös muuttujista θ ja φ , jotka vasta yksikäsitteisesti määrittävät pisteen sijainnin avaruudessa. Vastaavanlainen tilanne on myös sylinterikoordinaatiston muuttujien ρ ja φ kohdalla. ■

Gradientin määrittely-yhtälöstä (2.81) seuraa myös tärkeä kokonaisdifferentiaalia df koskeva tulos

$$(2.88) \quad df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

Esimerkiksi karteesisessa koordinaatistossa, jossa paikan differentiaali $d\mathbf{r}$ on yhtälön (2.60) mukaan

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k},$$

saadaan kokonaisdifferentiaaliksi

$$(2.89) \quad df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Kokonaisdifferentiaali on käyttökelpoinen erilaisissa virheen suuruutta arvioivissa tarkasteluissa, mutta myös kentäteoriassamme tulemme sitä usein tarvitsemaan.

Gradienttilause

Gradienttilauseen nimellä tunnetaan seuraava tulos, joka saadaan integroimalla yhtälöä (2.88) puolittain pitkin jotakin polkua pisteestä P pisteeseen Q yhtälön (2.71) mukaisesti

$$(2.90) \quad \int_P^Q [\nabla f(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{r} = \int_P^Q df(\mathbf{r}) = f(Q) - f(P),$$

missä on käytetty lyhennettyjä merkintöjä $f(P)$ ja $f(Q)$ funktion $f(\mathbf{r})$ arvoille pisteissä P ja Q .

Yhtälössä (2.90) integraalin arvo ei riipu integroimistiestä, vaan ainoastaan integroimistien päätepisteissä olevista funktion arvoista. Gradienttilauseen avulla on mahdollista määrittää funktio $f(\mathbf{r})$ kaikkialla, kun tunnetaan sen gradientti sekä funktion arvo yhdessä pisteessä. Jos tämä piste on esimerkiksi P , voidaan pitämällä pistettä Q muuttuvana laskea gradienttilauseen avulla funktion arvo pisteessä Q .

2.4.5 Divergenssi ja Gaussin lause

Divergenssi liittyy vektorifunktioon $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ skalaarifunktion. Divergenssille käytetään merkintää $\nabla \cdot \mathbf{F}$. Divergenssin koordinaatistosta riippumaton määritelmä on

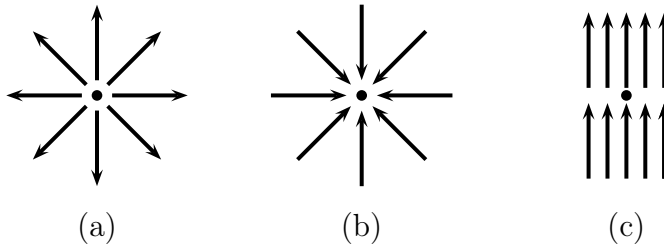
$$(2.91) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Toisin sanoen divergenssi on umpinaisen pinnan yli ulotetun pintaintegraalin raja-arvo, kun pinnan sisäänsä sulkema tilavuus lähenee nollaa. Matemaattisesti divergenssi kuvaa tietyllä tavalla kentän muuttumista omaan suuntaansa sekä suunnan leviämistä eli divergoitumista, johon divergenssi-nimityskin viittaa. Fysikaalisesti divergenssi tarkoittaa tiettyyn differentiaaliseen tilavuuteen dV tai yleisemmin ns. kontrollitilavuuteen liittyvää nettovuota eli ulostulevien kenttäviivojen ja sisään menevien kenttäviivojen 'erotusta'. Jos tilavuuden sisällä ei ole mitään, mikä voisi muuttaa ulostulevien ja sisäänmenevien kenttäviivojen määrää eli nettovuota, tällaisen kentän divergenssi on silloin nolla.

Hyvän mielikuvan divergenssin fysikaalisesta luonteesta antaa (kokoonpuristumaton) nestevirtaus. Johonkin tilavuuteen virtaa nestettä tietty määrä (tilavuus) aikayksikössä, esim. yksikössä m^3/s eli nopeus, m/s , kertaa pinta-ala, m^2 . Jos tämä sama määrä tulee tilavuudesta ulos, täytyy divergenssin olla nolla eli nestettä ei synny tai häviä eli tilavuudessa ei ole nesteen lähteitä tai nieluja. Jos divergenssi on nolosta poikkeava, tilavuuden sisällä on jotakin, mikä muuttaa nestevirtausta. Positiivinen divergenssi tarkoittaa nestelähdettä, negatiivinen vastaavasti nestenielua. Divergenssi kuvaa yleisesti vektorikentän skalaarilähteitä, kuten tulemme tuonnempana eri kenttien kohdalla havaitsemaan. Divergenssi on siis erittäin tärkeä ja hyödyllinen apuväline vektorikenttien analyysissä.

Kuva 2.18 havainnollistaa vektorikentän divergenssiä eri tilanteissa. Kuvassa (a) kenttä on divergoiva eli kenttä hajaantuu yhdestä pisteestä (musta ympyrä), jossa on siis lähde. Kuvassa (b) kenttä on konvergoiva eli kenttävektorit menevät yhteen pisteeseen, jossa on siis nielu eli negatiivinen lähde.

Kuvassa (c) kenttä ei lainkaan muutu pisteen ympäristössä eli kenttä on vakio, jolloin divergenssi on aina nolla.



Kuva 2.18: Esimerkki vektorikentän divergenssistä: (a) positiivinen, (b) negatiivinen ja (c) nolla divergenssi.

Määrittely-yhtälöä (2.91) ja differentiaaligeometrisiä alkioita soveltamalla saadaan divergenssille esitysmuodot eri koordinaatistoissa.

Vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{i} + F_y(\mathbf{r}, t)\mathbf{j} + F_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{k}$$

divergenssi karteesisessa koordinaatistossa on (muuttujat \mathbf{r} ja t on jätetty selkeyden vuoksi merkitsemättä)

$$(2.92) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Vastaavasti vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \mathbf{e}_z$$

divergenssi sylinterikoordinaatistossa on

$$(2.93) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

divergenssi pallokoordinaatistossa on

$$(2.94) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Gaussin lause

Gaussin⁵ teoreeman, lauseen tai kaavan⁶ nimellä tunnetaan tärkeä pinta- ja tilavuusintegraalien välinen yhteys, joka kenttäteoriassa esiintyy useimmiten vuota koskevana:

$$(2.95) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} dS,$$

missä S on umpinainen pinta eli ”Gaussin pinta” ja V sen rajoittama sisäpuolinen tilavuus. Pinnan ulkonormaaliyksikkövektori on \mathbf{n} . Gaussin lauseen aukoton todistaminen ei ole aivan helppo tehtävä. Todistuksen hahmottelua on esitetty mm. Väisälän⁷ erinomaisessa vektorianalyysin oppikirjassa [82] sivuilla 54-57. On syytä jo tässä mainita, että Gaussin lause voidaan esittää myös yleisemmässä muodossa käyttäen ns. yleiskertomerkinä tähteä, $*$:

$$(2.96) \quad \oint_S d\mathbf{S} * \mathbf{F} = \int_V \nabla * \mathbf{F} dV.$$

Tässä kaavassa on käytetty lyhyttä merkintää $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$. Yleiskertomerkki tähti voi tarkoittaa pistettä, ristiä tai tyhjää. Sen tarkoittaessa tyhjää on toinen tekijävektoreista korvattava skalaarilla, jolloin siis vektoria esittävän lihavoidun symbolin paikalle on ajateltava skalaaria esittävä laiha kirjain-symboli.

Fysikaalisesti Gaussin lauseen (2.95) tilavuusintegraali antaa V :ssä olevan kokonaislähteiden määrän. Pintaintegraali on jo aiemmin kaavassa (2.74) esillä ollut nettovuoto pinnan S sisäpuolelta ulkopuolelle.

Huomautus. Gaussin lauseessa ja vuon laskemisessa esiintyvä umpinainen pinta voi olla mikä tahansa riittävän säännöllinen ja sileä tai tällaisista osista muodostuva ns. *yhdesti yhtenäisen* alueen rajoittava pinta. Pinnassa voi olla kärkiä ja särmiä. On erityisesti huomattava, että pinta voi koostua useista erillisistä umpinaisista osapinnoista, kuten eri kappaleiden pinnoista. Lisäksi pinta voi olla fysikaalinen rajapinta tai materian epäjatkuvuuspinta, mutta se voi olla myös täysin fiktiivinen fysikaalisista pinnoista erillään oleva matemaattinen pinta.

Yhdesti yhtenäinen alue on topologinen käsite, jolla tarkoitetaan aluetta, jossa mikä tahansa umpinainen käyrä voidaan jatkuvin muodonmuutoksin

⁵Carl Friedrich Gauss (1777–1855), saks. matemaatikko ja geofyysikko.

⁶Gaussin lausetta kutsutaan anglo-saksisessa kirjallisuudessa divergenssiteoreemaksi. Neuvostoliittolaisessa ja venäläisessä kirjallisuudessa siitä käytetään nimitystä Ostrogradskin lause venäl. matemaatikon Michail Ostrogradskin (1801–1862) mukaan.

⁷Kalle Väisälä (1893–1968), Teknillisen korkeakoulun matematiikan prof. 1938–1960.

saattaa pisteeksi eli redusoida ilman, että tarvitsee poistua alueesta tai rikkoa käyrää osiin. Esimerkiksi kahden samankeskisen pallopinnan välinen alue on yhdesti yhtenäinen, mutta torus-rengas (kuten polkupyörän sisäkumi) ei ole yhdesti yhtenäinen. Torus-renkaan sisällä voi näet kulkea umpinainen käyrä vaikkapa renkaan keskellä. Tätä käyrää ei saada kutistetuksi pisteeksi renkaassa ilman, että käyrä katkaistaisiin. Jos rengas leikataan jostakin kohtaa poikki, muodostuva alue on sen jälkeen yhdesti yhtenäinen. ■

2.4.6 Roottori ja Stokesin lause

Roottori liittyy vektorifunktioon $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ toisen vektorifunktion. Roottorille käytetään merkintää $\nabla \times \mathbf{F}$. Sen koordinaatistosta riippumaton määritelmä on

$$(2.97) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{F} dS.$$

Roottorin määritelmä (2.97) on muodoltaan ja merkinnöiltään samanlainen kuin divergenssin määritelmä (2.91). Erona on se, että pistetulon tilalla on ristitulo. Koska roottori on vektorikenttä, sillä on myös skalaarikomponentti tietyllä suunnalla. Roottorin määritelmä voidaan perustaa myös roottorin suunnalla \mathbf{e} olevan skalaarikomponentin määritelmään

$$(2.98) \quad \mathbf{e} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$

missä pintaa S rajoittava umpinainen käyrä L on tasossa, jonka normaali on \mathbf{e} . Tässä määritelmässä käytetään vektorikentän sirkulaatiota (2.72) umpinaisen käyrän L ympäri.

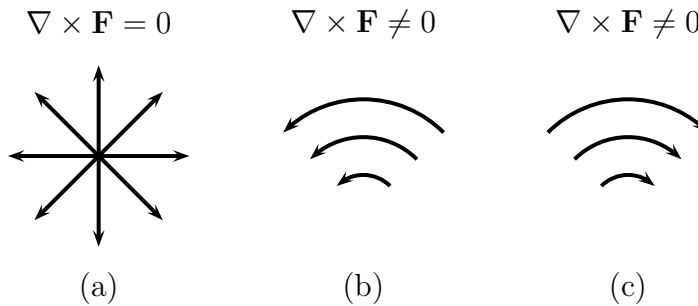
Itse asiassa määritelmät (2.97) ja (2.98) ovat täysin ekvivalentteja, kuten helpohkolla matemaattisella tarkastelulla voi todeta.

Mielikuvan muodostaminen roottorista on jo hieman työläämpää kuin edellä divergenssistä muodostamamme kuva. Syynä on sen vektoriluonne. Roottori mittaa kentän pyörteisyyttä, johon sen nimikin roottori tai pörre viittaa. Pyörteisyyteen vaikuttavat vektorikentän muuttuminen omaa suuntaansa vastaan kohtisuorassa suunnassa sekä suunnan kaartuminen.

Roottori-käsitteen konkretisoimiseksi voidaan jälleen ajatella nestevirtausta. Jos nestevirtaukseen laitetaan differentiaalinen siipiras (differentiaalinen sen takia, ettemme halua muuttaa itse virtauskenttää) ja jos tämä ratas lähtee pyörimään, virtauskentällä on asianomaisessa pisteessä nollas- ta poikkeava roottori. Jos siipiras ei pyöri, roottori on nolla. Siipiras voi

pyöriä myötä- tai vastapäivään ja se voidaan asettaa virtauskenttään mielivaltaisessa asennossa, jolloin voidaan tarkastella roottorin eri vektorikomponentteja. Pyöriminen on mahdollista, jos kenttä muuttuu suuntaansa vastaan kohtisuorassa suunnassa tai kaartuu siipirattaan eri puolilla eri tavalla. Pyörimisakseli osoittaa roottorin suunnan. Resultantti- eli kokonaisroottori on näiden vektorikomponenttien vektorisumma. Roottori on siis divergenssin ohella vektorianalyysin yksi keskeisimpiä työkaluja.

Kuva 2.19 havainnollistaa vektorikentän roottoria kolmessa tilanteessa. Kuvan (a) kohdassa kentän roottori on nolla, jolloin kenttä on pyörteetön. Kuvan (b) ja (c) kohdissa roottori on nolasta poikkeava ja sen suunta määräytyy oikeankäden peukalon suuntana, kun muut sormet osoittavat vektori- viivoja kuvaavien kaarevien nuolten suuntaan.



Kuva 2.19: Esimerkki vektorikentän roottorista: (a) pyörteetön kenttä, (b) roottorin suunta sivun paperista suoraan ulos ja (c) roottorin suunta suoraan sivun paperin sisään.

Määrittely-yhtälöä (2.98) ja differentiaaligeometrisiä alkioita soveltamalla saadaan roottorille esitysmuodot eri koordinaatistoissa.

Vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

roottori karteesisessa koordinaatistossa on

$$(2.99) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Vastaavasti vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi + F_z \mathbf{e}_z$$

roottori sylinterikoordinaatistossa on

$$(2.100) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z.$$

Vektorifunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

roottori pallokoordinaatistossa on

$$(2.101) \quad \nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r F_\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi.$$

Huomautus. Edellä esitetyt roottorin ja jo aiemmin esitetyt divergenssin laskukaavat (2.92–2.94) eri koordinaatistoissa ovat pituudestaan huolimatta laskentateknisesti helppoja, mutta usein työläitä ja tarkkuutta vaativia käytä. Divergenssin ja roottorin laskeminen ei sinänsä ole suuri ongelma. Suurin ongelma on useimmiten näiden käsitteiden fysikaalinen ymmärtäminen ja sisäistäminen, johon kannattaa eri fysikaalisten vektorikenttien kohdalla kiinnittää huomiota. ■

Stokesin lause

Stokesin⁸ lauseen nimellä tunnetaan viivaintegraalin ja pintaintegraalin välinen yhteys

$$(2.102) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l},$$

⁸George Gabriel Stokes (1819–1903), engl. matemaatikko.

missä L on umpinainen avaruusikäyrä ja S sen rajoittama ei-umpinainen pinta. Pinnan ulkonormaalien suunta määräytyy oikean käden peukalon suuntaan, kun reunaa L kierretään sormien suuntaan. Reunan kaarialkion $d\mathbf{l}$ suunta valitaan siten, että kun ajatellaan liikuttavan pinnan positiivisella (eli ulkonormaalien) puolella reunaa pitkin alkion $d\mathbf{l}$ osoittamaan suuntaan, niin pinta S jää vasemmalle puolelle.

Stokesin lauseen aukoton todistaminen on verrattain vaativa tehtävä. Väisälän oppikirjan [82] sivuilla 62-67 todistusta on hahmoteltu. On huomattava, että myös Stokesin lauseessa (2.102) pistetulon paikalla voi olla yleiskertomerkki tähti, *, joka voi tarkoittaa pistetuloa, ristituloa tai 'tyhjää'. Tällöin Stokesin lause esitetään muodossa:

$$(2.103) \quad \oint_L d\mathbf{l} * \mathbf{F} = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) * \mathbf{F},$$

Stokesin lause (2.102) koskee siis vektorifunktion roottorin vuon ja mielivaltaisen ei-umpinaisen pinnan umpinaista reuna-käyrää pitkin lasketun integraalin välistä yhteyttä. On siis huomattava, että Stokesin lauseen pinta voi olla mikä tahansa umpinaiseen käyrään L rajoittuva pinta. Näitä pintojahan on itse asiassa ääretön määrä.

Huomautus. Roottorin skalaarikomponentin määrittely-yhtälö (2.98) on juuri Stokesin lauseen (2.102) mukainen yhtälö. ■

2.4.7 Laplacen operaattori ja nablalla operoimissäännöt

Edellä käytimme nabra-operaattoria gradientin, divergenssin ja roottorin tarkasteluissa. Kyseessä on lineaarinen derivointioperaattori, jolle ovat voimassa seuraavat lineaarisuussäännöt:

$$(2.104) \quad \begin{aligned} \nabla(a f + b f) &= a \nabla f + b \nabla f, \\ \nabla \cdot (a \mathbf{F} + b \mathbf{G}) &= a \nabla \cdot \mathbf{F} + b \nabla \cdot \mathbf{G}, \\ \nabla \times (a \mathbf{F} + b \mathbf{G}) &= a \nabla \times \mathbf{F} + b \nabla \times \mathbf{G}, \end{aligned}$$

missä a ja b ovat skalaarisia vakioita, f skalaarifunktio sekä \mathbf{F} ja \mathbf{G} vektorifunktioita.

Gradientin, divergenssin ja roottorin operointeja voidaan kohdistaa funktioihin, joissa jo esiintyy nabra ja/tai useampia skalaari- ja vektorifunktioita. Nablansisältäviä lausekkeita voidaan kehittää erilaisten vektoridentiteettien avulla toisiinsa muotoihin. Annamme seuraavassa nämä identiteetit ilman yksityiskohtaisia johtoja. Jos haluaa varmentua jonkin identiteetin paikkansapitävyydestä, voi aina todentaa ne suorakulmaisessa karteesisessä koordinaatistossa komponenttien avulla tarkasteltuna. Sinänsä identiteetit ovat koordinaatistoista riippumattomia.

Laplacen operaattori

Ensimmäinen identiteetti koskee gradientin divergenssiä, jolle annetaan oma symbolinsa

$$(2.105) \quad \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f,$$

jossa olevaa symbolia ∇^2 kutsutaan Laplacen⁹ operaattoriksi. Laplacen operaattori on ahkerassa käytössä kenttäteoriassamme, joten annamme seuraavassa sen esitysmuodot eri koordinaatistoissa.

Laplacen operaattorin muoto kohdistettuna funktioon f karteesisessa koordinaatistossa on

$$(2.106) \quad \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Laplacen operaattorin muoto kohdistettuna funktioon f sylinterikoordinaatistossa on

$$(2.107) \quad \nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

sekä pallokoordinaatistossa

$$(2.108) \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Nablalla operoimissäännöt

Seuraavat kehityskaavat ja säännöt ovat voimassa nablalla operoitaessa:

$$(2.109) \quad \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

$$(2.110) \quad \nabla \times \nabla f = 0,$$

$$(2.111) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F},$$

$$(2.112) \quad \nabla (fg) = (\nabla f)g + f\nabla g,$$

$$(2.113) \quad \nabla (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}),$$

⁹Pierre Simon Laplace (1749–1827), ransk. matemaatikko ja demoniajattelija.

$$(2.114) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f\nabla \cdot \mathbf{F},$$

$$(2.115) \quad \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F},$$

$$(2.116) \quad \nabla \times (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \times \mathbf{F} + f\nabla \times \mathbf{F},$$

$$(2.117) \quad \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}.$$

Yhtälöt (2.112), (2.114) ja (2.116) ovat muodoltaan tulon derivoimissääntöä vastaavia nablayhtälöitä. Kehityskaavojen (2.111), (2.113) ja (2.117) johtaminen perustuu puolestaan vektorikolmitulon kehityskaavaan (2.26). Yhtälön (2.115) johtamisessa käytetään hyväksi skalaarikolmitulon (2.24) pisteen ja ristin vaihdannaisuutta (2.25).

Yhtälö (2.111) määrittelee samalla vektorifunktioon kohdistuvan Laplaceen operaattorin

$$(2.118) \quad \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Tätä yhtälöä käytetään määritettäessä Laplaceen vektorioperaattori eri koordinaatistoissa. Karteesisessa koordinaatistossa ja vain siinä (koska yksikkövektorit ovat vakiovektoreita!) Laplaceen vektorioperaattorin muoto on

$$(2.119) \quad \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_x \mathbf{i} + \nabla^2 F_y \mathbf{j} + \nabla^2 F_z \mathbf{k}.$$

2.4.8 Greenin kaavat

Gaussin lauseen (2.95) avulla voidaan johtaa varsinkin potentiaalteoreettisissa tarkasteluissa paljon käytetyt Greenin¹⁰ kaavat. Ne kuvaavat tiettyjen lausekkeiden tilavuus- ja pintaintegraalien välisiä yhteyksiä. Skalaarifunktiota f ja g koskevat Greenin kaavat ovat

$$(2.120) \quad \int_V \nabla f \cdot \nabla g dV + \int_V f \nabla^2 g dV = \oint_S f \nabla g \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{Greenin I kaava}$$

ja

$$(2.121) \quad \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV = \oint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S}, \quad \text{Greenin II kaava.}$$

¹⁰George Green (1793–1841), engl. matemaatikko.

Greenin toinen kaava kirjoitetaan usein myös muotoon

$$(2.122) \quad \int_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV = \oint_S (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) dS,$$

missä on käytetty hyväksi gradientin ja suunnatun derivaatan (merkitään symbolilla $\frac{\partial}{\partial n}$) yhteyttä

$$(2.123) \quad \nabla g \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial g}{\partial n} dS, \quad \nabla f \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial f}{\partial n} dS.$$

Greenin kaavoissa esiintyy Gaussin lauseesta tuttu umpinainen pinta S sekä sen rajoittama tilavuus V . Pinta-ala-alkio eli pinta-alkio on $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$, missä \mathbf{n} on ulkonormaaliyksikkövektori.

Huomautus. Gaussin ja Stokesin lauseiden avulla voidaan johtaa myös muita samankaltaisia identiteettejä kuin edellä mainitut Greenin kaavat. Lisäksi ne voidaan laajentaa koskemaan myös vektori- ja tensoriarvoisia funktioita. Greenin II kaavaa kutsutaan usein myös Greenin teoreemaksi. ■

2.4.9 Vektorikenttien luokittelu ja Helmholtzin lause

Olemme edellä määritelleet käsitteet divergenssi ja roottori. Vektorikentät luokitellaan sen mukaan, minkälainen niiden divergenssienttä ja roottorikenttä ovat, erityisesti mikäli nämä kentät ovat nollia. Saamme vektorikentää \mathbf{F} koskien seuraavat tapaukset:

$$(2.124) \quad (a) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

$$(2.125) \quad (b) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

$$(2.126) \quad (c) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0,$$

$$(2.127) \quad (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0.$$

Huomautus. Edellä olevat tilanteet (a)–(d) voivat esiintyä kaikki saman vektorikentän ollessa kyseessä kentän määrittelyalueen eri osissa. Divergenssi ja roottori liittyvät kentän pisteeseen (ja sen ε -säteiseen ympäristöön) eli ovat pistesidonnoisia ominaisuuksia. ■

Jos vektorikentän \mathbf{F} divergenssi häviää eli

$$(2.128) \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0,$$

kutsutaan tällaista kenttää *lähteettömäksi* eli *solenoidaaliseksi*.

Gaussin lauseen (2.95) mukaan lähteettömyys tarkoittaa siis sitä, että vektorin vuo jokaisen alueessa olevan umpinaisen pinnan läpi häviää eli

$$(2.129) \quad \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Koska lisäksi identiteetin (2.109) mukaan roottorin divergenssi häviää, seuraa tästä, että lähteetön kenttä \mathbf{F} on aina lausuttavissa jonkin toisen vektorikentän \mathbf{A} roottorina

$$(2.130) \quad \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A},$$

missä \mathbf{A} on kentän \mathbf{F} *vektoripotentiaali*.

Kentän lähteettömyys jossakin alueessa on fysikaalisesti hyvin konkreettinen. Lähteetön kentän ominaisuudet (2.128), (2.129) ja (2.130) ovat matemaattisesti täysin ekvivalentteja.

Jos vektorikentän \mathbf{F} roottori häviää eli

$$(2.131) \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0,$$

kutsutaan tällaista kenttää *pyörteettömäksi* eli *laminaariseksi*. Myös termiä *konservatiivinen* käytetään, varsinkin eräiden fysiikan voimakenttien, kuten painovoimakentän, tapauksessa. Konservatiivisuus viittaa silloin siihen, että voiman tekemä työ on nolla, kun voiman vaikutuspiste kiertää mielivaltaisen umpinaisen käyrän kentässä.

Stokesin lauseen (2.102) mukaan pyörteettömyys tarkoittaa siis sitä, että vektorin kierto jokaisen alueessa olevan umpinaisen käyrän ympäri häviää eli

$$(2.132) \quad \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Koska lisäksi identiteetin (2.110) mukaan gradientin roottori on aina nolla, seuraa tästä, että pyörteetön vektorikenttä \mathbf{F} on aina ilmaistavissa jonkin skalaarifunktion V gradienttina:

$$(2.133) \quad \mathbf{F} = \nabla V,$$

missä V on kentän \mathbf{F} *skalaaripotentiaali*. Joidenkin kenttien kohdalla on tapana fysikaalisista syistä johtuen lausua kenttä \mathbf{F} skalaaripotentiaalilin negatiivisena gradienttina

$$(2.134) \quad \mathbf{F} = -\nabla V,$$

mutta huomattakoon, että tällainen merkinvalinta ei ole mitenkään matemaattinen välttämättömyys.

Pyörteettömän kentän ominaisuudet (2.131), (2.132) ja (2.133) tai (2.134) ovat matemaattisesti täysin ekvivalentteja.

Kenttiä on tapana kuvata kenttä- eli vektoriviivojen avulla, joiden tangentti kussakin pisteessä yhtyy kentän suuntaan. Jos kenttäviivat kulkevat jonkin umpinaisen käyrän jokaisen pisteen kautta ja umpinaista käyrää siirretään avaruudessa koko ajan samoja kenttäviivoja myöten, niin näin syntyy *kenttäputki*.

Kenttäviivat voivat alkaa vain lähteistä ja päättyä nieluihin tai ne voivat ulottua äärettömyyteen. Lähteettömässä kentässä kenttäviivat ovat umpinaisia tai ulottuvat kentän reunasta reunaan. Pyörteettömässä vektorikentässä ei ole umpinaisia kenttäviivoja. Kenttäviivojen määrällä jonkin kenttäviivoihin nähden kohtisuorassa olevan poikkipinnan läpi kuvataan kentän itseisarvon suuruutta.

Helmholtzin lause

Matemaattisesti voidaan todistaa, että vektorikenttä tulee jossakin alueessa yksikäsitteisesti määräytyksi, kun tunnetaan sen lähteet ja pyörteet ja lisäksi sen normaalikomponentti alueen reunalla tai jos alue ulottuu äärettömyyteen, kentän on hävittävä äärettömydessä. Toisin sanoen vektorikentän yksikäsitteiseksi määrittämiseksi riittää tuntea

$$(2.135) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= s, \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

sekä vektorin normaalikomponentti $F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ alueen reunalla tai kentän äärettömydessä häviäminen. s on kentän skalaarilähteen tiheys ja \mathbf{c} on kentän pyörrelähteen tiheys.

Helmholtzin¹¹ lauseen tai teoreeman mukaan, vektorikenttä, jonka divergenssikenttä ja roottorikenttä (yhtälöt (2.135)) häviävät äärettömydessä, voidaan jakaa kahteen osaan: pyörteettömään ja lähteettömään. Toisin sanoen

$$(2.136) \quad \mathbf{F} = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A},$$

jossa $-\nabla V$ on pyörteetön ja $\nabla \times \mathbf{A}$ kentän lähteetön osa.

On myös huomattava, että mille tahansa vektorikentälle on voimassa vektoriaalisen Laplacen operaattorin (2.118) avulla ilmaistu yhtälö

$$(2.137) \quad \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla s - \nabla \times \mathbf{c}.$$

¹¹Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894), saks. fysiologi.

2.4.10 Paikkavektorin vektorikenttä ja avaruuskulma

Vektorikenttien joukossa paikkavektoriin \mathbf{r} liittyvä vektorikenttä ansaitsee oman tarkastelunsa, koska paikkavektori esiintyy lähes kaikissa kenttäteoreettisissa tarkasteluissa. Paikkavektorin pituus r puolestaan muodostaa skalaarikentän.

Helposti on todettavissa (esim. pallo- tai karteesisessa koordinaatistossa), että kentän r gradientti

$$(2.138) \quad \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{r}^0,$$

jossa \mathbf{r}^0 on \mathbf{r} :n suuntainen yksikkövektori.

Edelleen paikkavektorin divergenssi

$$(2.139) \quad \nabla \cdot \mathbf{r} = 3,$$

ja roottori

$$(2.140) \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0.$$

Kaksiulotteisessa avaruudessa divergenssiksi tulee 2. Havaitsemme siis, että paikkavektorin divergenssi on sama kuin avaruuden dimensio. Paikkavektori muodostaa pyörteettömän vektorikentän, kuten itse asiassa kuvan 2.19 (a)-kohdassa nähdään. Siinä on havainnollistettu paikkavektorikenttää.

Jos $f(r)$ on mielivaltainen r :stä riippuva skalaarifunktio, niin tällöin on voimassa seuraava kehityskaava, joka saadaan gradientin määritelmän ja yhdistetyn funktion derivoimissäännön perusteella:

$$(2.141) \quad \nabla f(r) = \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} \mathbf{r} = \frac{df(r)}{dr} \mathbf{r}^0.$$

Edelleen Laplacen operaattorin kohdistaminen funktioon $f(r)$ tuottaa kehityskaavan

$$(2.142) \quad \nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df(r)}{dr}.$$

Huomautus. Yhtälöissä (2.141) ja (2.142) tulee käyttää tavallista derivaattamerkintää, koska funktio $f(r)$ riippuu vain yhdestä muuttujasta eli paikkavektorin pituudesta, joka on skalaari. Huomaa siis ero funktioiden $f(r)$ ja $f(\mathbf{r})$ välillä. Jälkimmäinen on vektorimuuttujan skalaariarvoinen funktio eli useamman muuttujan funktio. ■

Jos erikoisesti $f(r) = \frac{1}{r}$, niin yhtälöiden (2.141) ja (2.142) mukaan saadaan

$$(2.143) \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}^0}{r^2}$$

ja

$$(2.144) \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = 0,$$

jotka ovat voimassa, kun $r > 0$.

Kenttäteoreettisissa laskuissa on useimmiten mukana myös kahden pisteen, joiden paikkavektorit ovat \mathbf{r}_P ja \mathbf{r}_Q , välisen etäisyyden

$$(2.145) \quad d = |\mathbf{r}_{QP}| = |\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P| = \sqrt{(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P)}$$

laskeminen. Tällä etäisyysfunktiolla on seuraavat esitysmuodot: (karteesinen koordinaatisto):

$$(2.146) \quad d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

(sylinterikoordinaatisto):

$$(2.147) \quad d = \sqrt{\rho_Q^2 + \rho_P^2 - 2\rho_Q\rho_P \cos(\varphi_Q - \varphi_P) + (z_Q - z_P)^2}$$

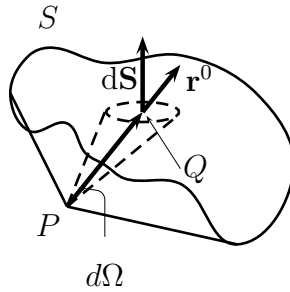
sekä (pallokoordinaatisto):

$$(2.148) \quad d = \sqrt{r_Q^2 + r_P^2 - 2r_Qr_P \cos \theta_Q \cos \theta_P - 2r_Qr_P \sin \theta_Q \sin \theta_P \cos(\varphi_Q - \varphi_P)}.$$

Avaruuskulma

Avaruuskulmalla tarkoitetaan kulmaa, jossa jokin pinta (umpinainen tai ei-umpinainen) näkyy tarkastelupisteestä käsin. Avaruuskulman Ω suuruus ilmaistaan *steradiaaneina*, joissa koko avaruuden käsittävä kulma on 4π ja pelkäksi puolisuoraksi kutistunut avaruuskulma on 0. Avaruuskulman (itseisarvon) vaihteluväli on siis $0 \leq \Omega \leq 4\pi$.

Merkitään kuvan 2.20 mukaisesti tarkastelupistettä P :llä ja siitä alkavaa pinnan S pisteen Q paikkavektoria \mathbf{r} :llä eli $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$, jossa \mathbf{r}_P ja \mathbf{r}_Q ovat pisteiden P ja vastaavasti Q jostakin kiinteästä origosta alkavat paikkavektorit.



Kuva 2.20: Avaruuskulman määrittäminen.

Avaruuskulman määritelmänä voidaan analogisesti tasokulman määrittelyn kanssa pitää suuretta

$$(2.149) \quad \Omega = \int_S d\Omega = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\mathbf{r}^0}{r^2} \cdot d\mathbf{S}.$$

Toisin sanoen differentiaalinen avaruuskulma $d\Omega$ on pallopinnalla oleva $d\mathbf{S}$:n \mathbf{r}^0 :n suuntainen komponentti ($\mathbf{r}^0 \cdot d\mathbf{S}$) jaettuna pallon säteen r neliöllä. (Tasokulman määritelmässä ympyränkaaren pituus jaetaan ympyrän säteellä.)

Huomaamme, että (2.149) on yhtälön (2.143) mukaan samaa muotoa kuin vektorikentän

$$-\nabla \frac{1}{r}$$

vuon mielivaltaisen pinnan S läpi eli

$$-\int_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S}.$$

Tämä vuo onkin sama kuin se avaruuskulma Ω , jossa pinta näkyy pisteestä P tarkasteltuna eli voimme kirjoittaa

$$(2.150) \quad \Omega = -\int_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S},$$

kun $r \neq 0$. Yhtälössä (2.150) integroiminen suoritetaan siis pisteen Q koordinaattien suhteen tai kuten lyhyemmin ilmaisemme: piste Q on integrointimuuttuja. Myös nablalla operoiminen tehdään pisteen Q koordinaattien suhteen.

Jos pinta S on umpinainen, niin on voimassa

$$(2.151) \quad \Omega = - \oint_S \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 4\pi, & \text{jos } P \text{ on } S\text{:n sisäpuolella,} \\ -2\pi, & \text{jos } P \text{ on pinnalla } S \\ & \text{sen positiivisella puolella,} \\ +2\pi, & \text{jos } P \text{ on pinnalla } S \\ & \text{sen negatiivisella puolella,} \\ 0, & \text{jos } P \text{ on } S\text{:n ulkopuolella.} \end{cases}$$

Huomautus 1. Pinnan S reunakäyrä näkyy siis pisteestä P näkökulmassa, jonka määrittää yhtälö (2.150). Tämä yhtälö tuottaa myös negatiivisia näkö- eli avaruuskulman arvoja, mikäli tarkastelupiste P on pinnan positiivisella puolella eli siis sillä puolella, johon ulkonormaaliyksikkövektori eli pinta-alaalkiovektori osoittaa. Tällöin näet ulkonormaaliyksikkövektorin $\mathbf{n} = d\mathbf{S}/dS$ ja \mathbf{r}^0 :n suuntien välinen kulma on tylppä, jolloin niiden pistetulo on negatiivinen. Kuvassa 2.20 tarkastelupiste on pinnan negatiivisella puolella. ■

Huomautus 2. Näkökulma Ω muuttuu jatkuvasti, kun piste P liikkuu jatkuvasti avaruudessa. Kun piste P lähestyy pintaa S (umpinainen tai ei-umpinainen) sen positiiviselta puolelta, näkökulman arvoksi tulee $\Omega_+ = -2\pi$, koska silloin pinnalla $\mathbf{n} \uparrow \downarrow \mathbf{r}^0$ eli mainitut vektorit ovat vastakkaisuuntaisia. Kun piste P kulkee pinnan positiiviselta puolelta negatiiviselle puolelle (infinitesimaalisen matkan) ollen edelleen pinnalla S , mutta sen negatiivisella puolella, näkökulma saa arvon $\Omega_- = +2\pi$, koska silloin $\mathbf{n} \uparrow \uparrow \mathbf{r}^0$. Näkökulma muuttuu siis epäjatkovasti pinnan läpi mentäessä. Positiiviselta puolelta negatiiviselle puolelle mentäessä epäjatkovuuden suuruus on siis $\Omega_+ - \Omega_- = -4\pi$. ■

2.4.11 Diracin δ -funktio

Pistemäisten lähteiden tarkastelu tuottaa usein tilanteen, jossa kentän laskentapiste ja lähdepiste ovat samat. Tällöin laskentapisteen ja lähdepisteen välinen etäisyys d on nolla, ja kaikki muotoa $1/d^n$, missä useimmiten $n \in \{1, 2, 3\}$, olevat lausekkeet vaativat erityistarkastelun esimerkiksi integrointitilanteissa. Yksi hyvin käyttökelpoinen keino tämääntapaisten erikoispisteiden eli singulariteettien käsittelemiseksi on ns. Diracin¹² δ -(delta)-funktion käyttö.

Yksiulotteisen Diracin δ -funktion määritelmä on

$$(2.152) \quad \delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq a, \\ \infty, & \text{kun } x = a; \end{cases}$$

¹²Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), engl. fyysikko.

$$(2.153) \quad \int_{\Delta} \delta(x - a) dx = 1,$$

missä Δ on mielivaltainen pisteen $x = a$ sisältävä väli.

δ -funktiolla on seuraavia ominaisuuksia:

$$(2.154) \quad \delta(x) = \delta(-x),$$

$$(2.155) \quad \int_{\Delta} f(x)\delta(x - a) dx = f(a),$$

$$(2.156) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x),$$

missä $f(x)$ on jatkuva funktio.

Kolmiulotteinen Diracin δ -funktio määritellään analogisella tavalla:

$$(2.157) \quad \delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \mathbf{r} \neq \mathbf{a}, \\ \infty, & \text{kun } \mathbf{r} = \mathbf{a}; \end{cases}$$

$$(2.158) \quad \int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) dV = \begin{cases} f(\mathbf{a}), & \text{kun } \mathbf{a} \text{ on tilavuuden } V \text{ sisällä,} \\ 0, & \text{kun } \mathbf{a} \text{ on tilavuuden } V \text{ ulkopuolella,} \end{cases}$$

missä $f(\mathbf{r})$ on jatkuva funktio.

Tulemme myöhemmin huomaamaan, että Diracin δ -funktio on erittäin käyttökelpoinen, kun kuvataan pistemäisen lähteen, kuten pistevarauksen, jakautumista avaruudessa:

$$(2.159) \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}),$$

missä q on pistemäisen lähteen voimakkuus ja \mathbf{a} sen paikkavektori. Pistemäisestä singulariteetista tulee Diracin δ -funktion avulla jatkuvasti jakautunut avaruuslähde, jonka tiheys on ρ .

On myös mahdollista muodostaa δ -funktion derivaatta

$$(2.160) \quad \int_{\Delta} f(x) \frac{\partial \delta(x - a)}{\partial x} dx = -\frac{\partial f}{\partial x}(a).$$

Korkeamman kertaluvun derivaatat määritellään vastaavalla tavalla

$$(2.161) \quad \int_{\Delta} f(x)\delta^{(n)}(x - a) dx = (-1)^n f^{(n)}(a).$$

δ -funktioita on usein tarpeen approksimoida todellisilla funktioilla. Tällaisia approksimaatiofunktioita on lukuisa joukko. Seuraavassa muutamia esimerkkejä:

$$(2.162) \quad \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2},$$

$$(2.163) \quad \delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin kx}{x},$$

$$(2.164) \quad \delta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 kx}{kx^2}.$$

Näiden yhtälöiden avulla voidaan todentaa δ -funktion ominaisuudet (2.154)–(2.156).

Huomautus. Diracin δ -funktio ei ole matemaattisessa mielessä lainkaan funktio. Se on itse asiassa yhdessä avaruuden pisteessä äärettömyyteen ulottuva piikki.

Integroimisvälinä Δ yhtälössä (2.153) sekä vastaavasti yhtälöissä (2.160) ja (2.161) on usein väli $-\infty < x < +\infty$.

Diracin δ -funktio on käyttökelpoinen myös viivalähteisiin ja pintalähteisiin liittyvien singulariteettien hallitsemisessa. ■

2.5 Tensori- ja dyadilaskenta

2.5.1 Tensorit

Skalaarien ja vektorien luonnehdinnan yhteydessä kohdassa (2.2.1) todettiin, että tensorin määrittely perustuu sen komponenttien muunnosominaisuuksiin koordinaatiston kierrossa ja että skalaarit ja vektorit ovat itse asiassa vain tensoreiden erikoistapauksia. Tensorilaskennan tietynlaisena lähtökohtana on fysiikan lakien invarianttisuusvaatimus eli niiden riippumattomuus koordinaatistosta. Fysiikan lakien on säilyttävä samoina koordinaatiston muunnoksissa. Geofysiikan kenttäteoriassa tarvitaan tensoriarvoisia funktioita kuvaamaan sekä itse kenttiä, kuten jännitystä ja muodonmuutosta kiinteässä aineessa, että aineen anisotrooppisia ominaisuuksia.

Rajoitumme seuraavassa tarkastelemaan karteesisia, (suoraviivaisessa) ja suorakulmaisessa koordinaatistossa määriteltäviä, ns. kovariantteja tensoreita. Esityksemme keskittyy lähinnä merkintätapojen esittelyyn tulevia tarpeita silmällä pitäen.

Tensorilaskenta on indekseillä operoimista. Sinänsä mitään uusia yhteen-, vähennys- tai kertolaskuja ei tarvitse määritellä, kuten vektoreiden kohdalla teimme. Indeksien käyttö saattaa ainakin aluksi tuntua hieman hankalalta tavalta, sillä ne vaikeuttavat osaltaan tensori-käsitteen konkretisoimista.

Lähdemme liikkeelle yleisestä vektorista

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3,$$

jossa karteesisen koordinaatiston yksikkövektoreita merkitään nyt tunnuksilla \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 ja \mathbf{e}_3 . Vektorin \mathbf{A} komponentit muuntuvat koordinaatiston kierrossa yhtälön

$$(2.165) \quad A'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}A_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

mukaisesti. A_j eli A_1 , A_2 ja A_3 ovat vektorin komponentit alkuperäisessä koordinaatistossa ja A'_i eli A'_1 , A'_2 ja A'_3 komponentit kierretyssä (pilkutetussa) koordinaatistossa sekä a_{ij} ovat muunnoskertoimet, jotka ovat alkuperäisen koordinaatiston j :nnen akselin ja kierretyn koordinaatiston i :nnen akselin välille syntyvien kulmien kosineja eli suuntakosineja. (*Huom! Kirjan ensimmäisessä painoksessa vuodelta 2003 indeksien tulkinta oli päinvastoin.*) On huomattava, että ei ole tarvetta tarkastella muuta koordinaatistomuunnosta kuin kiertoa, koska translaatioissa eli koordinaatiston yhdensuuntaisiiirroissa vektorin komponentit eivät muutu.

Otamme käyttöön seuraavaksi indeksejä koskevan Einsteinin¹³ summeeraussäännön, jonka mukaan summeeraus (tässä 1:stä 3:een) tehdään sen indeksin suhteen, joka esiintyy kahdesti samassa termissä (monomissa) eli edellä esimerkissämme indeksin i suhteen ja summeerausmerkki \sum jätetään kirjoittamatta. Tämän säännön mukaisesti yhtälö (2.165) kirjoitetaan lyhyemmin

$$(2.166) \quad A'_i = a_{ij}A_j.$$

Skalaari on nollannen kertaluvun tensori, jolla on vain yksi komponentti eli skalaari itse. Vektori on ensimmäisen kertaluvun tensori, jolla on kolme komponenttia.

Toisen kertaluvun tensori T_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) kolmiulotteisessa avaruudessa sisältää yhdeksän komponenttia $T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$ ja T_{33} . Näiden komponenttien on muunnuttava koordinaatiston kierrossa säännön

$$(2.167) \quad T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$$

¹³Albert Einstein (1879–1955), saks.-amerik. fyysikko.

mukaisesti. Summeeraus ulotetaan siis Einsteinin säännön mukaan tässä tapauksessa indeksien k ja l yli.

Indeksien kirjoittamista säätelee Einsteinin summeeraussäännön lisäksi kaksi muuta sääntöä, ns. indeksisääntö ja maksimisääntö. Indeksisäännön mukaan indeksi saa arvot 1, 2, 3, kun indeksi esiintyy termeissä vain kerran. Tällaista indeksiä kutsutaan *vapaaksi*, engl. free. Maksimisäännön mukaan samaa indeksiä ei saa käyttää samassa termissä kuin korkeintaan kahdesti. Tällaista kahdesti esiintyvää ja siis summeerausta tarkoittavaa indeksiä kutsutaan *mykäksi*, engl. dummy. Se voidaan tarvittaessa vaihtaa uuteen, lausekkeessa ennen esiintymättömään indeksiin (samoin luonnollisesti myös vapaa indeksi.). On huomattava, että sinänsä indeksikirjainten valinta on täysin mielivaltainen. Siten esimerkiksi T_{ij} , T_{kl} , T_{mn} , T_{ji} tai kuten edellä T_{kl} esittävät kaikki samaa tensoria. On tietenkin selvää, että kerran tehtyä kirjainvalintaa ei voi saman yhtälön sisällä muuttaa kuin tiettyjä sääntöjä noudattaen.

Huomautus. Tensorien kertaluku määräytyy sen indeksien lukumäärän mukaisesti. Kovarianteissa tensoreissa indeksit kirjoitetaan aina tensorisymbolin alaindeksiksi. On huomionarvoista, että tensorin komponenttien lukumäärä on sama kuin 3 korotettuna kertaluvun osoittamaan potenssiin. Näin ollen esimerkiksi tensorissa kertalukua neljä on $3^4 = 81$ komponenttia. ■

Toisen kertaluvun tensori T_{kl} voidaan esittää kätevästi myös matriisimuodossa

$$(2.168) \quad (T_{kl}) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

On huomattava, että mikä tahansa 3×3 -matriisi ei edusta tensoria. Jotta matriisi vastaa tensoria sen komponenttien eli matriisin alkioiden on muunnuttava koordinaatiston kierrossa yhtälön (2.167) mukaisesti.

Suuntakosinit a_{ij} yhtälössä (2.165) voidaan merkitä myös osittaisderivaattoina:

$$(2.169) \quad a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}.$$

Tämä nähdään esimerkiksi muodostamalla skalaarifunktion, $f = f(x_1, x_2, x_3)$, gradientti sekä alkuperäisessä että pilkutetussa koordinaatistossa. Käyttämällä ketjuderivointisääntöä ja tensorimerkintöjä voimme kirjoittaa

$$(2.170) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x'_3} \frac{\partial x'_3}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j},$$

josta voimme päätellä asettamamme gradientin määrittely-yhtälön (2.81) perusteella sekä esimerkiksi alkuperäisen ja pilkutetun koordinaatiston yksikkövektoreiden pistetuloon perustuvalla tarkastelulla, että termien

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = a_{ij}$$

on oltava samat kuin komponenttien x'_i ja x_j välisten kulmien (x'_i, x_j) kosinit. Täten yhtälö (2.170) saa muodon

$$(2.171) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x'_i},$$

joten gradientin komponentit muuntuvat yhtälön (2.166) mukaisesti. Karteesisessa koordinaatistossa, jonka metriikka siis säilyy koordinaatiston kierroksa, on edelleen voimassa

$$(2.172) \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij},$$

koska kulmat (x_i, x'_j) ja (x'_j, x_i) ovat samoja. Vastaavasti toisen kertaluvun tensorin (2.167) komponenttien muunnoskertoimet eli suuntakosinien tulot voidaan ilmaista muodossa

$$(2.173) \quad a_{ij}a_{kl} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_k}.$$

Tensori T_{ij} on symmetrinen, jos

$$(2.174) \quad T_{ij} = T_{ji}$$

ja antisymmetrinen, jos

$$(2.175) \quad T_{ij} = -T_{ji}.$$

Tensori voidaan aina lausua symmetrisen ja antisymmetrisen tensorin summana

$$(2.176) \quad T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Tensoria, joka säilyttää kaikki komponenttinsa samoina kaikissa koordinaatiston kierroissa, kutsutaan isotrooppiseksi tensoriksi. Seuraavat kaksi isotrooppista tensoria esiintyvät usein monissa tensoritarkasteluissa: Kroneckerin¹⁴ δ -tensori kertaluvultaan kaksi sekä Levi-Civitan¹⁵ ϵ -tensori kertaluvultaan kolme.

¹⁴Leopold Kronecker (1821–1891), saks. matemaatikko.

¹⁵Tullio Levi-Civita (1873–1941), ital. matemaatikko.

Kroneckerin δ -tensori on

$$(2.177) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{kun } i \neq j. \end{cases}$$

Levi-Civitan ϵ -tensori on

$$(2.178) \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{jos } ijk \text{ ovat sykliisiä permutaatioita} \\ & \text{luvuista } 1, 2, 3, \\ -1, & \text{jos } ijk \text{ ovat sykliisiä permutaatioita} \\ & \text{luvuista } 3, 2, 1, \\ 0, & \text{jos kaksi indeksiä ovat samoja.} \end{cases}$$

Edellä esitimme skalaarifunktion gradientin tensorimerkinnöin (2.170). Todettakoon, että derivaattoja sisältäviä tensorimerkintöjä voidaan edelleen lyhentää käyttämällä derivaatalle symbolia $(,)$ (eli pilkku). Näin ollen esimerkiksi funktion f gradientti voidaan merkitä myös muotoon $\partial f / \partial x_i = \partial_i f$ tai vielä lyhyemmin

$$\nabla f = \partial f / \partial x_i = f_{,i}.$$

Tässä kirjassa tarvitsemme myös kahden vektorin A_i ja B_i skalaaritulon tensorimerkintää

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i.$$

Kahden vektorin ristitulon tensorimerkintä voidaan kirjoittaa Levi-Civitan ϵ -tensoria apuna käyttäen

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j,$$

jossa k tarkoittaa ristitulon komponenttia. Edelleen divergenssin tensorimerkintä on

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = F_{i,i}$$

ja roottorin

$$(\nabla \times \mathbf{F})_k = \epsilon_{ijk} F_{k,j}.$$

Laplacen operaattorin tensorimerkintä on

$$\nabla^2 f = f_{,ii}.$$

Kenttäteoriamme tarpeita varten meille riittää edellä oleva johdanto tensoreihin. Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan dyadeja ja tulemme havaitsemaan, että dyadit ja toisen kertaluvun tensorit vastaavat toisiaan täydellisesti.

2.5.2 Dyadit

Vektoritulojen tarkastelun yhteydessä kohdassa 2.2.4 sivulla 11 mainitsimme jo kahden vektorin välisen dyaditulon käsitteen. Dyaditulossa vektorien välillä ei käytetä mitään kertomerkki-symbolia, vaan kirjoitetaan \mathbf{AB} . Dyadituloa ja niistä koostuvia summalausekkeita kutsutaan *dyadeiksi*. Dyadia merkitään tässä esityksessä kirjain-symbolilla, jonka päällä on kaksoisviiva

$$(2.179) \quad \overline{\overline{\mathbf{D}}} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i\mathbf{B}_i.$$

Dyaditulo ei ole vaihdannainen, toisin sanoen yleensä $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Dyadeille ovat voimassa osittelulait:

$$(2.180) \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC},$$

$$(2.181) \quad (\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

Lisäksi on voimassa skalaaritekijän (p) siirtosääntö

$$(2.182) \quad p(\mathbf{AB}) = (p\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(p\mathbf{B}).$$

Osittelulakien perusteella voidaan siis kahden vektoripolynomin dyaditulo muodostaa jäsenittäin kertomalla pitämällä dyadituloa kahden vektorin tavallisena tulona, jonka kertomerkki jätetään vain merkitsemättä ja huolehtimalla tekijävektoreiden järjestyksen säilyttämisestä.

Dyadi on luonteeltaan operaattori, joka kohdistetaan johonkin vektorifunktioon tai johon kohdistetaan jokin vektorifunktio. Kohdistaminen tarkoittaa kertolaskua. Olkoon dyadi \mathbf{AB} ja vektori \mathbf{C} . Näillä merkinnöillä kertominen voidaan tehdä useilla tavoin:

$$(2.183) \quad \mathbf{C} \cdot (\mathbf{AB}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B},$$

$$(2.184) \quad \mathbf{C} \times (\mathbf{AB}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\mathbf{B},$$

$$(2.185) \quad (\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}),$$

$$(2.186) \quad (\mathbf{AB}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

Kuten huomaamme vektorin pistetulossa dyadin kanssa tai kääntäen tuloksena on vektori. Vektorin ristitulossa dyadin kanssa tai kääntäen tuloksena on dyadi.

Dyadi \mathbf{AB} voidaan kohdistaa myös toiseen dyadiin \mathbf{CD} kaksoiskertolaskuilla, jotka määritellään seuraavasti:

$$(2.187) \quad (\mathbf{AB}) : (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}),$$

$$(2.188) \quad (\mathbf{AB}) \times (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \times \mathbf{D}),$$

$$(2.189) \quad (\mathbf{AB}) \cdot (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}),$$

$$(2.190) \quad (\mathbf{AB}) \times (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \times \mathbf{D}).$$

Havaitsemme, että kaksoispistetulo (\cdot) tuottaa skalaarin, kaksoisristitulo (\times) tuottaa dyadin, sekä risti-pistetulo (\times) ja piste-ristitulo ($\dot{\times}$) tuottavat vektorin.

Jos yhtälössä (2.179) tekijävektoreiden kertomisjärjestys vaihdetaan, saadaan dyadin $\overline{\overline{D}}$ liitto- eli konjugaattidyadi

$$(2.191) \quad \overline{\overline{D}}^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i.$$

Helposti on todettavissa, että mielivaltaiselle vektorifunktiolle \mathbf{F} on aina voimassa

$$(2.192) \quad \overline{\overline{D}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \overline{\overline{D}}^T.$$

Symmetrinen dyadi on dyadi, jolle pätee $\overline{\overline{D}}^T = \overline{\overline{D}}$. Antisymmetriselle dyadille pätee $\overline{\overline{D}}^T = -\overline{\overline{D}}$. Symmetristen dyadien joukossa on erityisasemassa *yksikködyadi*

$$(2.193) \quad \overline{\overline{I}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Yksikködyadille on voimassa yhtälön (2.192) mukaan

$$(2.194) \quad \overline{\overline{I}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \overline{\overline{I}} = \mathbf{F}$$

ja

$$(2.195) \quad \overline{\overline{I}} \times \mathbf{F} = \mathbf{F} \times \overline{\overline{I}},$$

joka on samalla antisymmetrinen dyadi.

Toisen kertaluvun tensorin ja dyadin vastaavuus

Olkoon karteesisen koordinaatiston vektorit

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = B_1 \mathbf{e}_1 + B_2 \mathbf{e}_2 + B_3 \mathbf{e}_3.$$

Tällöin niiden avulla muodostettu dyadi

$$(2.196) \quad \begin{aligned} \overline{\overline{D}} = \mathbf{A}\mathbf{B} &= A_1 B_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + A_1 B_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + A_1 B_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &+ A_2 B_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + A_2 B_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + A_2 B_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &+ A_3 B_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + A_3 B_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + A_3 B_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

on dyadimuotoinen esitys toisen kertaluvun tensorille

$$(2.197) \quad D_{ij} = A_i B_j.$$

Jotta D_{ij} todella ovat tensorin komponentteja, niiden on muunnuttava koordinaatiston kierrossa tensoriyhtälön

$$(2.198) \quad D'_{ij} = a_{ik} a_{jl} D_{kl}$$

mukaisesti.

Huomaamme, että dyadit ja toisen kertaluvun tensorit vastaavat muodoltaan toisiaan. Yhtälön (2.197) esittämä tensori on dyadikannassa esitettynä yhtälön (2.196) mukainen. Näin ollen voimme esitystavasta riippuen valita jommankumman.

On huomattava, että dyadit voidaan ilmaista myös kolmen vektorin \mathbf{D}_1 , \mathbf{D}_2 ja \mathbf{D}_3 avulla

$$(2.199) \quad \overline{\overline{D}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{D}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{D}_3,$$

missä

$$(2.200) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= D_{11} \mathbf{e}_1 + D_{12} \mathbf{e}_2 + D_{13} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{D}_2 &= D_{21} \mathbf{e}_1 + D_{22} \mathbf{e}_2 + D_{23} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{D}_3 &= D_{31} \mathbf{e}_1 + D_{32} \mathbf{e}_2 + D_{33} \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$(2.201) \quad \mathbf{D}_j = D_{ji} \mathbf{e}_i.$$

Konjugaattidyadi on tällöin

$$(2.202) \quad \overline{\overline{D}}^T = \mathbf{D}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{D}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{D}_3 \mathbf{e}_3.$$

Dyadit ja nabla-operaatiot

Kaikki jo aiemmin vektorifunktiolle esittämämme nabla-operaatiot ja nabla-säännöt ovat mukauttaen voimassa myös dyadeille. Näin ollen esimerkiksi saamme suoraan dyadin divergenssin

$$(2.203) \quad \nabla \cdot \overline{\overline{D}} = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \cdot \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_3}$$

ja dyadin roottorin

$$(2.204) \quad \nabla \times \overline{\overline{D}} = \mathbf{e}_1 \times \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \times \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \times \frac{\partial \overline{\overline{D}}}{\partial x_3}.$$

Huomaamme, että dyadin divergenssi on vektori ja dyadin roottori on dyadi.

Muodostamme seuraavaksi vektorifunktion \mathbf{F} gradientin vastaavalla tavalla kuin skalaarifunktionkin kohdalla. Toisin sanoen voimme kirjoittaa

$$(2.205) \quad \nabla \mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_3}.$$

Vektorin gradientti on siis luonteeltaan dyadi. Monissa yhteyksissä tarvitsemme paikkavektorin

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

gradienttia

$$(2.206) \quad \nabla \mathbf{r} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = \bar{\bar{I}}$$

eli saamme yksikködyadin.

Kaavassa (2.113) esitimme vektorin $\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$ kehityskaavan. Dyadeja apuna käyttäen tämä kaava voidaan esittää myös muodossa

$$(2.207) \quad \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\nabla \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} + (\nabla \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}.$$

Tämä kehityskaava vastaa muodoltaan 'tulon derivoimissääntöä'. Vastaavanlainen kehityskaava saadaan myös dyadille $\nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$

$$(2.208) \quad \nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \mathbf{F}) \times \mathbf{G} - (\nabla \mathbf{G}) \times \mathbf{F},$$

missä jälkimmäisen termin ristitulon tekijöiden järjestystä on vaihdettu, jolloin etumerkki vaihtuu.

Toteamme vielä, että myös Gaussin (2.95) ja Stokesin (2.102) lauseet voidaan yleistää koskemaan dyadeja.

Huomautus 1. Lukijalle lienee valjennut, että dyadeista seuraava operaattori on *triadi*, jossa on kysymys kolmen vektorin tulosta. Triadit vastaavat puolestaan kolmannen kertaluvun tensoreita. Triadeista seuraavat olisivat *tetradit*, jotka vastaavat neljännen kertaluvun tensoreita jne. Näitä emme kuitenkaan tarvitse kenttäteoriamme oppirakennelmassa. ■

Huomautus 2. Tensori- ja dyadiformalismia pidetään jo ehkä hieman vanhahtavana. Kysymyksessähän on itse asiassa lineaarialgebrassa opittujen lineaarimuunnosten ja bilineaarimuotojen toisenlainen esitystapa. Vektori- ja tensorilaskenta voidaan yhdistää myös ns. *multivektorialgebrassa*, jota käyttäen kenttäteorian formalismi saisi vain erilaisen esitysmuodon. Tässä esityksessä emme kuitenkaan sovelle multivektorianalyysiä. Dyadiformalismin käyttö on kuitenkin kenttäteoriassa eräissä kohdin tarkoituksenmukaista esitystavan lyhentämiseksi. ■

Huomautus 3. Edellä olevat vektoreita ja dyadeja koskevat tarkastelut tehtiin reaalille skalaari- ja vektorifunktioille. Tarkastelut voidaan laajentaa ongelmitta koskemaan myös kompleksisia skalaari- ja vektorifunktioita. ■

2.6 Erikoisfunktiot ja sarjaoppi

Kenttäteoreettisten ongelmien ratkaiseminen palautuu useimmiten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen. Esityksessämme tarkastelemme osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemista ns. muuttujien erottelumenetelmällä. Tässä menetelmässä osittaisdifferentiaaliyhtälö hajotetaan kutakin muuttujaa koskevaksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi, joita on siis yhtä monta kuin muuttujia osittaisdifferentiaaliyhtälössä. Menetelmä ei ole yleispätevä, mutta toimii eräissä tärkeissä pallo- ja sylinterisymmetrisissä tapauksissa.

Muuttujien erottelussa saatavat tavalliset differentiaaliyhtälöt eivät puolestaan aina ratkea alkeisfunktioiden ja niistä koostuvien funktioiden, toisin sanoen rationaali-, eksponentti-, trigonometrinen ja hyperbolisten tai näiden käänteisfunktioiden, avulla, vaan ratkaisuisissa tarvitaan *erikoisfunktioita*. Tutustumme seuraavaksi *Legendren* polynomeihin, *Besselin* funktioihin ja eräisiin muihin erikoisfunktioihin hieman lähemmin. Ennen kuin menemme näihin erikoisfunktioihin, palautamme mieliin kuitenkin muutamia tärkeitä sarjaopillisia asioita.

2.6.1 Taylorin sarja

Funktio $f(x)$ voidaan kehittää Taylorin¹⁶ sarjaksi kohdassa eli kehityskeskuksessa $x = a$

$$(2.209) \quad f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f''(a) + \dots \\ + \frac{(x - a)^{n-1}}{(n - 1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n.$$

Funktion approksimointi onnistuu Taylorin kaavalla, jossa sarja (2.209) katkaistaan jostakin $(n - 1)$:n arvosta ja jäännöstermin suuruutta arvioidaan ns. Lagrangen¹⁷ jäännöstermillä

$$(2.210) \quad R_n = \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

missä $a \leq \xi \leq x$. Jos funktio $f(x)$ on sellainen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

saamme Taylorin sarjaksi

$$(2.211) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

¹⁶Brook Taylor (1685–1731), engl. matemaatikko.

¹⁷Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), ital.-ransk. matemaatikko.

Jos kehityskeskukseksi on origo ($a = 0$), kutsutaan sarjaa (2.211) Maclaurinin¹⁸ sarjaksi:

$$(2.212) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

On huomattava, että edellä on oletettava funktion f olevan jatkuvasti derivoituva kertalukuun n asti.

2.6.2 Binomiteoreema

Binomiteoreema on suora sovellus Taylorin tai Maclaurinin sarjakehitelmille. Saamme soveltamalla Maclaurinin sarjakehitelmää funktiolle $f(x) = (1+x)^m$

$$(2.213) \quad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + R_n,$$

missä jäännöstermi $R_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$ ja $-1 < x < 1$ eli $|x| < 1$. Kun m on positiivinen kokonaisluku ($m \in \mathbb{N}$), binomiteoreemalle käytetään usein esitysmuotoa

$$(2.214) \quad (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{n!(m-n)!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}x^n.$$

On huomattava, että (2.213) on voimassa myös, kun m on mikä tahansa positiivinen tai negatiivinen rationaaliluku, vieläpä, kun $m \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Edellä esitimme sarjat päättymättöminä sarjoina, toisin sanoen summeeraus ulotettiin äärettömyyteen. Itse asiassa binomiteoreema (2.214) voitaisiin esittää hieman yleisemmällekin funktiolle $(a+x)^m$, $a > 0$ ja samalla ulottaa summeeraus vain astelukuun m , ($m \in \mathbb{N}$), koska sitä korkeammat termit ovat nollija

$$(2.215) \quad (a+x)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n}a^{m-n}x^n.$$

Tällöin kysymyksessä on Maclaurinin *polynomi* astetta m . ■

¹⁸Colin Maclaurin (1698–1746), skotl. matemaatikko.

2.6.3 Legendren polynomit

Legendren¹⁹ differentiaaliyhtälön

$$(2.216) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

ratkaisuja ovat *Legendren polynomit astetta n* , kun n on nolla tai positiivinen kokonaisluku eli $n \in \mathbb{N}$. Nämä polynomit saadaan seuraavasti:

$$(2.217) \quad P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n - 2m)!}{2^m m! (n - m)! (n - 2m)!} x^{n-2m} \\ = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n - 2)!}{2^n 1! (n - 1)! (n - 2)!} x^{n-2} + \dots,$$

missä $M = n/2$ tai $(n - 1)/2$ riippuen kumpi näistä on kokonaisluku. Sijoittamalla lausekkeeseen (2.217) eri n :n arvoja, saamme mm. seuraavat polynomit:

$$(2.218) \quad \begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{aligned}$$

Legendren polynomeille pätee ($n \in \mathbb{N}$)

$$(2.219) \quad P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_{2n+1}(0) = 0.$$

Kuvassa 2.21 on esitetty kuusi ensimmäistä Legendren polynomia.

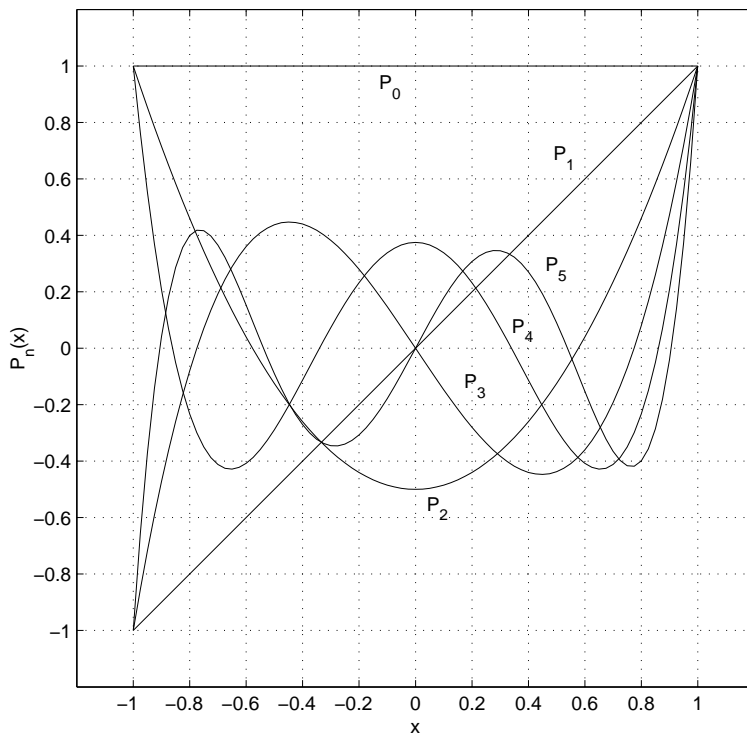
Jos sovelletaan binomiteoreemaa funktioon $(x^2 - 1)^n$ ja derivoidaan n kertaa termeittäin, voidaan johtaa ns. Rodriguesin²⁰ kaava, jonka mukaan Legendren polynomit ovat

$$(2.220) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

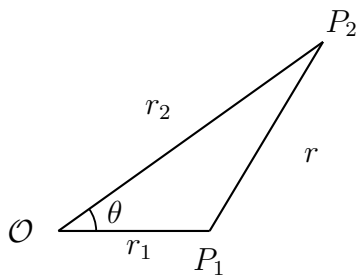
Tietyissä potentiaaliteoreettisissa tarkasteluissa tarvitaan kahden pisteen P_1 ja P_2 välisen etäisyyden r käänteisarvon $1/r$ sarjakehitelmää Legendren polynomeja hyväksikäyttäen. Merkitään kuvan 2.22 mukaisesti pisteen P_1 paikkavektoria \mathbf{r}_1 :llä, ($\mathcal{O}P_1 = r_1$) ja vastaavasti P_2 :n paikkavektoria \mathbf{r}_2 :lla ($\mathcal{O}P_2 = r_2$), jolloin $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ eli vektori P_1 :stä P_2 :een ($P_1P_2 = r$). Paikkavektoreiden välinen kulma olkoon θ . Tällöin käyttäen laajennettua Pythago-

¹⁹Adrien-Marie Legendre (1752–1833), ransk. matemaatikko.

²⁰Olinde Rodrigues (1794–1851), ransk. matemaatikko ja taloustieteilijä.



Kuva 2.21: Legendren polynomit P_0, P_1, \dots, P_5 .



Kuva 2.22: Funktion $1/r$ kehittäminen Legendren polynomien avulla.

raan teoremaa on voimassa

$$(2.221) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n,$$

jossa jälkimmäinen muoto pätee, kun $r_2 > r_1$, kuten kuvassa 2.22. Jos taas

$r_1 > r_2$, täytyy kehittää esittää muodossa

$$(2.222) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n,$$

jotta sarja suppenee. Tässä yhtälössä käytetään siis merkintää $x = \cos \theta$.

2.6.4 Besselin funktiot

Besselin²¹ differentiaaliyhtälön

$$(2.223) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

missä parametri $\nu \geq 0$ on tunnettu reaaliluku, ratkaisut ovat *ensimmäisen lajin Besselin funktioita astetta ν*

$$(2.224) \quad J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

Yhtälössä (2.224) esiintyy gammafunktio, Γ , joka määritellään lausekkeena

$$(2.225) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

missä $\alpha > 0$. Γ -funktion tärkeitä ominaisuuksia ovat

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\alpha + 1) &= \alpha \Gamma(\alpha) \\ \Gamma(k + 1) &= k!, \quad \text{kun } k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Jos ν on kokonaisluku n ($n \geq 0$), ensimmäisen lajin Besselin funktiot voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.226) \quad J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n + m)!}.$$

Besselin differentiaaliyhtälön (2.223) yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$(2.227) \quad y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x),$$

²¹Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846), saks. matemaatikko ja tähtitieteilijä.

kun ν ei ole kokonaisluku (c_1 ja c_2 ovat vakioita). Jos $\nu=n$ eli ν on kokonaisluku, pätee

$$(2.228) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Kun $\nu = n = 0$, Besselin differentiaaliyhtälö (2.223) saa silloin muodon

$$(2.229) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

Tämän yhtälön toinen ratkaisu on *toisen lajin Besselin funktio astetta 0* tai toiselta nimeltään *Neumannin*²² *funktio astetta 0*:

$$(2.230) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right],$$

missä $\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s$, kun $s \rightarrow \infty$, ($\gamma \approx 0,57721566490$) on Eulerin²³ vakio ja

$$h_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}.$$

Yleiselle n :lle toisen lajin Besselin funktio on

$$(2.231) \quad Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m - h_{m+n})}{2^{2m+n} m! (m+n)!} x^{2m} \\ - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m},$$

missä $x > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ja $h_0 = 0$ sekä $h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s}$, ($s = 1, 2, \dots$). Kun $n = 0$, yhtälön (2.231) viimeinen termi tulee asettaa nolaksi, jotta saamme yhtälön (2.230) mukaisen lausekkeen. Edelleen on voimassa

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

Yleiselle toisen lajin Besselin funktiolle astetta ν pätee

$$(2.232) \quad Y_\nu = \frac{1}{\sin \nu\pi} (J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) \\ Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x).$$

Tämä funktio tunnetaan myös nimellä Neumannin funktio astetta ν .

Besselin differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.233) \quad y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x),$$

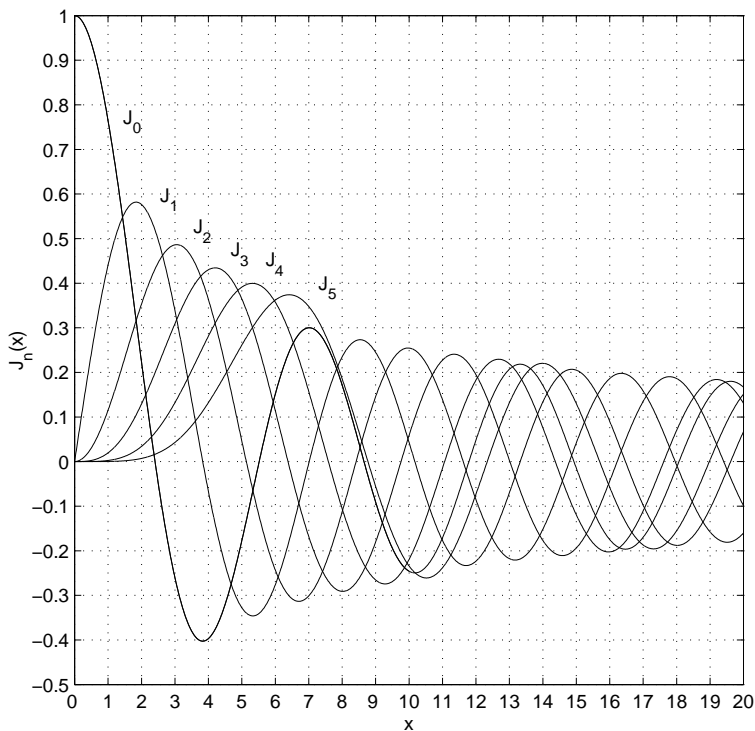
missä C_1 ja C_2 ovat vakioita.

²²Carl Neumann (1832–1925), saks. matemaatikko ja fyysikko.

²³Leonhard Euler (1707–1783), sveits. matemaatikko.

Kuvassa 2.23 on esitetty ensimmäisen lajin Besselin funktiot J_0 , J_1 , J_2 , J_3 , J_4 ja J_5 . Kuten huomaamme, Besselin funktiot ovat oskilloivia funktioita eli muistuttavat tältä osin sin- ja cos-funktioita, mutta ne eivät ole jaksollisia eli periodisia funktioita eikä niiden amplitudi ole vakio. Trigonometriset funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ voidaan kylläkin lausua ensimmäisen lajin Besselin funktioiden avulla seuraavasti:

$$(2.234) \quad \begin{aligned} \sin x &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(x), \\ \cos x &= J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x). \end{aligned}$$

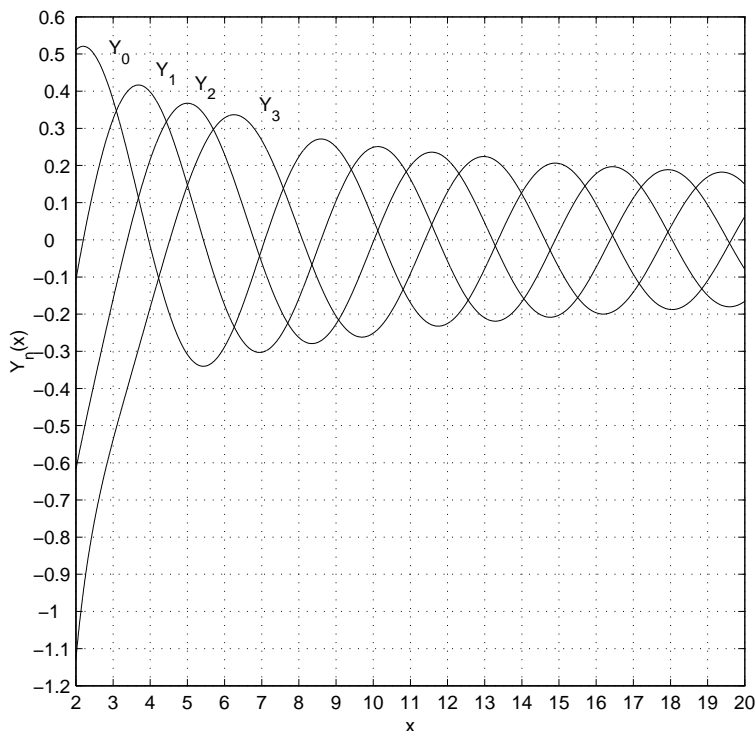


Kuva 2.23: Ensimmäisen lajin Besselin funktiot J_0 , J_1 , J_2 , J_3 , J_4 ja J_5 .

Kuvassa 2.24 on esitetty toisen lajin Besselin funktiot Y_0 , Y_1 , Y_2 ja Y_3 . Huomaamme, että myös toisen lajin Besselin funktiot ovat oskilloivia.

Tietyissä tarkasteluissa on tarpeen ilmaista $1/r$ -muotoa oleva lauseke siten, että se sisältää jonkin Besselin funktion. Yksi käyttökelpoinen kaava tämänkaltaisissa tehtävissä on seuraava epäoleellinen integraali:

$$(2.235) \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0.$$



Kuva 2.24: Toisen lajin Besselin funktiot Y_0 , Y_1 , Y_2 ja Y_3 .

Tämä tunnetaan myös nimellä Lipschitzin²⁴ integraali-identiteetti. Valitsemalla a ja b sopivasti voidaan Lipschitzin identiteetin avulla ilmaista esimerkiksi sylinterikoordinaatiston paikkavektorin (2.41) pituuden käänteisarvo muodossa

$$(2.236) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

missä λ on integrointimuuttuja ja $z > 0$.

Huomautus 1. Besselin toisen lajin funktio on epäjatkuva kohdassa $x = 0$. Toisen lajin funktio käyttäytyy pienillä $x > 0$ arvoilla kuten funktio $\ln x$. Ensimmäisen lajin Besselin funktioissa kaikissa kertaluvuissa esiintyvät sarjat suppenevat aina kaikilla x :n arvoilla. Sen sijaan toisen lajin Besselin funktiot on määriteltykin vain, kun $x > 0$. Besselin funktioiden arvot ovat taulukoituja tai laskettavissa esim. Matlab-ohjelmalla. ■

Huomautus 2. Legendren polynomit kuten myös Besselin funktiot ovat

²⁴Rudolf Lipschitz (1832–1903), saks. matemaatikko.

ortogonaalisia funktioita. Funktioiden $g_m(x)$ ja $g_n(x)$ ortogonaalisuuden selvittämiseksi jollakin välillä $a \leq x \leq b$ määritetään integraali

$$(2.237) \quad \int_a^b g_m(x)g_n(x) dx.$$

Jos tämä on nolla, kun $m \neq n$, funktioiden g_m ja g_n sanotaan olevan ortogonaalisia. ■

Huomautus 3. On olemassa vielä ns. modifioituja Besselin funktioita ja Legendren polynomeja. Joissakin sovelluksissa on tarpeen myös määritellä reaaliuuttujan kompleksiarvoisia Besselin funktioita, jolloin puhutaan kolmannen lajin Besselin funktioista ja Hankelin funktioista. ■

Huomautus 4. Erilaisia erikoisfunktioita on olemassa hyvin suuri määrä. Erikoisfunktiot ovat perinteisesti muodostaneet matemaattisten luonnontieteiden, kuten matemaattisen fysiikan ja teknisten tieteiden tärkeän osa-alueen, jonka opiskeluun on käytetty huomattavia voimavaroja. Koska nykyään probleemit useimmiten ratkaistaan tietokoneella numeerisesti, erikoisfunktioiden käytännön osaamisen merkitys on vähentynyt, tietenkin lukuun ottamatta analyyttisesti ratkaistavia problemeja. ■

Luku 3

Sähköstatiikka

Sähkömagnetismi jaetaan perinteisesti kahteen pääosaan: (1) ajasta riippumattomiin kenttiin eli staattiseen kenttäteoriaan ja (2) ajasta riippuviin kenttiin eli dynaamiseen kenttäteoriaan. Staattiseen kenttäteoriaan kuuluvat sähköstatiikka, sähkövirtausstatiikka eli stationaariset sähkövirrat ja magneto-statiikka. Dynaamiseen kenttäteoriaan eli sähködynamiikkaan kuuluvat sähkömagneettinen induktio, sähkömagneettiset aallot ja sähkömagneettinen säteily. Noudatamme myös tässä esityksessä tätä jaottelua.

Toteamme toistaiseksi ilman perustelua, että koko sähkömagneettinen kenttäteoria voidaan esittää tiivistetysti ns. Maxwellin¹ yhtälöiden avulla:

$$(3.1) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$(3.2) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$(3.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$(3.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Yhtälöissä esiintyvät kenttäsuureet ovat sähkökentän voimakkuus \mathbf{E} , lyhyesti ”sähkökenttä”, magneettivuon tiheys \mathbf{B} , sähkövuon tiheys \mathbf{D} ja magneettikentän voimakkuus \mathbf{H} , lyhyesti ”magneettikenttä”. Lisäksi kenttien lähteinä ovat avaruusvaraustiheys ρ ja sähkövirran voimakkuuden tiheys \mathbf{J} , lyhyesti virrantiheys. Maxwellin yhtälöt ovat yleisesti päteviä aksiomia. Onkin hyvä ymmärtää, että sähkömagnetismin esityksemme on viime kädessä näiden

¹James Clerk Maxwell (1831–1879), skotlantilainen matemaatikko ja fyysikko.

yhtälöiden ja niissä olevien kenttäsuureiden tarkastelua ja ratkaisemista erilaisissa tilanteissa. Jotta kentät pystytään ratkaisemaan näistä yhtälöistä, tarvitaan lisäksi väliaine- eli konstitutiivisia yhtälöitä sekä ratkaisualueen reunoihin ja rajapintoihin liittyviä ehtoja.

Tässä esityksessä emme kuitenkaan lähde liikkeelle suoraan Maxwellin yhtälöistä, vaan esityksemme perustuu tiettyihin kokeellisiin vuorovaikutuslakeihin, joiden avulla päädyimme Maxwellin yhtälöiden esittämään formalismiin.

Aloitamme tarkastelumme sähköstatiikasta. Sähköstatiikan perusoletus on, että sähkökentän lähteet eli varaukset pysyvät paikoillaan eli ovat levossa ja että ne ovat ajan suhteen muuttumattomia. Kuten jo todettiin, voisimme ottaa lähtökohdaksi edellä esitetyt Maxwellin yhtälöt ja asettaa niissä olevat aikaderivaatat nolliksi, jolloin saamme sähköstatiikan perusyhtälöt. Koska tämä lähestymistapa ei ole kovin havainnollinen perusteita käsittelevässä esityksessämme, otamme lähtökohdaksi sähköstaattisen kokeellisen ilmiömaailman. Osoittautuu, että sähköstatiikan tarjoama ajatusmalli on approksimatiivisesta luonteestaan huolimatta erittäin käyttökelpoinen jopa eräissä sähködynamiikan piiriin kuuluvissa probleemeissa, kun kentän ajallinen muuttuminen on riittävän hidasta. Tällaiset ns. kvasistaattiset tilanteet ovat myös geofysiikan sovelluksissa tärkeitä.

Tarkastelemme sähköstatiikkaa kahdessa tilanteessa. Aluksi oletamme, että varaukset ovat tyhjiössä. Sen jälkeen sijoitamme avaruuteen ainekappaleita ja ainerajapintoja ja katsomme, mitä siitä seuraa.

3.1 Sähköstatiikan kenttäyhtälöt tyhjiössä

3.1.1 Coulombin laki

Sähköstatiikan kokeellinen perusta on *Coulombin*² laissa, jonka mukaan kahden pistemäisen varauksen q_1 ja q_2 välillä vaikuttaa voima, jonka suuruus on suoraan verrannollinen varausten tuloon ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön. Voiman vaikutussuora on varausten kautta kulkeva suora. Jos varaukset ovat samanmerkkisiä, voima on poistovoima. Jos varaukset ovat erimerkkisiä, voima on vetovoima. Matemaattisesti Coulombin laki voidaan ilmaista muodossa

$$(3.5) \quad \mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^0,$$

²Charles Augustin de Coulomb (1736–1806), ransk. insinööri.

missä \mathbf{F}_1 on varaukseen q_1 kohdistuva voima, r_{12} varausten välinen etäisyys, \mathbf{r}_{12}^0 yksikkövektori, joka osoittaa vaikutussuoran suunnan varauksesta q_2 varaukseen q_1 . Verrannollisuuskerroin $1/4\pi\epsilon_0$ on valitusta suureiden yksikköjärjestelmästä riippuva kerroin. Käytämme tässä esityksessä kansainvälistä SI (Système International)-yksikköjärjestelmää. Kerroin ϵ_0 on sähkövakio eli tyhjiön permittiivisyys ja sen lukuarvo on $\epsilon_0 = 8,854188 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$. Tarvittaessa merkitään tässä kirjassa suureen yksikkö laittamalla suureen symboli hakasulkuihin []. Yhtälössä (3.5) varauksen yksikkönä on coulombi eli $[q] = \text{C}$, voiman yksikkönä newton $[F] = \text{N}$ sekä etäisyyden yksikkönä metri $[r] = \text{m}$. Coulombin lakiin varaukset sijoitetaan etumerkkeineen. Lisäksi on huomattava, että varaus q_1 aiheuttaa varaukseen q_2 voiman, jonka suuruus on $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$, koska $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$.

Coulombin laki on siis kokeellinen havainto. Kokeellinen havainto on myös se, että useamman varauksen voimavaikutus johonkin varaukseen q_i on laskettavissa superpositioperiaatteella eli kunkin varauksen voimavaikutus voidaan laskea erikseen ikäänkuin muita varauksia ei olisi ja lopulta vektorio- pillisesti summeerata voimavaikutukset resultantti- eli kokonaisvoiman määrittämiseksi:

$$(3.6) \quad \mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^N \frac{q_j \mathbf{r}_{ij}}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}^3}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j,$$

missä summeeraus on ulotettava kaikkien varausten (N kpl) yli paitsi i :n, johon kohdistuvaa voimaa \mathbf{F}_i lasketaan.

On syytä painottaa, että yhtälön (3.6) esittämä voimavaikutuksen laskenta on nimenomaan *kokeellinen* asia. Se, että voimme sähkömagnetismissä käyttää vektorianalyysiä on vaatinut kokeellisen varmennuksen. Mitään itses- tään selvää oikeutusta vektorianalyysin käyttämiselle ei suoraan ole olemassa. Superpositioperiaate on ilmentymä kenttäteorian lineaarisuudesta.

Sillä, että sähköstaattinen voima on kääntäen verrannollinen juuri va- rausten välisen etäisyyden *neliöön*, on ratkaiseva merkitys kenttäteorian ma- temaattisen oppirakennelman kehittämisessä, kuten tulemme huomaamaan. Historiallisesti on mielenkiintoista, että Coulombin omien kokeiden mukaan etäisyyden eksponentin arvon olisi voinut valita väliltä $[1, 8 \dots 2, 2]$. Viime aikaiset tutkimukset ovat osoittaneet, että eksponentti poikkeaa kakkosesta korkeintaan $3 \cdot 10^{-16}$.

Coulombin laki on pätevä edellä esitettyssä muodossa pistemäisille varauk- sille. Tarkastellessamme makroskooppisia systeemejä pistemäisyys on ym- märrettävä suhteessa fysikaalisen systeemin muihin dimensioihin, toisin sa- noen pistemäisenä voidaan pitää kappaletta, jonka mitat esim. tarkastelue-

täisyyksiin nähden ovat pienet. Toisaalta Coulombin lain on todettu pätevän myös atomaaristen partikkelien, protonien ja elektronien, välillä.

3.1.2 Varausjakaumat

Pistemäisiksi ajatellut varaukset voivat jakautua avaruudessa johonkin tilavuuteen, pinnoille tai viivoille. Nämä varausjakaumat johtavat tärkeisiin skalaarisiin varaustiheysfunktioihin. Tilavuusvaraus- eli avaruusvaraustiheys

$$(3.7) \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

Pintavaraustiheys

$$(3.8) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$$

ja vastaavasti viivavaraustiheys

$$(3.9) \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}.$$

Avaruusvaraustiheyden yksikkö on $[\rho] = \text{C}/\text{m}^3$, pintavaraustiheyden $[\sigma] = \text{C}/\text{m}^2$ ja viivavaraustiheyden $[\lambda] = \text{C}/\text{m}$. Varaustiheysfunktiot riippuvat staattisessa kenttäteoriassa vain paikasta eli ovat vektorimuuttujan skalaariarvoisia funktioita, toisin sanoen $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ ja $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$. Tiheysfunktioissa esiintyvät raja-arvot on ymmärrettävä muodostaa 'fysiikan hengessä', toisin sanoen elementeissä ΔV , ΔS ja Δl on oltava koko raja-arvoprosessin ajan 'riittävästi' varauksia, jotta raja-arvomerkinnot ovat mielekkäitä.

Pistevaraus voidaan ilmaista kätevästi Diracin δ -funktion avulla, jolloin pisteessä \mathbf{r}_i oleva pistevaraus vastaa jatkuvaa avaruusvaraustiheyttä

$$(3.10) \quad \rho_i(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

Materiaassa on sekä positiivisia että negatiivisia varauksia, kuten elektroneja, protoneja ja ioneja (kationeja ja anioneja). Neutraalissa materiaalissa on suunnilleen sama määrä positiivista ja negatiivista varausta. Edellä määritellyt varaustiheydet koskevat materian ylimääräistä eli *nettovarausta*, kun materiaa tarkastellaan makroskooppisesti.

3.1.3 Sähkökenttä

Coulombin laki (3.5) ilmaisee voimavaikutuksen kahden varauksen välillä. Kyse on siis fysikaalisesta *voimakentästä*. Coulombin laki on sähköstatiikan

vuorovaikutuslaki, ja siihen perustuen on tarkoituksenmukaista määritellä uusi kenttäsuure, nimeltään *sähkökentän voimakkuus*, joka ilmaisee voimavaikutuksen suuruuden pientä testivarausta kohden. Testivarausten on oltava niin pieni, että se ei muuta millään tavoin itse alkuperäistä voimakenttää. Sähkökentän voimakkuuden symbolinen määritelmä voidaan kirjoittaa täten muotoon

$$(3.11) \quad \mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_q}{q},$$

jossa \mathbf{E} on sähkökentän voimakkuus, \mathbf{F}_q testivaraukseen q kohdistuva voima.

Sähkökentän voimakkuuden määrittely-yhtälöstä näemme, että kentän yksikkö on $[\mathbf{E}] = \text{N/C}$. Sähkökentän voimakkuudelle voidaan johtaa useita muitakin yksikköjä. Yksi useimmiten esiintyvä on V/m .

Huomautus. Tässä kirjassa käytetään yleistä käytäntöä, jonka mukaan *sähkökentän voimakkuutta* kutsutaan lyhyesti *sähkökentäksi*, vaikkakin, olaksemme tarkkoja, sähkökenttä on fysikaalinen kenttä, jonka luonnehtimiseen käytetään sähkökentän voimakkuutta. ■

Jos tunnemme avaruudessa olevat pistevaraukset (N kpl) suuruudeltaan (q_i) ja sijainniltaan (\mathbf{r}_i), johonkin tilavuuteen tai joihinkin tilavuuksiin jakautuneet avaruusvaraukset $\rho = \rho(\mathbf{r}')$, pinnalle tai pinnoille jakautuneet pintavaraukset $\sigma = \sigma(\mathbf{r}')$ sekä vielä viivalle tai viivoille jakautuneet viivavaraukset $\lambda = \lambda(\mathbf{r}')$, voimme suoraan superpositioperiaatetta soveltaen kirjoittaa laskukaavan sähkökentän voimakkuudelle eli ”sähkökentälle” kenttäpisteessä \mathbf{r}

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \lambda(\mathbf{r}') dl'. \end{aligned}$$

Edellä integroinnit kattavat kaikki tilavuudet V , pinnat S ja viivat L . Useimmiten kaavassa (3.12) on tilanteesta riippuen mukana vain jokin tai joitakin termejä. Se on esitetty tässä varsin yleisessä muodossa.

Kaavasta (3.12) käy ilmi myös käyttämämme merkintätapa, jossa laskentapistettä (eli kenttäpistettä) tai yleisemmin laskenta-aluetta merkitään ilman pilkkua olevalla symbolilla \mathbf{r} ja lähdepistettä (eli varauspistettä) tai yleisemmin lähdealuetta merkitään pilkuttetulla symbolilla \mathbf{r}' . Integrointimuuttujina ovat pilkuttetut muuttujat/koordinaatit.

Sähkökentän määrittely-yhtälön (3.11) avulla voimme laskea myös voiman, jonka kenttä kohdistaa siihen tuotuun pistemäiseen varaukseen q

$$(3.13) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Jos pistemäisen varauksen sijasta on jokin varausjakauma $\rho(\mathbf{r}')$, niin differentiaaliseen varausalkioon $\rho(\mathbf{r}')dV'$ kohdistuu voima, jonka suuruus on

$$(3.14) \quad d\mathbf{F}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') dV'$$

ja josta integroimalla lähdealueen yli saadaan kokonaisvoima

$$(3.15) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \int_V \rho(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}') dV'.$$

Varaukseen kohdistuvan voiman laskennassa on huomattava, että se edellä lasketaan lähdealueessa olevassa pisteessä \mathbf{r}' , jossa varaus tai varausalkio sijaitsee ja jossa sähkökentän voimakkuus on $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$. Koska laskenta-alue ja lähdealue ovat tässä samat, voitaisiin pilkutettujen muuttujien sijasta käyttää myös ilman pilkkua olevia muuttujia. Usein voimalaskuissa käytetään voimatiheyttä \mathbf{f} (yksikkö $[\mathbf{f}] = \text{N/m}^3$)

$$(3.16) \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{r}')}{dV'} = \rho(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}').$$

Sähkökentän laskentakaavassa (3.12) voidaan itse asiassa piste-, pinta- ja viivavarausjakaumat redusoida sopivien Diracin δ -funktioiden avulla avaruusvarausjakaumiksi. Näin ollen kaava voidaan esittää yleispätevästi myös muodossa

$$(3.17) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV',$$

missä integrointilavuuteen V on sisällytettävä kaikki mahdolliset varaukset.

Soveltamalla tätä kaavaa voidaan laskea origossa ($\mathbf{r}' = 0$) sijaitsevan pistelähteen q sähkökenttä, kun ensin sijoitetaan $\rho(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ja suoritetaan integrointi huomioiden Diracin δ -funktion integraaliominaisuus (2.158):

$$(3.18) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Tähän samaan tulokseen päästään tietenkin myös suoraan käyttäen yhtälön (3.12) ensimmäistä termiä.

On huomattava, että yhtälön (2.143) mukaan pistelähteen sähkökenttä (3.18) voidaan esittää myös muodossa

$$(3.19) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\nabla \frac{1}{r} \right).$$

Jos pistelähteemme ei ole origossa, edellä oleva yhtälö saa muodon

$$(3.20) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).$$

Voimme myös kirjoittaa yleistä varausjakaumaa vastaavan sähkökentän yhtälön (3.17) tähän samaan muotoon

$$(3.21) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dV'.$$

On huomattava, että ∇ -operaattori kohdistuu yhtälöissä (3.19), (3.20) ja (3.21) kenttäpisteeseen \mathbf{r} .

Sähkökentän laskentakaavan (3.12) tai (3.17) käyttö rajoittuu tilanteisiin, joissa varaukset ja varausjakaumat tunnetaan jo etukäteen. Näin ei kuitenkaan aina ole. Voimme esim. tuntea vain osan varauksista, mutta varausjakaumista kappaleissa ja niiden pinnoilla ei ole tietoa. Tällaisten tehtävien ratkaisemiseksi tarvitsemme kentän differentiaaliyhtälöitä sekä reunaehtoja.

3.1.4 Sähkökentän differentiaaliyhtälöt ja sähköpotentiaali

Sähkökentän roottori

Muodostamme seuraavaksi sähkökentän roottorin $\nabla \times \mathbf{E}$ kenttäpisteessä. Sähkökentässä (3.17) kenttämuuttuja \mathbf{r} esiintyy muotoa $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ olevassa lausekkeessa. Roottorin muodostaminen kohdistuu tähän lausekkeeseen ja sen \mathbf{r} -muuttujaan. Lausekkeen roottori on kehityskaavan (2.116) mukaisesti

$$(3.22) \quad \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \left[\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Koska paikkavektorin roottori (yhtälö (2.140)) on nolla ja gradienttikaavan (2.141) mukaan

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -3 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5},$$

myös yhtälön (3.22) edellinen termi on nolla, koska vektorin ristitulo itsensä kanssa on nolla.

Näin olemme päätyneet sähköstatiikan kenttäyhtälöön

$$(3.23) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

eli sähkökenttä on pyörteetön.

Sähkökentän pyörteettömyyden voi todeta myös suoraan ja helpommin yhtälön (3.21) jälkimmäisen muodon avulla, koska muodostettaessa $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$ pitää muodostaa gradientin roottori, joka on aina nolla.

Sähkökentän potentiaali

Pyörteetön vektorikenttä voidaan aina lausua skalaarifunktion gradienttina. Voimme siis sähköstatiikassa kirjoittaa

$$(3.24) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi,$$

missä ϕ on sähkökentän *potentiaali* eli sähköpotentiaali, yksikkönä Nm/C eli V. Miinusmerkin valinta voidaan perustella seuraavasti. Gradientti osoittaa aina kentän voimakkaimman kasvun suuntaan. Haluamme kuitenkin, että sähkökenttä suuntautuu positiivisesta varauksesta pois päin eli kentän pienenevään suuntaan. Tästä syystä laitamme gradientin eteen miinusmerkin, jolloin saadaan vektori, joka on samansuuntainen sähkökentän kanssa.

Gradienttilauseen (2.90) mukaan saamme tästä lasketuksi potentiaalin ϕ viivaintegraalina

$$(3.25) \quad \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \nabla\phi(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}' = -\phi(\mathbf{r}),$$

missä ref viittaa pisteeseen, jossa potentiaali on nolla. Kolmidimensionaalisissa tarkasteluissa potentiaalin nollakohta kiinnitetään useimmiten äärettömyyteen.

Näin saamme esimerkiksi origossa sijaitsevan pistevarauksen potentiaaliksi

$$(3.26) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Yleistä sähkökentän laskukaavaa (3.17) vastaavaksi potentiaaliksi saadaan vastaavasti

$$(3.27) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Tämä yhtälö voidaan myös päätellä vertaamalla yhtälön (3.21) jälkimmäistä esitysmuotoa yhtälöön (3.24).

Huomautus 1. Potentiaalin laskeminen sähkökentän viivaintegraalina (3.25) tarkoittaa fysikaalisesti yksikkövarausta kohti tehdyn työn vastalukua, kun varaus siirretään äärettömyydestä (tai referenssipisteestä) kenttäpisteeseen. Sähköstaattisella kentällä on siten potentiaalienergiaa. Kentän potentiaali on sama kuin kentässä olevan varauksen potentiaalienergia varausyksikköä kohden. Koska sähkökenttä on pyörteetön eli varaukseen kohdistuva voima on

konservatiivinen, on tehty työ tiestä riippumaton. Konservatiiviseen voimaan liittyvä potentiaalienergia on mekaniikan periaatteiden mukaisesti

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l}'.$$

ja $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Näiden yhtälöiden valossa fysikaalinen tulkintamme saa kaava-muodon. ■

Huomautus 2. On syytä erikseen huomata, että potentiaalin (3.27) ja sähkökentän (3.17) laskukaavat ovat voimassa myös silloin, kun laskentapiste \mathbf{r} on lähdealueessa V . Tällöin lähdealueen yhdessä pisteessä $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ potentiaalin ja sähkökentän laskukaavoissa on singulariteetti. Tilavuuden yli lasketut integraalit kuitenkin konvergoivat eli suppenevat, koska tilavuuden r^3 -tyyppinen integrointi kompensoi potentiaalin $1/r$ -tyyppisen ja sähkökentän $1/r^2$ -tyyppisen singulariteetin. Myös pintaintegroinnissa potentiaalin ja sähkökentän laskukaavoissa olevat integraalit suppenevat, vaikka $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. ■

Sähkökentän divergenssi

Muodostamme seuraavaksi sähkökentän divergenssin $\nabla \cdot \mathbf{E}$ kahdella hieman erilaisella tavalla. Ensimmäinen tapa on ”primitiivisempi”, jossa lähdemme aluksi liikkeelle Coulombin lain mukaisesta, origossa sijaitsevan, pistevarauksen sähkökentän lausekkeesta

$$(3.28) \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Ympäröimällä varaus mielivaltaisella pinnalla S , joka rajoittaa tilavuuden V , Gaussin lauseen (2.95) mukaan on voimassa

$$(3.29) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega,$$

missä Ω on yhtälön (2.149) mukaisesti avaruuskulma, jossa pinta S näkyy varauksesta q tarkasteltuna. Koska tarkastelupiste eli varaus on pinnan sisäpuolella, avaruuskulma on 4π ja näin saamme

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0},$$

missä q on siis pinnan *sisällä* oleva varaus. Korvaamalla q yleisellä avaruusvarausitiheyden tilavuusintegraalilla

$$q = \int_V \rho dV$$

päädymme yhtälöön

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

josta voimme päätellä (koska V on mielivaltainen) sähkökentän divergenssin yhtälön

$$(3.30) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Sähkökentän divergenssiyhtälö on sähkökenttää koskeva Gaussin laki differentiaaliyhtälömuodossa.

Toinen tapa on lähteä suoraan muodostamaan sähkökentän divergenssiä yhtälön (3.21) jälkimmäisestä muodosta, kun huomioimme, että pätee

$$(3.31) \quad \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Tällöin saamme

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

missä viimeinen muoto saadaan Diracin δ -funktion integraaliminaisuuksien perusteella.

Huomautus. On siis ilmeistä, että vaikka aluksi valitsimme pistevarauksen ja sijoitimme sen origoon, tämä ei ole mitenkään rajoittava valinta divergenssin (3.30) määrittämisessä. ■

Yhteenveto sähkökentän differentiaaliyhtälöistä tyhjiössä

Kokoamme vielä edellä johtamamme sähkökentän differentiaaliyhtälöt myöhempää käyttöä varten. Sähkökentän roottori

$$(3.33) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0}$$

tarkoittaa, että sähkökenttä on pyörteetön. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(3.34) \quad \boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}).}$$

Sähkökentän divergenssi

$$(3.35) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}$$

kertoo, että sähkökentän lähteinä ovat varaukset. Sähkökentän kenttäviivat alkavat varauksista ja päättyvät varauksiin tai jatkuvat äärettömyyteen.

Sijoittamalla lauseke (3.34) divergenssiyhtälöön (3.35) saamme sähköpotentiaalin osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$(3.36) \quad \nabla \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

eli

$$(3.37) \quad \boxed{\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}},$$

joka on nimeltään Poissonin³ yhtälö. Varauksettomassa alueessa ($\rho(\mathbf{r}) = 0$) yhtälö saa muodon

$$(3.38) \quad \boxed{\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0},$$

joka on nimeltään Laplacen yhtälö.

3.1.5 Sähköinen dipoli

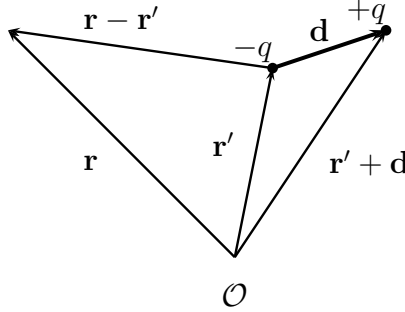
Sähköinen dipoli eli kaksoislähde muodostuu kahdesta itseisarvoltaan yhtäsuuresta, mutta vastakkaismerkkisestä varauksesta, jotka ovat hyvin 'lähellä' toisiaan. Dipolin kenttälausekkeen johtamiseksi merkitsemme varauksia symboleilla $-q$ ja $+q$ sekä vektoria $-q$:sta $+q$:hun \mathbf{d} :llä. Tällöin kuvan 3.1 merkinnöin voimme kirjoittaa sähkökentälle

$$(3.39) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right).$$

Seuraavaksi muutamme yhtälössä (3.39) ensimmäisen termin nimittäjän muotoon

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^{-3} &= \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d}^2 \right]^{-3/2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 - \frac{2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \frac{\mathbf{d}^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]^{-3/2}, \end{aligned}$$

³Siméon-Denis Poisson (1781–1840), ransk. matemaatikko.



Kuva 3.1: Kahden itseisarvoltaan yhtäsuuren, mutta vastakkaismerkkisen varauksen sähkökentän laskeminen.

jonka voimme kehittää binomiteoreeman (2.213) mukaan sarjaksi. Kun otamme mukaan vain \mathbf{d} :n ensimmäistä astetta olevat termit, saamme sarjakehitelmän

$$(3.40) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|^{-3} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3} \left[1 + \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} + \dots \right].$$

Sijoittamalla kehitelmä (3.40) yhtälöön (3.39) ja pitämällä mukana vain \mathbf{d} :n lineaariset, ensimmäistä astetta olevat termit, saamme sähkökentälle seuraavan sarjakehitelmän

$$(3.41) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \dots \right].$$

Seuraavaksi teemme raja-arvoprosessin, jossa annamme etäisyysvektorin \mathbf{d} lähestyä nollaa siten, että tulo $q\mathbf{d}$ pysyy koko ajan äärellisenä vakiona. Merkitsemme

$$(3.42) \quad \mathbf{p} = q\mathbf{d},$$

jota kutsutaan pistemäisen dipolin *dipolimomentiksi*. Sen yksikkö on Cm. Dipolimomentin avulla ilmaistuna dipolin sähkökenttä (3.41) saa muodon

$$(3.43) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right].$$

Sähködipolin potentiaali voidaan muodostaa periaatteessa samalla periaatteella binomiteoreemaa soveltamalla kuin sähkökenttään. On olemassa

myös elegantimpi tapa, joka perustuu kokonaisdifferentiaalain (2.88) hyväksikäyttöön. Kahden pistevarauksen $+q$ ja $-q$ potentiaali on kuvan 3.1 merkinöin

$$(3.44) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

Voimme yhtälössä (3.44) merkitä skalaarifunktion $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ pientä muutosta \mathbf{d} -vektorin etäisyyden päässä

$$(3.45) \quad \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{d},$$

jonka voimme samastaa funktion $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ kokonaisdifferentiaaliksi, kun annamme vektorin \mathbf{d} lähestyä nollaa suuntansa säilyttäen ja vielä siten, että tulo $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ pysyy koko ajan samana. ∇' tarkoittaa, että nabla kohdistetaan pilkutettuihin koordinaatteihin. Tällöin pätee

$$(3.46) \quad \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Dipolin potentiaalin lausekkeeksi saamme siten

$$(3.47) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

On helposti todettavissa, että muodostamalla potentiaalin (3.47) negatiivinen gradientti kenttäpisteessä \mathbf{r} päädytään dipolin sähkökentän yhtälöön (3.43).

On huomattava, että dipolin sähkökentänkin lausekkeen (3.43) voimme johtaa lyhyemmin kokonaisdifferentiaalia hyväksikäyttäen. Tällöin tarvitsemme dyadeja, kuten seuraava tarkastelu osoittaa. Yhtälön (3.39) voimme analogisesti edellä esitetyn potentiaalin johdon kanssa kirjoittaa muotoon

$$(3.48) \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \cdot \mathbf{d}.$$

Tässä yhtälössä muodostamme siis vektoriarvoisen funktion $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ gradientin, joka on yhtälön (2.205) mukaan dyadi. Kun kehitämme hakasulkeissa olevan lausekkeen pilkutettujen koordinaattien suhteen, saamme

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla' (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \cdot \mathbf{d} \\ &= \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (-\bar{\bar{I}}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]. \end{aligned}$$

Saimme siis sähkökentän lausekkeen (3.43) vain muutaman rivin avulla. Esimerkki havainnollistaa samalla dyadien käyttökelpoisuutta esitystapojen lyhentäjänä. Jatkossa käytämme dyadeja aina, kun siihen on aihetta. Yhtälössä yksikködyadia on merkitty $\overline{\overline{\mathbf{I}}}$, jonka suhteen pätee sääntö (2.194). Käytimme edellä nablalla operoimissääntöä (2.112) sovellettuna tilanteeseen, kun toinen funktio on skalaari ja toinen vektori, jolloin sääntö on dyadimuotoinen. On huomattava, että keskimmäisen hakasulkulausekkeen sisällä olevat dyadit ovat symmetrisiä, jolloin pistetulo on dyadin suhteen vaihdannainen (vrt. yhtälö (2.192)) ja siten saatoimme siirtää pistetulon hakasulkulausekkeen eteen. Kehityskaavassa sovelsimme skalaarifunktioon $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ myös gradienttiyhtälöä (2.141).

Huomautus. Yhtälöistä (3.43) ja (3.47) huomaamme, että dipolin sähkökenttä käyttäytyy kuten $1/r^3$ ja dipolin potentiaali kuten $1/r^2$. Pistemäinen dipoli muodostaa siis voimakkaamman singulariteetin kuin pistevaraus, jonka sähkökenttä käyttäytyy kuten $1/r^2$ ja potentiaali kuten $1/r$. ■

Pintadipolijakauman kenttä

Edellä tarkastelimme pistemäisen sähköisen dipolin kenttälausekkeitä. Tarkastelemme seuraavaksi tilannetta, jossa jollekin pinnalle S on jakautunut jatkuva dipolilähde ('dipolimatto'). Merkitään tällaisen kaksoispintalähteen dipolimomenttitiheyttä symbolilla $\vec{\tau} = \tau \mathbf{n}$, jossa \mathbf{n} on pinnan negatiiviselta puolelta (ts. negatiivisen varauksen puolelta) positiiviselle puolelle (ts. positiivisen varauksen puolelle) eli dipolin suuntaan osoittava pinnan normaaliyksikkövektori. $\vec{\tau}$:n yksikkö on C/m. Tällöin differentiaalisella pinta-alkiolla dS on dipolilähde, jonka momentti on $\vec{\tau}dS = \tau d\mathbf{S}$. Sijoittamalla tämä dipolimomentti potentiaalin yhtälöön (3.47) ja integroimalla pinnan S yli voimme kirjoittaa

$$(3.50) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \vec{\tau}(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}.$$

Yhtälössä (3.50) integrointi ja nablalla operoiminen tehdään pilkutettujen koordinaattien (eli lähdepisteen) suhteen. Jos pintadipolimomenttitiheys $\vec{\tau}$ on vakio, yhtälön (3.50) integraali on sen avaruuskulman vastaluku, jossa pinnan S reunakäyrä näkyy kenttäpisteestä \mathbf{r} tarkasteltuna (vrt. yhtälö (2.150))

$$(3.51) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_S \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \Omega.$$

Avaruuskulman epäjatkuvuusominaisuuksien (ks. *huomautus 2* sivulla 50) mukaan huomaamme, että potentiaali kokee hyppäyksen

$$(3.52) \quad \phi_+ - \phi_- = \frac{\tau}{\epsilon_0}$$

siirryttäessä pinnan läpi.

Multipolikehitelmä

Kun tarkastelupiste \mathbf{r} on kaukana varausjakaumasta, ts. $r \gg r'$, voidaan mielivaltaisen varausjakauman kenttä aina kehittää ns. multipolikehitelmäksi käyttäen apuna binomiteoreemaa (2.213)

$$(3.53) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\frac{1}{r} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left\{ 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2 r^2}{r^4} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{2r^4} + \dots \right\} dV'. \end{aligned}$$

Ensimmäinen termi on nettovaraus $\int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$ Coulombin lain mukainen kenttä eli monopoli, toinen termi on dipoli

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} \right) dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \frac{1}{r},$$

jossa

$$(3.54) \quad \mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV'$$

on varausjakauman dipolimomentti. Dipolia seuraava termi on nimeltään kvadrupoli (sarjan 3. ja 4. jäsen). Esityksemme tarpeita varten riittää kuitenkin tarkastella termejä vain dipolimomenttiin asti. Ydinfysikaalisissa tarkasteluissa myös korkeammilla momenteilla on käyttöä. Todettakoon, että

jos varaussysteemin kokonaisvaraus on nolla, kentän käyttäytymisen kaukana varaussysteemistä määrää sen dipolimomentti. Tätä ominaisuutta hyödynnämme tarkastellessamme materiaalin käyttäytymistä sähköstaattisessa kentässä. Edellä olevassa tarkastelussa on oletettu, että origo on varauskauman sisällä.

3.2 Sähköstatiikan kenttäyhtälöt väliaineessa

Tähän asti olemme tarkastelleet varaussysteemejä, jotka on sijoitettu tyhjiöön ja ”vapaaseen” eli muutoin tyhjään kokoavaruuteen. Toisin sanoen varausten lähellä ei ole ollut mitään materiaalirajapintoja. Seuraavaksi siirrymme tarkastelemaan tilanteita, joissa varaukset sijaitsevat väliaineessa ja/tai varausten lähellä on materiaalirajapintoja.

3.2.1 Aineet sähköstatiikassa – johteet ja eristeet

Sähköstatiikan kannalta aineet ovat joko *johteita* tai *eristeitä*. Johteessa on vapaita varauksia, jotka pystyvät liikkumaan aineessa. Eristeessä puolestaan kaikki varaukset ovat sidottuja aineen rakenneosiin eli molekyyliin. Eristeessä varaukset eivät voi liikkua, mutta ne voivat ryhmittyä uudelleen sähkökentän (voimakentän) vaikutuksesta. Tällöin aine polarisoituu eli aine kokee *dielektrisen polarisaation*.

Sähköstatiikassa johteet ovat aina ideaalijohteita ja eristeet ideaalieristeitä. Tämä voi tuntua oudolta, mutta selityksenä on sähköstatiikan approksimatiivinen luonne. Aineessa olevat varaukset liikkuvat niin kauan kun niihin vaikuttaa jokin voima. Sähköstatiikassa odotamme, että varaukset ovat asettuneet paikoilleen ja niin muodoin niihin vaikuttava resultanttivoima on nolla. Voimme myös ajatella, että sähköstatiikassa tarkastelemme tilannetta juuri ennen kuin varaukset lähtevät liikkumaan aineessa.

Kun johteessa olevaan vapaaseen varaukseen ei enää kohdistu voimaa, on sähkökentänkin kyseisessä pisteessä oltava nolla. Voimme siis päätellä, että johteen sisällä sähkökenttä on nolla ja johteet muodostavat tällöin tasa- eli ekvipotentiaalialueita. Tulemme osoittamaan matemaattisestikin, että johteessa vapaat varaukset voivat sijaita ainoastaan johteen pinnalla.

Yleinen sähköstaattinen probleemi on sellainen, jossa on tunnettuja vapaita varauksia, johdekappaleiden pinnoilla tai johderajapinnoilla olevia useimmiten tuntemattomia varausjakautumia sekä polarisoituvia eristekappaleita tai eristerajapintoja, ja halutaan laskea sähkökenttää, potentiaalia tai voimavaikutusta joissakin pisteissä. Ennen kuin voimme edetä näin yleisen probleemin ratkaisuun, tarkastelemme johdetta sähkökentässä ja perehdymme sen

jälkeen eristeaineen dielektriseen polarisaatioon makroskooppiselta kannalta.

3.2.2 Johde sähkökentässä – influenssi

Edellä jo päättelimme, että johteiden sisällä sähkökenttää ei ole. Osoitamme seuraavaksi, että johteessa vapaiden varausten ja johteeseen mahdollisesti tuodun varauksen on sijaittava johteen pinnalla. Tarkastelemme johdekappaletta ja valitsemme johdekappaleen sisälle mielivaltaisen Gaussin pinnan S , joka rajoittaa tilavuuden V . Soveltamalla Gaussin lausetta (2.95) voimme kirjoittaa

$$(3.55) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0,$$

koska kenttä \mathbf{E} on nolla johteen sisällä. Toisaalta yhtälön (3.30) mukaan tässä tapauksessa avaruusvaraustiheyskin $\rho(\mathbf{r}) = 0$, joten Gaussin pinnan sisällä ei ole varauksia. Jos valitsemme Gaussin pinnan johteen sisällä miten tahansa, tämä tulos on aina voimassa, kunhan Gaussin pinta on kokonaan johteen sisällä. Kun lopulta Gaussin pinta valitaan siten, että se on edelleen johteen sisällä, mutta matemaattisen ”epsilonin verran” sen pinnasta erillään, päädymme toteamukseen, että johteessa oleva nettovaraus voi sijaita vain johteen ulkopinnalla. Välittömästi johteen ulkopuolella on sen sijaan voimassa $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \neq 0$, jos johteen nettovaraus on eri kuin nolla. Jos johdekappale on varaamaton eli johteen nettovaraus on nolla, tällöin $\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$, vaikka siis yleisesti $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ (ja $\mathbf{E} \neq 0$) johteen pinnan pisteissä.

Koska johteessa sähkökenttä on nolla, muodostaa johde yhtälöiden (3.24) ja (3.25) mukaisesti tasapotentiaaliaalueen. Tästä voimme päätellä, että kenttä välittömästi johdepinnan ulkopuolella on kohtisuorassa johdepintaa vastaan, koska tasapotentiaalipinnat ovat kohtisuorassa kenttää vastaan.

Kun johdekappale tuodaan sähkökenttään tai se joutuu ulkoisen sähkökentän vaikutuspiiriin, kohdistuu sen kuhunkin vapaaseen varaukseen Coulombin lain mukainen voima. Tämä voima aiheuttaa johteen pinnalla olevien varausten uudelleen järjestäytymisen. Toisin sanoen johteen pintavarustiheys $\sigma(\mathbf{r})$ muuttuu, kunnes tasapainotila saavutetaan eli sähkökenttä johteen sisällä on nolla. Ilmiötä kutsutaan *influenssiksi*.

3.2.3 Eriste sähkökentässä – dielektrinen polarisaatio

Eristeessä eli dielektrisessä aineessa ei siis ole sähköstatiiikan kannalta lainkaan vapaita varauksia, vaan kaikki varaukset ovat sidottuja aineen mole-

kyyleihin. Kun dielektrinen aine tuodaan sähkökenttään tai siihen kohdistetaan ulkoinen sähkökenttä, aiheuttaa kenttä kuhunkin varaukseen coulombin voiman, joka pyrkii siirtämään varausta joko kentän suuntaan (positiiviset varaukset) tai vastakkaiseen suuntaan (negatiiviset varaukset). Tämän seurauksena molekyyeissä tapahtuu 'differentiaalista', atomaarista varausten siirtymistä eli niiden uudelleen järjestäytymistä siten, että molekyylin toiseen päähän muodostuu positiivinen varauskeskittymä ja toiseen negatiivinen. Tätä ilmiötä kutsutaan *dielektriseksi polarisaatioksi*, ja se on nimenomaan eristeiden ominaisuus. Eristeen sanotaan tällöin olevan *polarisoitunut*.

Huomautus. Polarisaatio-termi esiintyy sähkömagnetismissä monissa yhteyksissä. Esimerkiksi aiemmin mainittua johdekappaleessa esiintyvää influenssi-ilmiötä nimitetään usein myös johdekappaleen polarisaatioksi. Tulemekin myöhemmin käyttämään polarisaatio-termiä erikseen määritellyissä merkityksissä eri yhteyksissä. ■

Makroskooppiselta kannalta dielektrinen polarisaatio tarkoittaa siis positiivisen varauksen siirtymistä suhteessa negatiiviseen varaukseen. Koska molekyyli on sähköisesti neutraali, ovat sen positiivinen varauskeskittymä ja negatiivinen varauskeskittymä itseisarvoltaan yhtäsuuret. Molekyyli muodostaa tällöin sähköisen dipolin. Makroskooppisesti aineen voidaan kuvitella koostuvan dipoleista, joiden jakautumista aineeseen kuvataan dipolimomenttiheydellä eli sähköisellä polarisaatiovektorilla \mathbf{P}

$$(3.56) \quad \mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{p}}{dV},$$

missä raja-arvoprosessi on muodostettava jälleen 'fysiikan hengessä', jotta tilavuudessa ΔV on koko ajan riittävästi dipoleja. Polarisaatiovektorin yksiköksi tulee C/m^2 . Polarisaatiovektori on luonteeltaan vektorimuuttujan \mathbf{r} tai \mathbf{r}' vektoriarvoinen funktio riippuen siitä, tarkoitammeko kenttä- vai lähdepistettä. Suomenkielessä polarisaatiovektoria \mathbf{P} kutsutaan myös *polarisoitumaksi*.

Dielektrisen kappaleen synnyttämä kenttä

Tarkastelemme tilannetta, jossa polarisoitunut, dielektrinen ainekappale (polarisaatio $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$, tilavuus V ja sen rajoittama pinta S) sijaitsee tyhjiössä vapaassa avaruudessa. Tällöin voimme kirjoittaa differentiaaliselle potentiaalille kenttäpisteessä \mathbf{r} yhtälön (3.47) mukaisesti

$$(3.57) \quad d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

missä $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dV'$ on alkiossa dV' oleva differentiaalinen dipoli. Tästä voimemekin laskea kokonaispotentiaalin integroimalla kappaleen yli

$$(3.58) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Seuraavaksi kirjoitamme integrandin hieman eri muotoon käyttäen hyväksi operaattoria ∇' koskevaa sääntöä (3.46) ja vektori-identiteettiä (2.114). Tällöin integrandi voidaan esittää muodossa

$$(3.59) \quad \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}').$$

Sijoittamalla lauseke (3.59) kokonaispotentiaalin kaavaan (3.58) ja käyttämällä vielä Gaussin lausetta (2.95) muuntamaan tilavuusintegraali pintaintegraaliksi saamme lopulta yhtälön

$$(3.60) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

missä \mathbf{n} on pinnan S ulkonormaaliyksikkövektori.

Olemme päätyneet puhtaasti matemaattisen tarkastelun jälkeen lausekkeeseen, jossa esiintyy $1/r$ -tyyppisiä termejä, ja joka näin ollen kuvaa varaustilauksien potentiaalia. Näille varauksille käytetään jatkossa merkintöjä

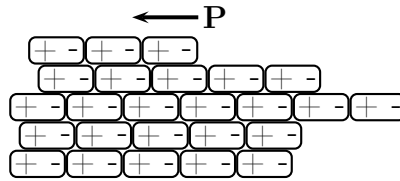
$$(3.61) \quad \sigma_P(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} = P_n$$

ja

$$(3.62) \quad \rho_P(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}').$$

Varauksia kutsutaan polarisaatiovarauksiksi, joiden tiheysfunktioit ovat σ_P ja vastaavasti ρ_P . Todetaan suoraan, että näiden yksiköt ovat C/m^2 ja vastaavasti C/m^3 , joten nimitys varaustiheys on oikeutettu. Olemme näin päätyneet tulokseen, että kappaleessa oleva dipolijakauma vastaa avaruusvarausjakautumaa, jonka tiheysfunktio on dipolimomenttitiheyden divergenssin vastaluku sekä pintavarauksijakaumaa, joka on dipolimomenttitiheyden normaalikomponentti kappaleen ulkopinnalla. Huomaamme heti, että jos polarisaatio on vakio eli homogeeninen, polarisaatioavaruusvaraustiheys on nolla, koska vakiovektorifunktion divergenssi on nolla. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että kappaleen sisällä, missä dipolit ovat kaikki samansuuruisia, dipolien negatiiviset ja positiiviset varaukset kumoavat toistensa vaikutuksen ja jäljelle

jää vain reunalla olevien dipolien vaikutus. Kuva 3.2 havainnollistaa homogeenisesti polarisoitunutta ainekappaletta. Polarisaatiovarausta on vain ainekappaleen pinnalla. Kuten voidaan kuvasta päätellä, pinnoilla joissa \mathbf{P} on kohtisuorassa pinnan ulkonormaalien kanssa, ei ole polarisaatiopintavarausta ($\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = 0$). Pinnan muilla osilla varauksen laji (positiivinen tai negatiivinen) määräytyy \mathbf{P} :n ja ulkonormaalien välisestä kulman suuruudesta. Kuvan tilanteessa kappaleen vasemmalla reunalla on positiivinen polarisaatiopintavaraus, koska \mathbf{P} on samansuuntainen ulkonormaalien kanssa eli reunalla on dipolin positiivinen varaus. Sen sijaan kuvan oikealla reunalla, jossa \mathbf{P} on vastakkaisuuntainen ulkonormaalien kanssa, on negatiivinen polarisaatiopintavaraus eli reunalla on dipolin negatiivinen varaus.



Kuva 3.2: Homogeeninen polarisaatio \mathbf{P} aineessa.

Polarisaatiovarausten avulla voimme kirjoittaa potentiaalin (3.60) muotoon

$$(3.63) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Polarisaatiovarausten kokonaismäärä dielektrisessä kappaleessa on

$$(3.64) \quad Q_P = \int_V (-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) dV' + \oint_S \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS' = 0,$$

minkä voi todeta Gaussin lausetta (2.95) soveltamalla. Toisaalta fysikaalisista syistä johtuen kokonaisvarauksen tulee sähköisesti neutraalissa kappaleessa ollakin nolla.

Polarisoituneen kappaleen sähkökenttä voidaan laskea muodostamalla potentiaalin (3.63) negatiivinen gradientti kenttäpisteessä \mathbf{r} . Tuloksena on lauseke

$$(3.65) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_S \sigma_P(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' + \int_V \rho_P(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right].$$

Huomautus. Edellä tarkastelimme kentän laskentaa määrittelemättä tarkemmin laskentapisteen \mathbf{r} sijaintia. Jos laskentapiste on kappaleen ulkopuolella, kaikki edellä olevat tarkastelut ovat ilman muuta voimassa. Jos laskentapiste on kappaleen sisällä, joudutaan yhdessä pisteessä tilanteeseen, jossa laskentapiste ja lähdepiste ovat samat, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, eli syntyy singulariteetti. Yhtälöt (3.63) ja (3.65) ovat myös tässä tapauksessa edelleen voimassa, koska integraalit suppenevat kaikkialla, myös pisteessä $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, kuten *huomautuksessa 2* sivulla 79 perustellaan. ■

3.2.4 Sähkövuon tiheyskenttä

Yhtälöitä (3.63) ja (3.65) voidaan käyttää, jos tunnemme *a priori* polarisaation $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$. Useimmiten tilanne on kuitenkin se, että polarisaatio muodostuu kappaleeseen, kun se joutuu sähkökentän vaikutukseen, toisin sanoen $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ on funktio makroskooppisesta totaalikentästä $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$, johon vaikuttaa myös itse kappaleen polarisaatio, jota olemme määrittämässä eli $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Vaikeus aiheutuu siitä, että \mathbf{P} :n määrittämiseksi meidän tulisi tietää kokonaiskenttä \mathbf{E} , jota emme kuitenkaan tiedä. Osoittautuu, että ongelma voidaan ratkaista ottamalla käyttöön *sähkövuon tiheyskenttä* eli *sähköinen siirtymäkenttä* \mathbf{D} , jonka määrittelemme yhtälöllä

$$(3.66) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Sähkövuon tiheyden yksikkö on sama kuin \mathbf{P} :n eli C/m².

Määritelmän (3.66) tarkoituksenmukaisuus käy heti ilmeiseksi, kun muodostamme sähkövuon tiheyden divergenssin eli määritämme sen lähteet. Tällöin saamme

$$(3.67) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Koska yhtälön (3.62) mukaan

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

ja koska kokonaissähkökentän synnyttävät kaikki mahdolliset sekä vapaat että sidotut varaukset yhtälön (3.30) mukaisesti

$$(3.68) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f + \rho_P) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{tot},$$

täytyy sähkövuon tiheyden divergenssin olla vapaa avaruusvaraustiheys ρ_f

$$(3.69) \quad \rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D}.$$

Gaussin lauseen (2.95) mukaan voimme laskea pinnan S sisällä olevien vapaiden varausten kokonaismäärän

$$(3.70) \quad Q_f = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS,$$

missä \mathbf{n} on pinnan S ulkonormaaliyksikkövektori. Kokonaisvaraus Q on polarisaatiovarausten

$$(3.71) \quad Q_P = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$$

ja vapaiden varausten Q_f summa $Q_f + Q_P$. Vapaita varauksia kutsutaan myös ulkoisiksi varauksiksi, koska ne on tuotava ulkoapäin atomeista ja molekyyleistä koostuvaan sähköisesti neutraaliin aineeseen. Usein alaindeksi f jätetään merkitsemättä, jos ei ole vaaraa väärinkäsityksiin. Yhtälö (3.70) vastaa sähkövuon tiheyden nettovuota pinnan S läpi yhtälön (2.74) mukaisesti.

Huomattakoon siis erityisesti, että sähkövuon tiheyskenttä \mathbf{D} on laskennallinen apukenttä, jonka otamme käyttöön määrittely-yhtälön (3.66) kautta. Edellä oleva tarkastelu osoittaa, että tällaisen apukentän käyttöönotto on perusteltua ja tarkoituksenmukaista. Kokonaissähkökentän lähteinä ovat sekä vapaat, ulkoiset varaukset että aineen polarisoitumisesta aiheutuvat sidotut polarisaatiovaraukset. Jos mittaamme sähkökenttää jossakin pisteessä, mittarimme ei erota sitä, mikä osa kentästä aiheutuu mistäkin lähteestä. Mittaamme siis kokonaissähkökenttää $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Laskennallisesti voimme sitten erottaa eri lähteiden osuudet kokonaiskentässä, jos tunnemme ulkoiset varaukset.

Sähkövuon tiheyden avulla voimme lausua kokonaissähkökentän diektorisessä aineessa laskentapisteessä \mathbf{r}

$$(3.72) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}),$$

missä ensimmäinen termi $(1/\epsilon_0)\mathbf{D}$ liittyy ulkoisiin, vapaisiin, varauksiin ja toinen termi $(-1/\epsilon_0)\mathbf{P}$ liittyy aineen polarisaatioon. Tyhjiössä sähkökentän määrää ainoastaan yhtälön (3.72) ensimmäinen termi.

3.2.5 Sähköstatiikan konstitutiiviset yhtälöt

Konstitutiivisilla yhtälöillä eli väliaine-yhtälöillä otetaan huomioon väliaineiden ominaisuudet. Yleismuodoltaan ne ovat eri kenttäsuureiden välillä olevia sidosyhtälöitä, joissa väliaineen ominaisuus toimii välittävänä kertoimena.

Kerros voi olla pelkkä skalaariluku, mutta yleisesti se on tensori. Luonteeltaan konstitutiiviset yhtälöt ovat lähes aina kokeellisesti määritettäviä ja niiden muoto sekä pätevyysalue riippuvat väliaineen ominaisuuksista sekä valitsevista kenttävoimakkuuksista. Ne eivät ole siis mitään yleisiä luonnonlakeja. Konstitutiivisten yhtälöiden on täytettävä kuitenkin fysiikan lakien invarianttisuusvaatimus. Ne eivät myöskään saa olla ristiriidassa säilymlakien kanssa. Siksi mikä tahansa yhtälö ei voi olla konstitutiivinen yhtälö. Voimme sanoa, että tieto väliaineesta siirretään kenttäyhtälöihin konstitutiivisten yhtälöiden kautta. Konstitutiivisia yhtälöitä tarvitaan kenttäprobleemien ratkaisemisessa, koska muutoin ratkaistavia kenttäsuureita olisi enemmän kuin yhtälöitä.

Sähköstatiikassa johdekappaleiden kohdalla avaruudessa aineen vaikutus on yksinkertainen, koska johteet muodostavat sähkökentättömiä tasapotentiaalialueita. Johteiden osalta emme sen takia sähköstatiikassa tarvitse väliaineen ominaisuuksia huomioivaa erillistä konstitutiivista yhtälöä. Korostettakoon, että tämä pätee vain sähköstatiikassa.

Eristemateriaalien kohdalla tilanne puolestaan on toisenlainen. Dielektrisen aineen vaikutus sähköstatiikassa sisältyy täysin polarisaatiovektoriin \mathbf{P} . Konstitutiivinen yhtälö tarkoittaa tässä tapauksessa muotoa $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ olevaa yhtälöä. Tämän yhtälön tarkempi muoto riippuu siis kussakin pisteessä tarkasteltavasta väliaineesta sekä siitä, kuinka suuri kenttävoimakkuus $|\mathbf{E}|$ on kyseisessä pisteessä. Jotta pääsemme esityksessämme eteenpäin, teemme joukon oletuksia. Ensimmäinen oletuksemme on, että väliaineemme on *lineaarinen*, mikä tarkoittaa sitä, että relaatio $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ on lineaarinen eli ensimmäistä astetta kenttävoimakkuuden suhteen ja että väliaineen polarisaatio-ominaisuudet eivät riipu kentästä \mathbf{E} . Toinen oletuksemme on, että väliaineemme on *isotrooppinen*, joka tarkoittaa, että sen polarisaatio-ominaisuudet ovat samanlaiset kaikkiin suuntiin. Kolmantena oletamme, että väliaineemme on *homogeeninen*, tai ainakin paloittain homogeeninen, mikä tarkoittaa sitä, että sen polarisaatio-ominaisuudet ovat vakioita tai paloittain vakioita, ts. ne eivät riipu paikasta. Oletuksiemme mukaista väliainetta kutsutaan usein *LIH*-väliaineeksi oletusten alkukirjainten mukaan.

Voimme siis kirjoittaa *LIH*-väliaineen konstitutiivisen yhtälön muotoon

$$(3.73) \quad \mathbf{P} = \chi \mathbf{E},$$

missä skalaarista kerrointa χ kutsutaan aineen *sähköiseksi susceptibiliteetiksi*, yksikkönä $\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1} = \text{C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$. Kirjallisuudessa käytetään myös laadutonta sähköistä susceptibiliteettia χ_e , jolloin merkitään $\chi = \chi_e \epsilon_0$.

Yhdistämällä yhtälö (3.73) sähkövuon tiheyden määrittely-yhtälöön (3.66)

saamme

$$(3.74) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$(3.75) \quad \epsilon = \epsilon_0 + \chi,$$

missä ϵ on väliaineen *permittiivisyys*. Permittiivisyys, jonka yksikkö on sama kuin χ :n, kuvaa väliaineen dielektristä polarisaatio-ominaisuutta.

Usein permittiivisyyksinä käytetään dimensiotonta suhteellista permittiivisyyttä, jota kutsutaan myös dielektriseksi vakioksi

$$(3.76) \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}.$$

Huomautus 1. Lineaarisuusoletus tarkoittaa, että sähköinen susceptibiliteetti χ ja permittiivisyys ϵ eivät riipu sähkökentästä. Sähkökentän voimakkuuden on oltava niin alhainen, että materiassa ei esiinny epälineaarisuusiymiöitä, kuten sähköistä läpilyöntiä, jossa sähkökenttä on niin voimakas, että se pystyy irrottamaan eristeestä varauksia. ■

Huomautus 2. Geologisten materiaalien joukossa on monia aineita, joita ei voida pitää isotrooppisina, vaan ne ovat luonteeltaan anisotrooppisia, kuten useimmat kiteet. Niiden permittiivisyyttä täytyy siten kuvata tensorilla. Tarkastelemme anisotropiaa tarkemmin tuonnempana sähköisessä virtausstatiikassa sähkönjohtavuuden yhteydessä. ■

Huomautus 3. Homogeenisuusoletuksella on kaikkein lievin vaikutus itse konstitutiivisen yhtälön muotoon. Esimerkiksi lineaarisessa, isotrooppisessa, mutta epähomogeenisessa väliaineessa voimme kirjoittaa kussakin tarkastelupisteessä \mathbf{r}

$$(3.77) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \chi(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Sähköinen susceptibiliteetti ja permittiivisyys ovat silloin paikan funktioita. ■

Huomautus 4. Myöhemmin ilmenee, että permittiivisyys on tärkeä väliaineominaisuus sähkömagneettisten aaltojen etenemisen kannalta. Se on vahvasti taajuusriippuvainen. Sitä kuvataan yleisesti kompleksisena, taajuudesta riippuvana suureena $\epsilon = \epsilon(\omega)$. Tällaista ominaisuutta kutsutaan *dispersioksi*. Permittiivisyys on useimmiten kääntäen verrannollinen taajuuteen. ■

Taulukkoon 3.1 on koottu joidenkin tavallisimpien geologisten materiaalien suhteellisia permittiivisyysarvoja. Nämä tulee edellä sanotun perusteella

Taulukko 3.1: Geologisten materiaalien suhteellisia permittiivisyyksiä.

Materiaali	Suhteellinen permittiivisyys
ilma	1
vesi	80 – 81
jää	3 – 4
biotiiitti	5 – 9
plagioklaasi	5 – 7
kvartsi	4 – 5
graniitti	4 – 19
gabro	8 – 40
gneissi	8 – 10
savi	4 – 16
hiekkä	4 – 25
siltti	9 – 23
moreeni	9 – 25
turve	50 – 78

ymmärtää vain suuntaa antaviksi arvoiksi. Luonnonmateriaalien ominaisuuksilla on muutenkin yleisesti laaja vaihtelualue. On hyvä muistaa, että suhteellisen permittiivisyyden ϵ_r vaihtelualue on kaiken kaikkiaan yleisesti noin kaksi kertaluokkaa, usein ilmaistaan muodossa kaksi 'dekadia', eli 1–100. On myös huomattava, että permittiivisyys, kuten useimmat muutkin väliaineominaisuudet, riippuu myös muista ulkoisista tekijöistä, kuten lämpötilasta. Lisäksi aineen vesipitoisuus vaikuttaa huomattavasti permittiivisyyteen sitä kasvattaen, koska vedellä on korkea permittiivisyys. Todettakoon vielä, että on kehitetty erilaisia ns. *sekoituskaavoja*, (engl. mixture formula) useammasta aineesta tai rakenteesta koostuvien materiaalien permittiivisyyden kuvaamiseksi. Suomessa sekoitusteoriaa on tutkinut Ari Sihvola⁴.

3.2.6 Kenttävektoreiden rajapintaehdot

Kenttäteoreettisissa problemeissa tarkastellaan usein aineiden rajapintoja, joiden läpi mentäessä aineen ominaisuudet muuttuvat epäjatkovasti eli hypäyksellisesti. Tällainen tilanne on paloittain homogeenisessa väliaineessa. Tarkastelemme seuraavaksi, miten kenttävektorit \mathbf{E} ja \mathbf{D} sekä potentiaali ϕ käyttäytyvät näissä tapauksissa. Meillä voi olla kahden eri permittiivisyyden

⁴Ari Sihvola, s. 1957, Teknillisen korkeakoulun sähkömagnetiikan professori v:sta 1997.

omaavan eristeen välinen rajapinta tai johteen ja eristeen välinen rajapinta. Myös tyhjiötä pidetään eristeenä.

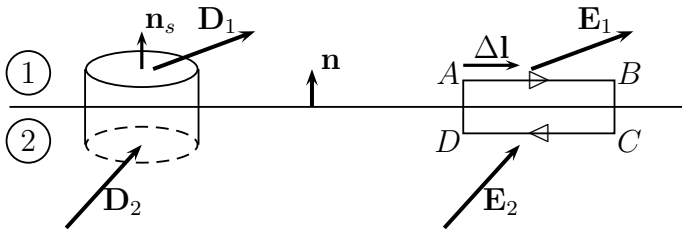
Tarkastelemme ensiksi sähkövuon tiheyden \mathbf{D} :n käyttäytymistä kahden eristeen 1 ja 2 välisellä rajapinnalla, jolla oletamme lisäksi olevan ulkoista pintavarausta σ_f . Asetamme rajapinnan läpi differentiaalisen sylinterin, 'pillerirasian' kuvan 3.3 mukaisesti. Soveltamalla Gaussin lausetta (2.95) pillerirasiaan ja antamalla pillerirasian korkeuden lähestyvä nollaa voimme kirjoittaa

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_s \Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_s \Delta S = \sigma_f \Delta S,$$

missä \mathbf{n}_s on pillerirasian pinnan ulkonormaaliyksikkövektori. Tästä seuraa edelleen \mathbf{D} :n rajapintaehto

$$(3.78) \quad (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma_f,$$

missä \mathbf{n} on rajapinnan normaaliyksikkövektori, jonka suunta on aineesta 2 aineeseen 1. Yhtälö (3.78) kertoo, että \mathbf{D} :n rajapinnan normaalin suuntainen komponentti on epäjatkuva vapaan pintavaraustiheyden verran. Jos rajapin-



Kuva 3.3: Sähkövuon tiheyden \mathbf{D} ja sähkökentän \mathbf{E} rajapintaehtojohtaminen.

nalla ei ole ulkoista, vapaata varausta ($\sigma_f = 0$), rajapintaehdoksi tulee

$$(3.79) \quad D_{1n} = D_{2n}$$

eli \mathbf{D} :n rajapinnan normaalin suuntainen komponentti on jatkuva rajapinnan läpi mentäessä.

Edellä olevaa 'pillerirasia-tekniikkaa' käytetään aina divergenssityyppisiin kenttäyhtälöihin, kun tarkastellaan kenttien rajapintakäyttäytymistä. Tällä periaatteella voimme myös johtaa tyhjiössä olevan johteen pinnalla voimassa olevan \mathbf{E} :n rajapintaehdon

$$(3.80) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

jossa σ on vapaa pintavaraustiheys johteen pinnalla. On huomattava, että edellä esitetyt yhtälöt ovat pisteittäin voimassa rajapinnalla, vaikka emme olekaan merkinneet paikkavektoria yhtälöihin muuttujaksi.

Jos johdekappale on dielektrisessä väliaineessa, tällöin johteen ulkopinnalla $D_n = \sigma_f$, koska sähkökenttä ja sähkövuon tiheyskenttä ovat nollia johteen sisällä.

Sähkökentän \mathbf{E} rajapintakäyttäytyminen voidaan johtaa soveltamalla Stokesin lausetta (2.102) kuvan 3.3 differentiaaliseen suorakaidepolkuun $ABCD$ ja antamalla rajapinnan molemmiin puolin menevien polun osien AD ja BC lähestyä nollaa. Tällöin voimme kirjoittaa huomioiden vielä sähkökentän pyörteettömyyden (3.23)

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} + \mathbf{E}_2 \cdot (-\Delta \mathbf{l}) = 0,$$

josta saamme edelleen sähkökentän rajapinnan tangentin suuntaisen komponentin jatkuvuuden

$$(3.81) \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

Tämä kirjoitetaan usein ristituloa hyväksikäyttäen rajapinnan normaaliyksikkövektorin avulla muotoon

$$(3.82) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2.$$

Toteamme heti, että johdekappaleen tapauksessa johteen pinnalla $E_t = 0$, koska johteen sisällä sähkökenttä on nolla. Toisin sanoen sähkökenttä on koh-tisuorassa johdetta vastaan. Dielektrisessä LIH-väliaineessa olevan johteen tapauksessa myös $D_t = 0$. Tulkoon jo tässä todetuksi, että anisotrooppisen dielektrisen väliaineen tapauksessa näin ei ole, vaan \mathbf{D} :llä on silloin myös tangentialikomponentti, vaikka $E_t = 0$. Normaalikomponentti on kuitenkin myös anisotrooppisessa tapauksessa $D_n = \sigma_f$. Anisotropiaan palaamme tarkemmin sähköisten virtausstationaaristen kenttien yhteydessä.

Tarkastelemme lopuksi vielä potentiaalın käyttäytymistä rajapinnan läpi mentäessä. Yhtälöä (3.25) soveltamalla huomaamme, että potentiaalın on oltava jatkuva rajapinnan läpi mentäessä

$$(3.83) \quad \phi_1 = \phi_2.$$

Rajapintaehdot (3.81) ja (3.83) ovatkin itse asiassa ekvivalentteja. Potentiaalın jatkuvuudelle on olemassa myös vahvat fysikaaliset perusteet. Potentiaalın epäjatkuvuus johtaisi äärettömän suureen kentän voimakkuuteen, mikä kentän energian kannalta on mahdottomuus, sillä kaikilla fysikaalisilla systeemeillä on aina äärellinen energia.

Huomautus. Sähköstaattisen kentän energiatiheys (yksikkönä J/m^3) isotrooppisen väliaineen kenttäpisteessä on

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D},$$

josta voidaan määrittää kentän energia jossakin tilavuudessa integroimalla tilavuuden yli. Sähkömagnetismin esityksessämme emme painota kenttiin liittyviä energiataarkasteluja. Todettakoon, että tietyt kenttien ratkaisemisessa käytettävät numeeriset menetelmät pohjautuvat kentän energian minimoitumisen periaatteelle, joka on yksi fysiikan ns. variaatioperiaatteista. ■

On huomattava, että Stokesin lausetta sovelletaan aina roottoryyppiin kenttäyhtälöihin, kun tarkastellaan kenttäsuureiden rajapintakäyttäytymistä.

Lopuksi on vielä syytä painottaa, että rajapintayhtälöt (3.78), (3.82) ja (3.83) eivät ole mitään erillisiä lisäoletuksia, kuten konstitutiiviset lait, vaan ne ovat suoraan seurausta kenttäyhtälöistä (3.69) ja (3.23).

3.3 Sähköstaattisten probleemien ratkaiseminen

Olemme nyt johtaneet kaikki tarpeelliset sähköstatiikan kenttäyhtälöt ja ryhdyimme tarkastelemaan niiden soveltamista varsinaisessa kentän laskennassa. Oletamme, että väliaineet ovat, ellei muuta mainita, LIH-aineita, jolloin yksinkertaiset konstitutiiviset yhtälöt ovat voimassa. Perusprobleeman geometriaksi valitsemme pistevarauksen ja pallon tai äärettömän pitkän viiva-varauksen ja sylinterin erilaisissa tilanteissa. Pallon ja sylinterin ratkaisuja tutkimalla saamme helpoiten selville kenttiin liittyviä ominaisuuksia ilman geometrian liiallista monimutkaisuutta. Tarkastelumme rajoittuu seuraavassa siis vain analyyttisesti eli 'kaavamudossa' ratkaistaviin ongelmiin. Numeeriset tarkastelut kuuluvat kenttien numeerisen mallinnuksen piiriin, jota emme tässä kirjassa käsittele.

3.3.1 Probleemien luokittelu

Sähköstaattisten probleemien luokittelu voidaan tehdä usealla tavalla. Voimme jakaa probleemit johdekappale- ja eristeongelmiksi tyhjiössä ja aineessa. Toinen tapa perustuu siihen tunnetaanko kentän lähteet eli varaukset vai ei. Voimme tuntea esimerkiksi johteen pinnalla olevan kokonaisvarausmäärän, mutta emme sen jakautumista pinnalla. Mielenkiinto voi kohdistua potentiaalın ja sähkökentän laskemisen lisäksi tämän jakauman määrittämiseen. Myös kenttien aikaansaamien voimavaikutusten laskenta voi olla mielenkiinnon kohteena.

Jos kentän lähteet tunnetaan, probleemi on viime kädessä integrointiongelmaksi varausjakaumien yli soveltaen yhtälöä (3.17) tai vastaavaa potentiaalin yhtälöä (3.27). Potentiaalin laskeminen on sen skalaariluonteesta johtuen luonnollisesti helpompaa kuin sähkökentän. Jos potentiaali tunnetaan, sähkökenttä saadaan aina muodostamalla sen negatiivinen gradientti. Diskreettien pistemäisten varausten tapauksessa integrointi voidaan korvata summeerauksella tai käyttää Diracin δ -funktiota.

Joissakin yksinkertaisissa symmetrisissä tehtävissä voidaan integrointi välttää, tosin vain muodollisesti, soveltamalla Gaussin lausetta jommassakummassa muodossa

$$(3.84) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_{tot} dV = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

tai

$$(3.85) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho_f dV = Q_f,$$

missä Q_{tot} ja Q_f ovat umpinaisen pinnan S sisällä oleva kokonaisvaraus ja vastaavasti vapaa kokonaisvaraus. Oleellista on valita Gaussin pinta S sopivasti siten, että sillä olevan kentän itseisarvo on vakio, joskin tuntematon, ja että kentän suunta yhtyy Gaussin pinnan normaalin suuntaan. Kentän suunta tulee siis voida päätellä fysikaalisin perustein etukäteen. Tällöin tuntematon kenttä, tarkemmin sanottuna kentän Gaussin pinnan normaalin suuntainen komponentti, voidaan siirtää integraalimerkin alta pois, jolloin integroinniksi jää Gaussin pinnan yli integrointi, joka antaa tulokseksi Gaussin pinnan pinta-alan. Tällaiset probleemit ovat täysin sylinteri- tai pallosymmetrisiä.

On ehkä syytä vielä kiinnittää huomiota siihen, että Gaussin lauseessa huomioidaan ainoastaan umpinaisen pinnan sisällä olevat varaukset. Syy on tietenkin siinä, että pinnan ulkopuolisten varausten aiheuttaman kentän vuo pinnan S läpi on nolla.

Jos varauksia ei tunneta tai niistä tunnetaan vain osa, joudutaan yleisen sähköstaattisen probleemin ratkaisemiseen. Sähköstaattinen probleemi on tällaisessa yleisessä tilanteessa luonteeltaan potentiaaliprobleemi, joka edellyttää Poissonin (3.37) tai Laplacen (3.38) yhtälön ratkaisemista. On helppo todeta, että itse asiassa yhtälön (3.68) johdosta Poissonin ja Laplacen yhtälöt ovat voimassa aina olipa väliaineemme minkälainen tahansa. Ongelmaksi muodostuu kuitenkin se, että Poissonin yhtälössä (3.37) oleva avaruusvaraus-tiheys on tällöin kokonaisavaruusvaraus-tiheys $\rho_{tot} = \rho_f + \rho_P$ eli siinä ovat mukana sekä vapaat ulkoiset varaukset että polarisaatiosta aiheutuvat varaukset. Polarisaatiovarausten selvittämiseksi tarvitsemme tietoa väliaineesta eli

konstitutiivisen yhtälön. Jos väliaineemme on LIH-tyyppinen, pätevät Poissonin ja Laplacen yhtälöt myös niissä olevien vapaiden avaruusvarausjakautumien tarkastelussa, sillä konstitutiivisen yhtälön (3.74) ja yhtälön (3.69) avulla voimme kirjoittaa

$$(3.86) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f.$$

Koska sähkökenttä on potentiaalin negatiivinen gradientti ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$), päädymme näin Poissonin yhtälöön

$$(3.87) \quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon}.$$

On huomattava, että yhtälöissä (3.37) ja (3.87) potentiaali on sama eli sähkökentän kokonaispotentiaali. Ero on yhtälön oikealla puolella. Jos laskemme potentiaalia vapaiden varausten ρ_f avulla, täytyy yhtälön (3.87) oikean puolen nimittäjässä olla laskentapisteen kohdalla olevan aineen permittiivisyys ϵ . Jos taas laskemme potentiaalia kokonaisvarausten ρ_{tot} avulla, yhtälön nimittäjässä on tyhjiön permittiivisyys ϵ_0 . Kokonaisavaruusvaraustiheyttä emme dielektrisessä potentiaaliprobleemissa kuitenkaan juuri koskaan tunne, joten joudumme käyttämään yhtälöä (3.87) potentiaalin laskemiseksi. Varauksettomassa alueessa LIH-aineessa on voimassa Laplacen yhtälö.

Koska Poissonin ja Laplacen yhtälöt ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, niiden ratkaisemiseksi tarvitaan reunaehtoja. Tavallisimmissa reunaehdoissa on tunnettava joko potentiaali alueen reunalla eli ns. *Dirichletin*⁵ reunaehto tai potentiaalin reunan normaalin suuntainen derivaatta eli ns. *Neumannin*⁶ reunaehto. On huomattava, että reunaehdot ovat eri asia kuin edellä käsitellyt rajapintaehdot. Rajapintaehdot määräytyvät kenttäyhtälöistä. Sen sijaan reunaehdot asetetaan tai määritetään probleemin fyysikaalisen luonteen perusteella. Niitä ei johdeta kenttäyhtälöistä.

3.3.2 Laplacen yhtälön ratkaisun yleiset ominaisuudet

Laplacen yhtälön ratkaisuja kutsutaan *harmonisiksi* funktioiksi. Ne ovat potentiaaliteorian ydin. Harmonisilla funktioilla on joukko mielenkiintoisia ominaisuuksia, joita ovat mm.:

- Ominaisuus 1. Lineaarisuusominaisuus. Jos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin silloin myös lineaarikombinaatio $\phi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \dots + C_n\phi_n$, missä kertoimet C ovat vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu.

⁵Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859), saks. matemaatikko.

⁶Carl Gottfried Neumann (1832–1925), saks. matemaatikko ja fyysikko.

- Ominaisuus 2. Yksikäsitteisyys. Kaksi samat reunaehdot toteuttavaa Laplacen yhtälön ratkaisua ovat korkeintaan vakioyhteenlaskettavaa vaille samat.
- Ominaisuus 3. Minimi-maksimi-ominaisuus. Koko umpinaisessa alueessa harmoninen funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa alueen reunalla.
- Ominaisuus 4. Keskiarvo-ominaisuus. Harmonisen funktion arvo jossakin pisteessä on sama kuin piste keskipisteenä olevan pallon pinnalla olevien arvojen aritmeettinen keskiarvo.

Näiden tarkat matemaattiset todistukset sivuutamme tässä yhteydessä. Ne ovat löydettävissä analyysin oppikirjoista. Lineaarisuusominaisuus antaa meille mahdollisuuden konstruoida reunaehdot toteuttava Laplacen yhtälön ratkaisu sarjamuotoisista kehitelmistä. Yksikäsitteisyys on tärkeä asia, koska se takaa sen, että löysimmepä reunaehdot toteuttavan Laplacen yhtälön ratkaisun miten tahansa, voimme vakuuttua siitä, että tämä ratkaisu on yksikäsitteinen, korkeintaan epäoleellista vakioyhteenlaskettavaa vaille. Vakioyhteenlaskettava ei aiheuta ongelmaa, koska sähkökentän laskemisessa vakion gradientti on nolla tai potentiaalin laskemisessa potentiaalin nolla- eli referenssitaso voidaan kiinnittää halutulla tavalla.

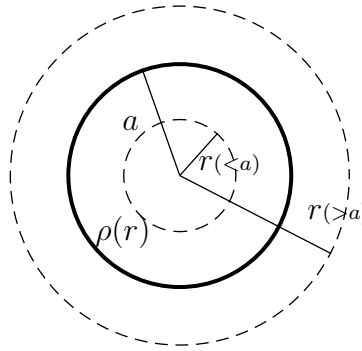
3.3.3 Pallosymmetrisen varausjakauman potentiaali ja sähkökenttä

Olkoon a -säteinen pallonmuotoinen varausjakauma, jossa on tunnettu jatkuvasti jakautunut avaruusvaraustiheys ρ , tyhjiössä kokoavaruudessa. Haluamme laskea potentiaalin ja sähkökentän pallon ulko- ja sisäpuolella. Koska nyt varaus on tunnettu, voimme laskea molemmat kentät integroimalla avaruusvarausjakauman yli. On ilmeistä, että probleemi kannattaa ratkaista pallokoordinaatistossa sijoittamalla pallon keskipiste origoon.

Jos avaruusvarausjakauma pallossa on täysin mielivaltainen, potentiaali ja sähkökenttä eivät ole näin yleisessä tapauksessa pallosymmetrisiä. Tällöin pallokoordinaatiston valinnasta syntyvä hyöty liittyy ainoastaan geometriaan. Potentiaalienttä lasketaan integroimalla yhtälön (3.27) avulla, kun differentiaalisena tilavuusalkiona käytetään pallokoordinaatiston differentiaali-geometrista tilavuusalkiota (2.68). Potentiaalista saadaan sähkökenttä muodostamalla sen negatiivinen gradientti.

Sähkökentän määrittäminen Gaussin lauseen avulla

Jos sen sijaan avaruusvarausjakauma on *homogeeninen* tai jos *se riippuu ainoastaan origosta mitatusta etäisyydestä*, $\rho = \rho(r)$, toteamme fysikaalisen intuition perusteella tai muulla tavoin, että mikään suunta ei ole erityisasemassa minkään muun suunnan kanssa ja probleemimme on siten sekä geometrian että kenttien osalta täysin pallosymmetrinen. Sähkökentän suunta on tällöin säteittäinen (radiaalinen) eli pallokoordinaatiston \mathbf{e}_r -yksikkövektorin suunta ja kentän arvo riippuu vain origosta mitatusta etäisyydestä eli pallokoordinaatiston r -koordinaatista. Tähän tilanteeseen on hyvät edellytykset soveltaa suoraan Gaussin lausetta (3.84) sähkökentän määrittämiseksi. Gaussin pinnaksi valitaan pallon kanssa samankeskisen pallopinta, jolla tuntematon sähkökenttä on itseisarvoltaan vakio ja jonka normaalin suuntainen se on (kuva 3.4).



Kuva 3.4: Täysin pallosymmetrisen sähkökentän määrittäminen Gaussin lauseen avulla. Katkoviivoitetut ympyrät kuvaavat Gaussin pintoja, jotka ovat pallon kanssa samankeskisiä pallopintoja.

Tarkastelemme ensiksi tilannetta pallon *ulkopuolella*, toisin sanoen $r > a$. Valitsemme r -säteisen Gaussin pallopinnan, jolloin yhtälö (3.84) antaa

$$(3.88) \quad \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho(r) dV \Rightarrow$$

$$\epsilon_0 E_n \oint_S dS = \epsilon_0 E_n (4\pi r^2) = Q_{tot}.$$

Sähkökentäksi saamme siten

$$(3.89) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{tot}}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > a).$$

On huomionarvoista, että tapauksessa, missä $\rho = \rho(r)$, saamme laskentapisteen ollessa pallon ulkopuolella origossa olevan pistevarauksen kentän, kun pistevarauksen suuruutena on pallon kokonaisvarausmäärä $Q_{tot} = \int_V \rho(r) dV$. Emme siis tarvitse tietoa avaruusvarausjakaumafunktion $\rho(r)$ tarkasta muodosta, jos tunnemme kokonaisvarauksen. Tilavuusintegraali ulotetaan Gaussin pinnan rajoittaman tilavuuden yli. Koska varaukset ovat vain pallossa, antaa tilavuusintegraali pallon kokonaisvarausmäärän.

Kun laskemme kenttää pallon *sisäpuolella*, $r < a$, saamme Gaussin lausetta sekä pallokoordinaatiston differentiaaligeometrista tilavuusalkiota (2.68) soveltaen

$$(3.90) \quad \begin{aligned} \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \rho(r) dV \\ &= \int_0^r \rho(r) r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr \quad (r < a). \end{aligned}$$

Homogeenisen pallosymmetrisen varausjakauman sähkökentän määrittäminen Gaussin lauseen avulla

Sovellamme seuraavaksi edellä saamiamme tuloksia, kun varausjakauma on homogeeninen eli vakio, $\rho = \rho_0$. Kokonaisvarausmäärä homogeenisesti varatussa pallossa on

$$(3.91) \quad Q_{tot} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0,$$

joten yhtälö (3.89) antaa tässä tapauksessa

$$(3.92) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > a).$$

Vastaavasti yhtälö (3.90) tuottaa sähkökentälle lausekkeen

$$(3.93) \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \mathbf{e}_r \quad (r < a).$$

Homogeenisen pallosymmetrisen varausjakauman potentiaalinn määrittäminen gradienttilauseen avulla

Seuraavaksi määritämme potentiaalit käyttäen viivaintegraalia (3.25) eli sovellamme gradienttilauseetta (2.90). Tarkastelemme ensin tilannetta pallon

ulkopuolella. Sähkökentän (3.92) viivaintegraali on

$$(3.94) \quad \begin{aligned} \phi &= - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dr = - \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (r > a). \end{aligned}$$

Vastaavasti pallon sisäpuoliseksi potentiaaliksi saamme yhtälöä (3.93) käyttäen

$$(3.95) \quad \begin{aligned} \phi &= - \int_{ref}^r \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_r dr = - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \int_{ref}^r r dr \\ &= - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + C \quad (r < a), \end{aligned}$$

missä C on vakio, jonka arvo määräytyy potentiaalın jatkuvuusehdosta pallon rajapinnalla ($r = a$). Vakion C arvoksi tulee

$$C = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}.$$

Pallon potentiaali pallon sisäpuolella on siis

$$(3.96) \quad \phi = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) \quad (r < a).$$

Sekä sähkökenttä (3.92) että potentiaali (3.94) pallon ulkopuolella lähestyvät nollaa, kun laskentapiste siirtyy äärettömyyteen. Huomaamme myös, ettei piste $r = 0$ aiheuta mitään singulariteettia pallon sisällä. Potentiaali ja sähkökenttä ovat siis kaikkialla säännöllisiä homogeenisesti varatun pallon tapauksessa. Edelleen voimme suoraan laskemalla todeta, että muodostamalla potentiaalien (3.94) ja (3.96) negatiivinen gradientti, saamme vastaavat sähkökentän lausekkeet (3.92) ja vastaavasti (3.93).

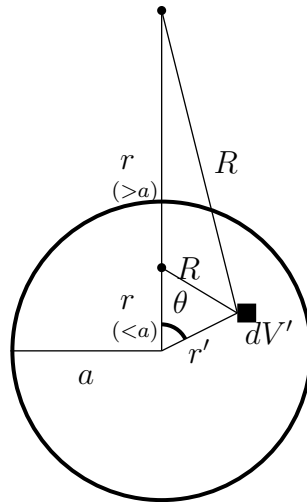
Homogeenisen pallosymmetrisen varausjakauman potentiaalın määrittäminen integroimalla

Kuten jo on todettu, potentiaali ja sähkökenttä voidaan laskea integroimalla tunnetun varausjakauman yli. Demonstroimme vielä homogeenisesti varatun pallon ($\rho = \rho_0$) potentiaalın laskemisen integroimalla ja vertaamme tuloksia edellä esitettyihin Gaussin lauseen ja gradienttilauseen eli sähkökentän

viivaintegraalin avulla saatiin tuloksiin. Kuvassa 3.5 on tilanne, jossa pallosymmetrisyyden perusteella laskentapiste on mukavuussyistä laitettu 'pystyakselille'. Tällöin kulma θ on sama kuin pallokoordinaatiston θ -kulma. On tietenkin samantekevää missä 'asennossa' pallo on avaruudessa. Laskentapistemme on joka tapauksessa yleinen. Kuvan merkinnöin voimme kirjoittaa differentiaalisen tilavuuselementin dV' etäisyyden laskentapisteeseen laajennettua Pythagoraan teoreemaa soveltaen

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}.$$

Tarkastelemme ensin tilannetta, kun laskentapisteemme on pallon ulkopuolella ($r > a$). Kuvan 3.5 merkinnöin voimme kirjoittaa integroimalla differen-



Kuva 3.5: Potentiaalın laskeminen pallosymmetrisen varausjakauman yli integroinnilla.

tiaalisessa tilavuusalkiossa dV' olevan varauksen potentiaalın yhtälön (3.27)

mukaisesti

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \\
 \phi(r) &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi \\
 &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^a \int_0^\pi \frac{r'^2 \sin \theta dr' d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} \\
 (3.97) \quad &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \left| \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}{rr'} r'^2 dr' \right. \\
 &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{[(r + r') - (r - r')]}{rr'} r'^2 dr' \\
 &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_0^a r'^2 dr' = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0 r} \quad (r > a).
 \end{aligned}$$

Kun laskentapiste on pallon sisäpuolella ($r < a$), on integrointi muodoltaan aivan samanlainen, mutta ero tulee θ :n sijoitusermissä. Tällöin on oltava tarkkana, jotta neliöjuuren juuretettava on aina ≥ 0 . Pallon sisäpuolella on myös pisteitä, joissa $r < r'$. Siksi merkitsemme

$$\begin{aligned}
 (3.98) \quad \phi(r) &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \int_0^\pi \left| \frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}}{rr'} r'^2 dr' \right. \\
 &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{[(r + r') - |r - r'|]}{rr'} r'^2 dr' \\
 &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\int_0^r \frac{[(r + r') - (r - r')]}{rr'} r'^2 dr' + \int_r^a \frac{[(r + r') - (-r + r')]}{rr'} r'^2 dr' \right) \\
 &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\int_0^r \frac{1}{r} r'^2 dr' + \int_r^a r' dr' \right) \\
 &= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) \quad (r < a).
 \end{aligned}$$

Vertaamalla edellä saatuja potentiaalilausekkeita (3.97) ja (3.98) yhtälöihin (3.94) ja vastaavasti (3.96) toteamme niiden olevan aivan samat. Gaussin lauseen soveltaminen on siis ollut perusteltua ja fysikaalinen intuitio probleemin täydellisestä symmetrisyydestä on ollut oikea. Huomaamme myös, että vaikka pallon sisällä on pisteitä, joissa $r = r'$, integraalimme suppenee kaikkialla ja potentiaalilla ei ole siten singulariteetteja myöskään pallon sisällä. Potentiaalijatkuvuus kohdassa $r = a$ on myös helposti todettavissa.

Homogeenisen pallosymmetrisen varausjakauman potentiaali reuna-arvottehtävänä

Yleispätevin tapa sähköstaattisen kenttäprobleemin ratkaisemiseksi on ratkaista potentiaali Laplacen ja Poissonin yhtälöiden avulla sopivilla reunaehdoilla. Esitämme seuraavaksi, miten homogeeninen pallovarausjakaumaprobleemi ratkaistaan fysikaalisena reuna-arvottehtävänä. Olemme jo aiemmin johdaneet sähköstaattiselle potentiaalille varausalueessa voimassa olevan Poissonin yhtälön (3.37) tai varauksettomassa alueessa voimassa olevan Laplacen yhtälön (3.38). Laplacen operaattorin esitysmuoto pallokoordinaatistossa on esitetty yhtälössä (2.108).

Tarkastelemme jälleen tilannetta erikseen pallon ulko- ja sisäpuolella. Koska pallon ulkopuolella ($r > a$) ei ole varauksia, on siellä voimassa Laplacen yhtälö. Kun otamme huomioon symmetrisyyden, toteamme, että potentiaalilla on ainoastaan r -riippuvuus. Näin ollen Laplacen yhtälö pallon ulkopuolella saa yhtälön (2.108) perusteella muodon

$$(3.99) \quad \nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0.$$

Koska potentiaali riippuu vain yhdestä muuttujasta (r), korvaamme yhtälön (3.99) osittaisderivaattamerkinnot tavallisella derivaatalla eli

$$(3.100) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 0.$$

Tämä toteutuu, jos sulkujen sisällä oleva lauseke on vakio ($= C_1$). Voimme merkitä

$$(3.101) \quad r^2 \frac{d\phi}{dr} = C_1,$$

josta saamme potentiaaliksi

$$(3.102) \quad \phi = -\frac{1}{r} C_1 + C_2,$$

missä C_1 ja C_2 ovat vielä toistaiseksi tuntemattomia vakioita.

Pallon sisäpuolella ($r < a$) on voimassa Poissonin yhtälö muodossa

$$(3.103) \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + 2r \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

Sijoittamalla yrite $\phi = Ar^2 + C_3$ toisen kertaluvun tavalliseen differentiaaliyhtälöön (3.103) ja määrittämällä tällä tavoin kerroin A , saamme yhtälön yleisen ratkaisun muodossa

$$(3.104) \quad \phi = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + C_3,$$

missä C_3 on toistaiseksi vielä tuntematon vakio.

Tuntemattomien vakioiden määrittämiseksi käytämme äärettömyydessä voimassa olevaa reunaehtoa

$$(3.105) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0$$

sekä potentiaalin ja sen derivaatan jatkuvuusehtoja kohdassa $r = a$

$$(3.106) \quad \begin{aligned} \phi_u &= \phi_s, \\ \frac{d\phi_u}{dr} &= \frac{d\phi_s}{dr}, \end{aligned}$$

missä alaindeksit u ja s viittaavat pallon ulko- ja vastaavasti sisäpuoliseen alueeseen. Näitä ehtoja käyttäen saadaan vakioiden arvoiksi

$$(3.107) \quad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0}, \\ C_2 &= 0, \\ C_3 &= \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0}, \end{aligned}$$

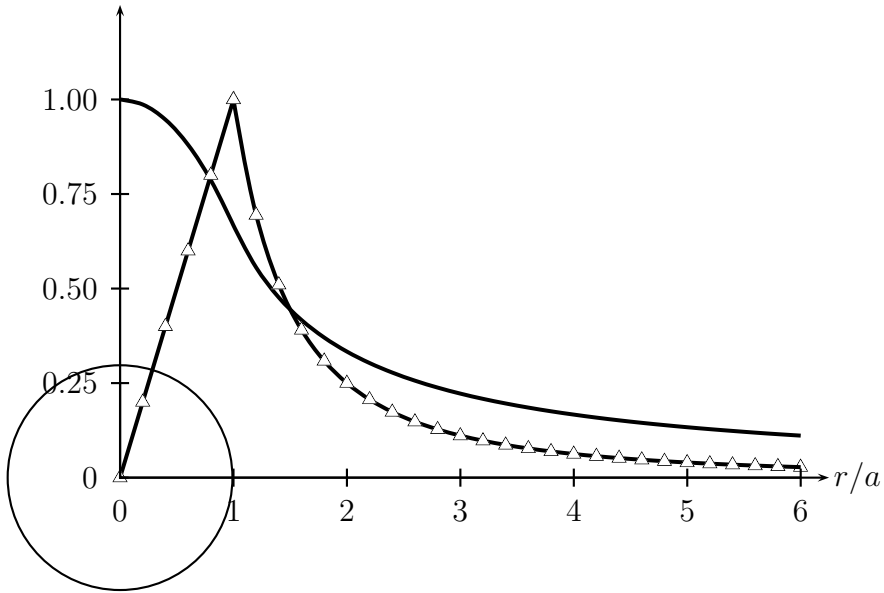
joiden avulla saamme lopulliset potentiaalit. Pallon ulkopuolella

$$(3.108) \quad \phi = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (r > a)$$

ja vastaavasti pallon sisällä

$$(3.109) \quad \phi = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) \quad (r < a).$$

Toteamme, että päädyimme samoihin tuloksiin kuin aiemmin Gaussin lausetta ja sen kanssa gradienttilausetta käyttäen sekä suoraa integrointia käyttäen.



Kuva 3.6: Homogeenisen pallosymmetrisen varausjakauman potentiaali (yhtenäinen viiva) ja sähkökenttä (Δ -viiva) a -säteisen pallon tapauksessa. Vaaka-akselilla suhteellinen etäisyys r/a pallon keskipisteestä. Pystyakselilla maksimiarvoilla normitetut suhteelliset potentiaalin ja sähkökentän voimakkuudet.

Probleemi on ratkaistavissa vähimmällä työmäärällä, kun käytetään Gaussin lausetta sähkökentän määrittämiseen ja siitä edelleen gradienttilauseella potentiaali.

Kuvassa 3.6 esitetään vielä graafisesti potentiaali ja sähkökenttä homogeenisen varausjakauman omaavan pallon tapauksessa. Huomaamme, että sähkökenttä vaimenee etäisyyden funktiona nopeammin kuin potentiaali. Potentiaalin maksimiarvo on pallon keskipisteessä. Potentiaali pienenee pallon sisällä paraabeli-käyrän mukaisesti pallon pinnalle asti, josta alkaen potentiaali vaimenee hyperbelin $1/r$ -mukaisesti. Sähkökentän voimakkuuden maksimiarvo on pallon pinnalla. Sähkökenttä kasvaa pallon sisällä lineaarisesti pallon pinnalle, josta alkaen se vaimenee $1/r^2$ -tyyppisesti. Potentiaali ja sen derivaatta ovat kaikkialla jatkuvia. Myös sähkökenttä on kaikkialla jatkuva.

Huomautus. Pallosymmetrisen varausjakauman tarkastelussa kuvittelemme varausten siis leijuvan tyhjiössä. Emme problematisoi sitä, miten varausjakauma on saatu aikaan tai miten se pysyy koossa, vaan teemme suoraan oletuksen varauksen jakautumisesta pallossa. Palloa ei tarvitse siten välttämättä mieltää ainekappaleeksi. Sen sijaan jos pallo on ainekappale, tilanne on hieman erilainen. Jos se on johde, varaus voi sijaita ainoastaan johteen pinnalla, ja koska pallo on tyhjiössä kokoavaruudessa eikä sen lähellä ole

muita varauksia, kappaleita tai materiaalirajapintoja, pallon pintavarauksen jakautuminen pallon pinnalle on homogeeninen. Jos tunnemme pallon pinnalla olevan nettovarauksen määrän, voimme laskea potentiaalin ja sähkökentän kuten edellä joko Gaussin lausetta ja gradienttilausetta käyttäen, integroimalla pallon pinnan yli tai potentiaalin reuna-arvot tehtävänä, jolloin pallon pinta muodostaa yhden vakiopotentiaalissa olevan reunan. Reunaehdona on tämä vakiopotentiaalin arvo (Dirichletin reunaehto) ja äärettömyydessä potentiaalin on mentävä nollaan. Jos vakiopotentiaalin arvoa ei tunneta, mutta sen sijaan tiedetään pallopinnalla oleva kokonaisvaraus, voidaan vakiopotentiaalin arvo selvittää käyttämällä tunnetusta nettovarauksesta Q saatavaa lisäyhtälöä $Q = \oint_S \sigma dS$, missä S on pallon pinta ja σ pallolla oleva pintavaraustiheys. Tämän ehdon mukaan ottaminen johtaa pallon pinnalla Neumannin reunaehtoon, koska yhtälön (3.80) mukaan voimme kirjoittaa $\sigma = -\epsilon_0 d\phi/dr$. Kuten arvata saattaa, probleemi on ratkaistavissa edellä mainituista vaihtoehdoista vähimmällä matemaattisella ponnistuksella käyttäen Gaussin lausetta ja gradienttilausetta. Jos pallon lähellä on muita varauksia, kappaleita tai rajapintoja, jotka siis vuorovaikuttavat Coulombin lain mukaisesti pallon varausten kanssa, aiheutuu tästä pallon pinnalla olevien varausten uudelleen järjestäytyminen eli influenssi, jonka takia pallon pinnalla oleva pintavaraus ei ole enää homogeeninen. Tämän tyyppiseen probleemiin palaamme tuonnempana. Jos pallo on eristepallo, tarvitsemme tietoa sen polarisaatiosta. Polarisaatio taas puolestaan 'käynnistyy' vasta pallon joutuessa ulkoiseen sähkökenttään. Myös tähän probleemiin palaamme tuonnempana.

■

3.3.4 Äärettömän pitkän, homogeenisesti varatun suoran viivalähteen potentiaali ja sähkökenttä

Tarkastelemme tilannetta, jossa varaussysteemin muodostaa tyhjiössä kokoa-varuudessa oleva äärettömän pitkä ja homogeenisesti varattu suora viivalähde. Olkoon viivavarauksen varaustiheys λ . Jos laskemme yhtälön (3.27) avulla potentiaalia, huomaamme, että päädyimme äärettömän pitkän viivalähteen tapauksessa ei-suppenevaan integraaliin, koska integrointi on ulotettava $-\infty$:stä $+\infty$:een. Toinen tapa on määrittää ensin sähkökenttä ja siitä gradienttilauseella potentiaali.

Probleemi on mitä ilmeisimmin sylinterisymmetrinen siten, että sähkökentällä on ainoastaan etäisyysriippuvuus varausjakaumasta eli sylinterin akselista, mutta ei sylinterikoordinaatiston muista muuttujista. Lisäksi kentän suunnan täytyy olla kohtisuorassa akselia vastaan. Kun merkitsemme etäisyyttä varausjakaumasta sylinterikoordinaatiston ρ -muuttujalla ja kun valit-

semme Gaussin pinnaksi l :n pituisen ympyräsynteripinnan, jonka akselilla on viivavaraus, voimme Gaussin lauseen (3.84) avulla kirjoittaa yhtälön

$$(3.110) \quad 2\pi\rho l E_\rho = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}.$$

Tästä voimme ratkaista sähkökentän

$$(3.111) \quad E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \quad \text{eli} \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho,$$

josta edelleen saamme potentiaalin integroimalla

$$(3.112) \quad \phi = - \int_{\rho_{ref}}^{\rho} E_\rho d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(C\rho),$$

missä C on integrointivakio, jolla määritetään potentiaalin nollassa kohdassa ρ_{ref} ($= 1/C$) ja jonka yksikkönä on siis $1/\text{m}$, koska lausekkeen, josta logaritmi otetaan tulee olla aina laaduton. On siis huomattava, että saadun *logaritmisien* potentiaalin nollassa ei ole äärettömyydessä, kuten $1/r$ -tyyppisellä potentiaalilla, vaan kun lausekkeen arvo, josta logaritmi otetaan, on yksi.

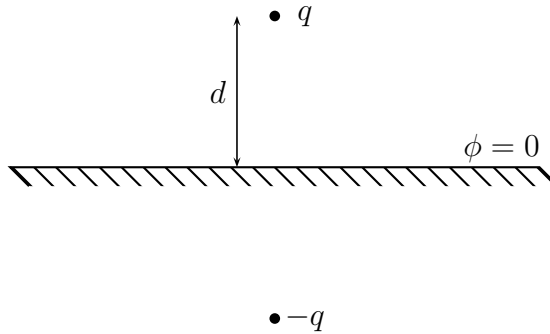
Logaritmisien potentiaalin kohdalla ilmenevät matemaattiset erikoisuudet johtuvat viime kädessä äärettömän pitkän suoran viivalähteen epäfysikaalisuudesta. Jos viivalähde on todella äärettömän pitkä, tarkoittaa se sitä, että sillä olisi myös äärettömän suuri varausmäärä ja siten myös äärettömän suuri energia, mikä kuitenkin on mahdottomuus. Matemaattisena mallina äärettömän pitkän viivalähteen oletus on kuitenkin erittäin käyttökelpoinen.

Varoitus. Kuten tarkkaavainen lukija on jo huomannut, olemme käyttäneet sylinterikoordinaatiston etäisyysriippuvuudelle symbolia ρ , jota olemme tottuneet käyttämään myös avaruusvaraustiheyden symbolina. Näitä ei kuitenkaan tule sotkea keskenään. Jos sekaantumisen vaaraa joissakin yhteyksissä ilmenee, käytämme avaruusvaraustiheydelle tarvittaessa hieman poikkeavaa kirjoitusasua ρ . ■

3.3.5 Pistevaraus johdetason yläpuolella – kuvälähdeperiaate

Tarkastelemme pistevarausta q , joka sijaitsee etäisyydellä d tasomaisesta nollapotentialissa olevasta johderajapinnasta. Tehtävänä on määrittää potentiaali johdetason varauksen puoleisessa tilassa eli kuvan 3.7 mukaan johdetason yläpuolella. Pistevarauksen takia johderajapinnalla olevat varaukset kokevat Coulombin lain mukaisen voiman ja näin ollen pinnalla tapahtuu varausten

uudelleen järjestäytymistä siten, että johdepinnan potentiaali on edelleen vakio. Johteen pintavarausjakauma σ on kuitenkin tuntematon, joten emme voi ratkaista probleemia integroimalla varausjakauman yli. Pintavarausjakauman voimme määrittää vasta, kun tunnemme sähkökentän johteen pinnalla. Potentiaali toteuttaa johdetason yläpuolisessa tilassa Laplacen yhtälön (ainoastaan lukuunottamatta varauspistettä q). Reunaehtoina ovat johdetason nollapotentiaali ja potentiaalin äärettömyydessä häviäminen.



Kuva 3.7: Kuvälähdeperiaate tilanteessa, jossa pistelähde on nollapotentiaalissa olevan johdetason yläpuolella.

Laplacen yhtälön ratkaisu löytyy tässä tilanteessa helposti, kun huomaamme, että johdetaso muodostaa nollatasapotentiaalipinnan kahden pistevarauksen systeemissä (eli varauskonfiguraatiossa), jossa varaukset sijaitsevat symmetrisesti tason suhteen ja ne ovat itseisarvoltaan yhtäsuuria, mutta vastakkaismerkkisiä. Korvaamme siis koko johdetason yhdellä pistevarauksella. Sijoitamme tämän kuvälähteen eli peilivarauksen etäisyydelle d johdetason alapuolelle kuvan 3.7 mukaisesti.

Tällöin alkuperäinen johdetaso on mitä ilmeisimmin nollapotentiaalinen tasa-arvopinta. Sijoittamalla johdetaso karteesisen (x, y, z) -koordinaatiston xy -tasoksi $z = 0$ ja valitsemalla origoksi johdetason ja varausten kautta kulkevan suoran leikkauspiste voimme kirjoittaa probleemin ratkaisun alueen $z \geq 0$ yleisessä pisteessä (x, y, z) kahden pistevarauksen potentiaalilla

$$(3.113) \quad \phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right).$$

On helppo todeta, että yhtälön (3.113) mukainen funktio toteuttaa Laplacen yhtälön ja että sen arvo on nolla, kun $z = 0$. Lisäksi se vaimenee, kuten $1/r$ äärettömyyttä lähestyttäessä. Olemme saaneet ratkaisun alkuperäiselle varaus-johdetaso-probleemille.

Varausta $-q$ kutsutaan siis kuvalähde- eli peilikuvavaraukseksi, koska sen avulla saadaan johderajapinta korvatuksi ikäänkuin varauksen $+q$ peilikuvana. On huomattava, että meidän ei tarvitse huomioida mitenkään sitä, mitä johdetasorajapinnan alapuolella on määritettäessä potentiaalia varauksen puoleisessa tilassa eli johdetason yläpuolella. Johderajapinta voi olla vain ohut metalloitu johdepinta tai johderajapinnan alapuolella voi olla johdepuoliavaruutta eli johde jatkuu äärettömyyteen. Se, mitä johdetason alapuolella on ei vaikuta mitenkään potentiaalın jakautumiseen johdetason yläpuolella, jossa lähteemme on. Kuvalähde ei ole todellinen. Se voi sijaita siis myös johteen sisällä.

Kuvalähdeperiaatteen ideana on tässä tapauksessa poistaa vakio-*potentiaalissa* oleva johdepinta ja korvata se sellaisella varauksella, että johdepinta muodostaa edelleen saman vakio-*potentiaalipinnan*. Ratkaisualueena on johdepinnan lähteen puoleinen tila. *Potentiaaliyhtälön* ratkaisun yksikäsitteisyysteoreema takaa sen, että näin löytämämme ratkaisu on todellakin ainut oikea, vaikka samallekin probleemille voi olla olemassa muodoltaan, mutta vain muodoltaan erilaisia ratkaisuja. Viimeistään numeroarvot kuitenkin osoittavat ratkaisujen olevan samat.

Koska nyt tunnemme potentiaalın (3.113), voimme määrittää johdepinnalla olevan pintavaraustiheyden yhtälön (3.80) avulla

$$(3.114) \quad \sigma(x, y) = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

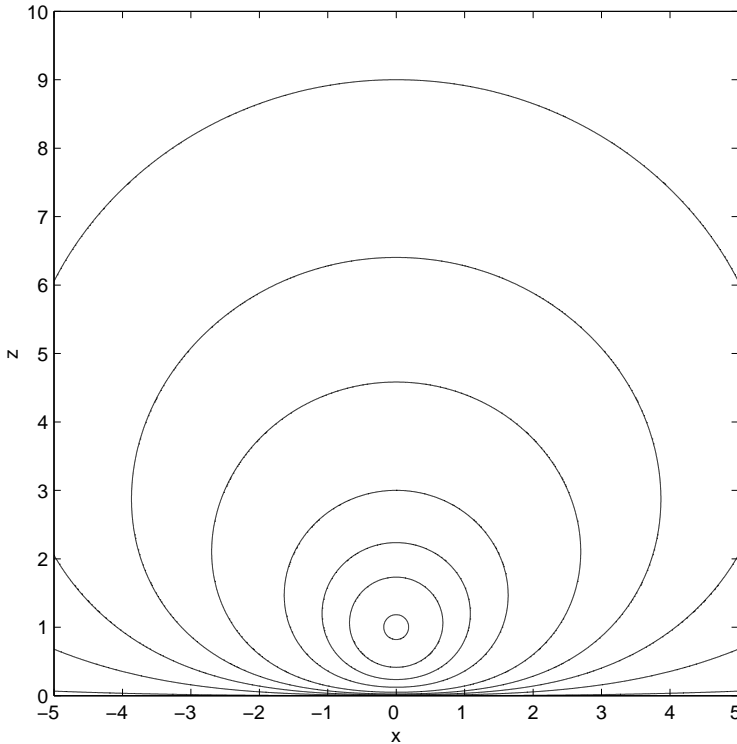
On helposti todettavissa, että integroimalla tämä koko johdetasopinnan yli saadaan johdepinnalla olevan kokonaisvarauksen määräksi $-q$, kuten pitääkin.

Tasapotentialipinnat pistelähteen ympärillä ovat 'deformoituneita pallopintoja', koska niihin vaikuttaa myös johdetasolla oleva epähomogeeninen pintavarauskajauma. Kokoavaruudessa olevan pistelähteen tasapotentialipinnathan ovat pallopintoja; vrt. esimerkiksi (3.26). Tasolla $y = 0$ ovat tasapotentialikäyrät ovat niiden pisteiden uria, joille pätee

$$(3.115) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z+d)^2}} = \text{vakio}.$$

Kuvassa 3.8 on esitetty joitakin näistä tasapotentialikäyristä. Yhtälöstä (3.115) huomaamme helposti, että nollatasapotentialikäyrä on suora, joka sijaitsee johdetasolla $z = 0$.

Huomautus 1. On ilmeistä, että alkuperäisen pistevarauksen tilalla voi olla myös yleisempi varauskonfiguraatio, kuten useammasta pistevarauksesta tai jatkuvasta avaruusvarausjakaumasta muodostuva systeemi. ■



Kuva 3.8: Tasapotentiaalikäyriä, kun pistevaraus on yksikön etäisyydellä johdetasosta.

Huomautus 2. Kvalälähdeperiaate ei ole yleispätevä periaate, mutta se soveltuu hämmästyttävän monentyyppiseen geofysiikankin kannalta tärkeään tilanteeseen sekä johde- että eriste-probleemien ratkaisuihin. Kvalälähdeperiaatteen soveltaminen vaatii jossain määrin heuristista lähestymistapaa, koska mitään yhtenäistä teoriaa sen soveltamiselle ei ole olemassa. Tulemme huomaamaan, että periaatetta voidaan soveltaa myös muuntotyypisiin kuin pelkästään johderajapintoihin sekä myös muihin fysikaalisiin kenttiin. Rajapintoja voi olla myös useampia. Siksi kvalälähdeperiaatteen idean sisäistäminen on tärkeää. Kvalälähdeperiaatetta ja sen erilaisia sähkömagneettisia sovelluksia on tutkinut Ismo Lindell⁷ työryhmineen jo useita vuosia. ■

⁷Ismo V. Lindell, s. 1939, Teknillisen korkeakoulun sähkötekniikan osaston professori 1975–2004.

3.3.6 Äärettömän pitkä, homogeenisesti varattu suora viivalähde johdetason yläpuolella

Tarkastelemme seuraavaksi tilannetta, jossa pistevarauksen tilalla on äärettömän pitkä, homogeeninen suora viivalähde, varaustiheys λ , yhdensuuntaisesti johdetason kanssa etäisyydellä d johdetasosta. Haluamme määrittää potentiaalin johdetason viivalähteen puoleisessa tilassa. On ilmeistä, että johdetaso voidaan myös tässä tapauksessa korvata kuvalähteellä, jonka sijoitamme symmetrisesti johdetason suhteen ja jonka varausvoimakkuus on itseisarvoltaan yhtäsuuri, mutta vastakkaismerkkinen alkuperäisen viivalähteen kanssa. Probleemimme on kuitenkin nyt kaksidimensioinen johtuen viivalähteen äärettömästä pituudesta. Käyttäen (x, y, z) -koordinaatistoa muutoin kuten kuvassa 3.7 ja huomioiden, että riittää tarkastella tilannetta vain tasolla $y = 0$ voimme kirjoittaa potentiaalille mielivaltaisessa laskentapisteessä (x, z) yhtälön (3.112) mukaan

$$(3.116) \quad \phi(x, z) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (z-d)^2}}{\sqrt{x^2 + (z+d)^2}}.$$

Tästä yhtälöstä näemme, että tasapotentiaalikäyrien yhtälöksi voidaan kirjoittaa

$$(3.117) \quad \frac{\sqrt{x^2 + (z-d)^2}}{\sqrt{x^2 + (z+d)^2}} = \text{vakio} = k$$

eli vaatimalla lausekkeen, josta logaritmi otetaan, arvoksi vakio k . Kun yhtälön (3.117) molemmat puolet korotetaan toiseen ja sievennetään algebrallisten laskutoimitusten avulla sekä lopuksi vielä näin saatuun polynomiyhtälöön lisätään ja vähennetään samanaikaisesti z :n kertoimen puolikkaan neliö, päädytään yhtälöön

$$(3.118) \quad x^2 + \left(z - \frac{1+k^2}{1-k^2}d\right)^2 = \frac{4k^2}{(1-k^2)^2}d^2 = \left(\frac{2k}{1-k^2}d\right)^2.$$

Tämä yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipisteenä on

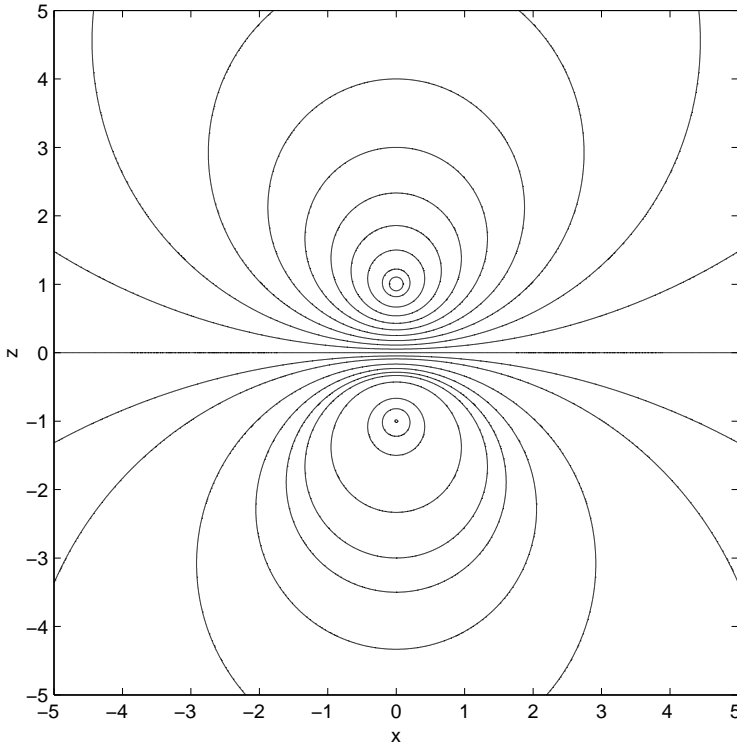
$$(3.119) \quad \begin{aligned} x_0 &= 0, \\ z_0 &= \frac{1+k^2}{1-k^2}d \end{aligned}$$

ja säteenä

$$(3.120) \quad a = \frac{2k}{1-k^2}d.$$

Ympyröitä (3.118) kutsutaan Apollonioksen⁸ ympyröiksi, jotka ovat siis niiden pisteiden uria, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä $(0, d)$ ja $(0, -d)$ määritettyjen etäisyyksien suhde on vakio ($= k$).

Kun $k = 1$ eli olemme johdetasolla, on ympyrän säde (3.120) ääretön ja keskipiste luonnollisesti myös äärettömyydessä $z_0 = \pm\infty$, jolloin ympyrästä tulee suora. Tasapotentialin arvo on tällöin nolla. Mielenkiintoista on myös huomata, että jos $k \rightarrow 0$, tasapotentialiympyrä kutistuu pisteeksi ($x = 0, z = d$). Jos taas $k \rightarrow \infty$, tasapotentialiympyrä kutistuu pisteeksi ($x = 0, z = -d$). Olemme kuitenkin johdetaso-viivalähde-probleemissa kiinnostuneita potentiaalista ainoastaan alueessa $z \geq 0$. Kuvassa 3.9 on esitetty Apollonioksen ympyröitä, kun kiinteät pisteet ovat $(0, -1)$ ja $(0, 1)$.



Kuva 3.9: Apollonioksen ympyröitä. Kun $k < 1$ ympyrät ovat tason $z = 0$ yläpuolella ja kun $k > 1$ ympyrät ovat tason $z = 0$ alapuolella.

⁸Apollonios Pergeläinen (n. 262–190 eKr.), kreik. matemaatikko.

3.3.7 Kaksidimensioinen johdesylinteri äärettömän pitkän viivalähteen kentässä

Olemme edellä päätyneet tulokseen, että viivalähde-johdetaso-kuvaviivalähde-systeemissä kaikki tasapotentiaalikäyrät ovat ympyröitä tai niiden erikoistapauksia. Tätä tulosta hyväksikäyttäen voimme kääntäen todeta, että olemme samalla tulleet ratkaisseeksi probleemin, jossa ympyräpoikkileikkauksinen kaksidimensioinen johdesylinteri on yhdensuuntainen viivalähteen kanssa. Tällöin johdesylinteri korvataan kuvaviivalähteellä, jonka sijainti määräytyy johdesylinterin säteestä sekä alkuperäisen viivalähteen sijainnista yhtälöiden (3.120) ja (3.119) mukaisesti. Johdesylinterin potentiaalin arvo voi tosin olla vain jokin tietty vakio, joka määräytyy probleemin geometrisista parametreista.

Kun $k < 1$, johdesylinteri sijaitsee tason $z = 0$ yläpuolella eli positiivisella puolella ja vastaavasti jos $k > 1$ sen negatiivisella puolella. Jos tarkastelemme tilannetta, jossa alkuperäinen viivalähteemme onkin pisteessä $(0, -d)$ ja johdesylinteri tason $z = 0$ yläpuolella (eli $k < 1$), voimme kirjoittaa viivalähteen ja sylinteriympyrän keskipisteen väliseksi etäisyydeksi

$$(3.121) \quad b = d + \left| \frac{1 + k^2}{1 - k^2} d \right| = \frac{2}{1 - k^2} d.$$

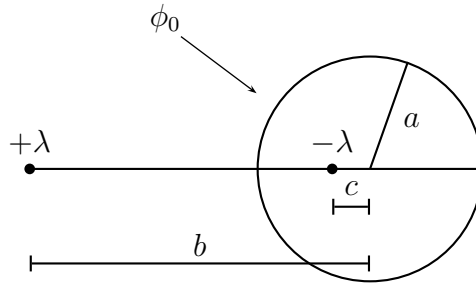
Itseisarvomerkki voi jättää pois, sillä lauseke on aina > 0 , koska $k < 1$ valitsemme mukaisesti. Sylinteriympyrän keskipisteen x -koordinaatti on tietenkin nolla. Sylinterin säde on edelleen yhtälön (3.120) mukainen. Voimme siis joko valita sylinterin säteen ja määrittää sen avulla k :n tai valita sylinterille jokin vakipotentiaalinen arvo (ϕ_0), ja katsoa minkä säteinen sylinteri on tällöin kyseessä. Tarvittaessa d :n voi määrittää yhtälöstä (3.121), jos tehtävässä on annettu vain sylinteriympyrän keskipisteen ja viivavarauksen välinen etäisyys b . Sylinteri korvataan tässä tilanteessa joka tapauksessa pisteessä $(x = 0, z = d)$ olevalla kuvaviivalähteellä, jonka avulla potentiaali on helposti laskettavissa sylinterin ulkopuolella. Sylinterin sisällä potentiaalilla on vakioarvo.

Sylinterin akselin eli ympyrän keskipisteen ja kovalähdepisteen $(0, d)$ väliseksi etäisyydeksi c saamme (kuva 3.10)

$$(3.122) \quad c = b - 2d = \left| \frac{1 + k^2}{1 - k^2} d - d \right| = \frac{2k^2}{1 - k^2} d = \frac{a^2}{b},$$

missä viimeinen muoto saadaan myös Apollonioksen ympyrän määritelmään pohjautuvasta verrannosta

$$(3.123) \quad \frac{b - a}{a - c} = \frac{b + a}{a + c}.$$



Kuva 3.10: Kaksidimensioinen johdesylinteri äärettömän pitkän viivalähteen ($+\lambda$) kentässä. Ratkaisu kuvalähdeperiaatteella. Sylinteri on vakiopotentialissa ϕ_0 .

Kun tämä verranto sievennetään, päädytään yhtälöön $c = a^2/b$. Lisäksi huomaamme, että on voimassa

$$(3.124) \quad a = kb.$$

Sylinterin vakiopotentialin arvo kytkeytyy siis geometrisiin parametreihin a ja b

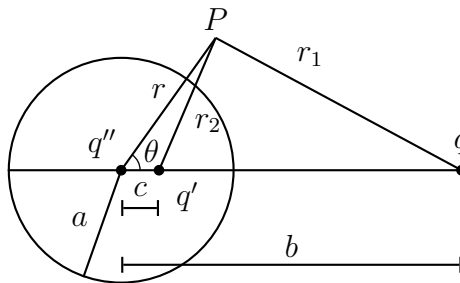
$$(3.125) \quad \phi_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{k} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Huomautus. Yhtälöitä (3.121)–(3.124) sovellettaessa on huomattava, että ne johdettiin olettamalla $k < 1$. Jos johdesylinterin ulkopuolella on positiivinen lähde $+\lambda$, on sylinterin vakiopotentialin arvo $\phi_0 < 0$, kuten yhtälöstä (3.125) huomaamme, sillä kun $b > a$, on logaritmi $\ln \frac{b}{a} > 0$. Jos viivavarausten $+\lambda$ ja $-\lambda$ paikkaa vaihdetaan keskenään, tulee vakio k korvata vakiolla $1/k$ vakiopotentialiyhtälössä (3.117) johtuen yhtälön (3.116) logaritmitermistä. Näin menettelimme yhtälössä (3.125), koska aluksi vaihdoimme viivavarausten paikkaa alkaessamme johtaa edellä saatuja tuloksia. ■

Edellä saamiemme tulosten perusteella on ilmeistä, että olemme samalla ratkaisseet probleemin, jossa johdetason lähellä on yhdensuuntaisesti sen kanssa johdesylinteri. Sylinterin pinnalla on pituussuunnassa vakio varaustiheys λ . Tämä geometria voidaan palauttaa kuvalähteiden avulla ratkaistavaan muotoon korvaamalla sekä johdesylinteri että johdetaso kuvalähteillä. Johdetasolla on influenssin johdosta varaus $-\lambda$.

3.3.8 Johdepallo pistevarauksen kentässä – Kelvinin inversioratkaisu

Tarkastelemme seuraavaksi tilannetta, jossa a -säteinen johdepallo tuodaan pistevarauksen, $+q$, kenttään. Johdepinnalla oleva varaus jakautuu coulombisen voimavaikutuksen takia uudelleen, joten pallon pinnalla on tuntematon pintavarausjakauma. Tehtävä on siten ratkaistava yleisenä reuna-arvotehtävänä. Tämän ratkaisua voi yrittää etsiä myös kuvalähdeperiaatteella. Edellä viivalähteen tapauksessa huomasimme, että sylinteri saatettiin korvata sopivalla kuvalähteellä, jonka avulla probleemi tuli helposti ratkaistuksi. Katsomme seuraavaksi löytyisikö pallolle vastaavantyyppinen ratkaisu. Etsimme siis jotakin tasapotentialipintaa, joka yhtyisi pallon pintaan. Edellä sylinterin ja viivalähteen tapauksessa tasapotentialipinnaksi tuli Apollonioksen ympyröistä koostuva sylinteripinta. Kokeilemme nyt löytyisikö vastaavanlainen 'Apollonioksen pallopinta' probleemimme ratkaisuksi. Asetamme pallon keskipisteen pallokoordinaatiston origoon. Merkitään pallon keskipisteen etäisyyttä varauksesta q b :llä. Sijoitamme pallon sisälle toistaiseksi vielä määrittämättömään pisteeseen, etäisyydelle c pallon keskipisteestä, toistaiseksi tuntemattoman kuvalähteen q' , jolla korvaamme pallopinnan. Kuvan 3.11



Kuva 3.11: Johdepallo pistevarauksen kentässä. Ratkaisu kuvalähdeperiaatteella.

merkinnöin voidaan kirjoittaa potentiaalille mielivaltaisessa laskentapisteessä P pallon ulkopuolella

$$\begin{aligned}
 (3.126) \quad \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos \theta}} \right).
 \end{aligned}$$

Probleemi on symmetrinen pallokoordinaatiston muuttujan φ suhteen, joten se ei esiinny potentiaalin lausekkeessa (3.126).

Jotta pallopinta olisi 'Apollonioksen pallo', on oltava voimassa

$$(3.127) \quad \frac{b-a}{a-c} = \frac{b+a}{a+c}.$$

Tämä yhtälö antaa

$$(3.128) \quad c = \frac{a^2}{b}.$$

Yhtälön (3.126) valossa on ilmeistä, että kahden pistevarauksen tapauksessa on olemassa vain yksi tasapotentiaalipinta, joka on pallo. Tasapotentiaalipinnan arvo on nolla, koska vain se tuottaa yhtälöstä (3.126) pallopinnan yhtälön, kuten analyttiseen geometriaan pohjautuvalla tarkastelulla on todettavissa. Varausten on oltava lisäksi erimerkkisiä. Tämä on etsimämme 'Apollonioksen pallopinta', jonka voi siis ajatella koostuvan kolmiulotteisessa avaruudessa olevista pallon isoympyröistä, joiden halkaisija yhtyy varausten q ja q' kautta kulkevaan suoraan. Nämä ympyrät ovat Apollonioksen ympyröitä, kun kiinteinä pisteinä ovat varausten q ja q' sijaintipisteet. Kun $r = a$, potentiaali $\phi(a, \theta, \varphi) = 0$ ja siten voidaan yhtälön (3.126) perusteella kirjoittaa

$$(3.129) \quad a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta = \left(-\frac{q'}{q}\right)^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta).$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön c :n paikalle $c = a^2/b$ ja vaatimalla, että yhtälö on identtisesti voimassa kaikilla θ :n arvoilla, saamme kuvavarauksen q' arvoksi

$$(3.130) \quad q' = -\frac{a}{b}q.$$

Huomaamme lisäksi, että Apollonioksen ympyröiden määritelmässä esiintyvä suhde eli pallon pinnalta varauksiin q' ja q olevien etäisyyksien suhde on myös a/b ($= -q'/q$).

Vaatus yhtälön (3.129) toteutumisesta identtisesti antaa luonnollisesti myös c :n lausekkeen $c = a^2/b$, jonka saimme jo aiemmin Apollonioksen ympyrän ominaisuuden (3.127) avulla. Apollonioksen ympyrää käyttävä tapa korostaa samalla c :n geometrista tulkintaa. Jos varauksesta q piirretään tangentti pallolle ja piirretään edelleen varauksen ja pallon keskipisteen yhdistävän janan normaali, joka kulkee tangentin ja pallon sivuamispisteen kautta, saadaan c pallon keskipisteen ja edellä piirretyn normaalin kantapisteen välisenä etäisyytenä.

Edellä oleva kuvälähdetarkastelu koskee siis tilannetta, jossa pallopinta on nollapotentiaalissa. Jos pallopinnalla on jokin toinen potentiaali ϕ_0 , kuvälähderatkaisu on edelleen voimassa, kun sitä täydennetään pallon keskipisteeseen sijoitettavalla toisella kuvälähteellä q'' . Tämän suuruus määräytyy tasapotentiaaliehdosta

$$(3.131) \quad \phi_0 = \phi(a, \theta, \varphi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}.$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa potentiaalin yleinen lauseke pallon ulkopuolella pisteessä P kolmen pistevarauksen potentiaalin superpositiona

$$(3.132) \quad \begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2rc \cos \theta}} + \frac{q''}{r} \right]. \end{aligned}$$

Todettakoon vielä, että jos pallomme on varaamaton eli sen kokonaisvaraus on nolla, niin tällöin $q' + q'' = 0$.

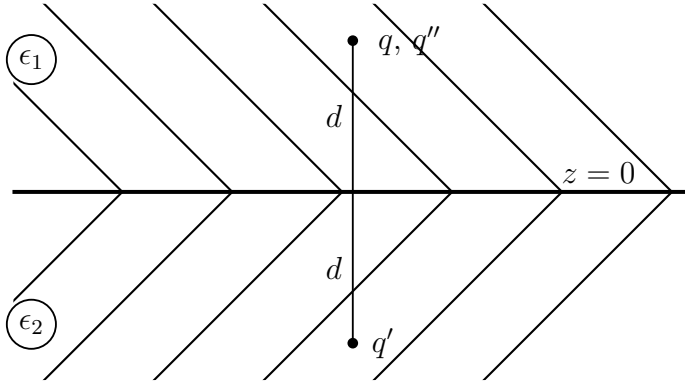
Saatua nollapotentiaalissa olevan pallon ratkaisua kutsutaan kirjallisuudessa keksijänsä mukaan nimellä *Kelvinin*⁹ inversio. Nimitys inversio juontaa siitä, että lähde- ja kuvälähdepisteiden etäisyydet pallon keskipisteestä, b ja vastaavasti c , ovat käänteisessä riippuvuussuhteessa toisiinsa ja niiden tulo on pallon säteen neliö a^2 .

3.3.9 Pistevaraus eristetasonrajapinnan lähellä

Ratkaisemme seuraavaksi kuvan 3.12 mukaisen potentiaaliprobleemin, jossa ulkoinen vapaa pistevaraus on lähellä kahden LIH-eristeen (permittiivisyydet ϵ_1 ja ϵ_2) välistä tasomaista rajapintaa. Sijaitkoon pistevaraus q aineessa 1 ja haluamme määrittää potentiaalin kaikkialla alueessa. Pistevarauksen etäisyys eristerajapinnasta on d .

Probleemin ratkaisua varten sijoitamme geometrian karteesiseen (x, y, z) -koordinaatistoon siten, että rajapinta on tasolla $z = 0$. Pistevaraus q olkoon pisteessä $(x = 0, y = 0, z = d)$. Fysikaalinen intuitio ajaa kokeilemaan probleemin ratkaisemista kuvälähdeperiaatteella korvaamalla rajapinta eli aine 2 jollakin sopivalla kuvälähteellä q' , joka sijaitsee symmetrisesti rajapinnan suhteen kohdassa $z = -d$. Tämän korvauksen jälkeen kaikkialla on laskennan kannalta ainetta 1, kun potentiaalin laskentapiste on aineessa 1. Katsomme

⁹William Thomson, lordi Kelvin (1824–1907), irlantilais-skotlantilais-englantilainen fyysikko.



Kuva 3.12: Kahden eristeen rajapintaprobleemi.

onnistuu tämä. Jos ratkaisu onnistuu kuvälähdeperiaatteella, yksikäsitteisyysteoreema takaa sen, että se on probleemin ainoa oikea ratkaisu.

Kuvan merkinnöin voidaan potentiaalille aineessa 1 kirjoittaa

$$(3.133) \quad \phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right).$$

Kun laskentapistemme on aineessa 2, voidaan aine 1 ja siinä oleva ulkoinen varaus korvata pisteeseen $(0, 0, d)$ asetettavalla toisella kuvälähteellä q'' . Näin ollen kaikkialla on ainetta 2. Potentiaali aineessa 2 on

$$(3.134) \quad \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}}$$

Kuvälähdevarausten määrittämiseksi käytetään potentiaalın ja sähkövuon tiheyskentän rajapintaehtoja (3.83) ja vastaavasti (3.79) kohdassa $z = 0$. Jälkimmäistä ehtoa voidaan käyttää, koska rajapinnalla ei ole vapaata, ulkoista varausta.

Potentiaalın jatkuvuusehto

$$\phi_1 = \phi_2$$

tuottaa yhtälön

$$(3.135) \quad \frac{q + q'}{\epsilon_1} = \frac{q''}{\epsilon_2}.$$

Sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto

$$D_{1n} = D_{1z} = \epsilon_1 E_{1z} = -\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = D_{2z}$$

tuottaa yhtälön

$$(3.136) \quad q - q' = q''.$$

Ratkaisemalla edellä olevista yhtälöistä q' ja q'' saadaan

$$(3.137) \quad \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q, \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q. \end{aligned}$$

Olemme löytäneet täten Laplacen yhtälön ja rajapintaehdot toteuttavan $1/r$ -tyyppisen potentiaaliratkaisun. Potentiaalin avulla voimme muodostaa sähkökentän \mathbf{E} ja sen avulla edelleen määrittää polarisaation \mathbf{P} . Eristeprobleemienkin ratkaiseminen on siten viime kädessä potentiaaliprobleemin ratkaisemista.

Todettakoon lopuksi, että geofysiikassa rajapintaprobleemit ovat hyvin keskeisiä, koska geofysiikan menetelmillä pyritään juuri paikantamaan erilaisten aineiden rajapintoja.

3.3.10 Eristepallo homogeenisessa sähkökentässä

Tuodaan varaamaton eristepallo (säde a , permittiivisyys ϵ) homogeeniseen sähkökenttään \mathbf{E}_0 . Sähkökenttä ja pallo ovat eristeessä, jonka permittiivisyys on ϵ_0 . Voisimme sijoittaa pallon myös väliaineeseen, jonka permittiivisyys olisi jokin muu kuin tyhjiön, mutta merkintöjen yksinkertaistamiseksi ja probleemin yleisyyttä mitenkään rajoittamatta menettelemme kuvatulla tavalla. Probleemi on luonteeltaan kolmiulotteinen. Sähkökentän vaikutuksesta pallo polarisoituu ja palloon muodostuu polarisaatiovarausta. Polarisoitunut pallo aikaansaa oman lisänsä eli kontribuutionsa homogeeniseen kenttään. Tätä kenttää kutsutaan yleisesti *sirontakentäksi*, mikä termi periytyy aaltoliikeopin kautta. Sen vaikutuksesta sähkökenttä pallon lähialueella ei ole enää homogeeninen.

Ratkaistava kokonaispotentiaali on tapana jakaa kahteen osaan

$$(3.138) \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi^p(\mathbf{r}) + \phi^s(\mathbf{r}),$$

missä ϕ^p on tässä tapauksessa homogeeniseen sähkökenttään liittyvä ns. *primaaripotentiali* ja ϕ^s on sironneen kentän potentiaali, jota kutsutaan myös *sekundaaripotentialiksi*. Primaaripotentiali on kokonaispotentiaalinn tunnettu osa. Sen sijaan sekundaaripotentialiaa ei tunneta, vaan se saadaan selvitettyksi probleemin ratkaisun avulla. Probleemi on ratkaistava yleisenä

potentiaalin reuna-arvot tehtävänä Laplacen yhtälön avulla pallon ulko- ja sisäpuolella.

Valitaan pallokoordinaatisto, jonka origo sijoitetaan pallon keskipisteseen. Probleemi on pyörähdyssymmetrinen, joten siinä ei ole atsimuuttikulma φ -riippuvuutta. Laplacen yhtälö saa siten Laplacen operaattorin (2.108) avulla muodon

$$(3.139) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Etsimme tämän yhtälön ratkaisua, joka toteuttaa probleemin rajapintaehdot ja äärettömyydessä olevan reunaehdon. Probleemin rajapintaehtoina ovat pallon pinnalla $r = a$ potentiaalin jatkuvuus ja sähkövuon tiheyden normaalkomponentin jatkuvuus. Lisäksi reunaehtona on vaatimus, että potentiaali kaukana eristepallosta lähenee homogeenisen kentän potentiaalia.

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (3.139) voidaan ratkaista ns. muuttujien separointi- eli erottelumenetelmällä, jossa yhtälöön sijoitetaan *yrite*

$$(3.140) \quad \phi(r, \theta) = Z(r)P(\theta).$$

Yritteessä on siis pelkästään r :stä riippuva funktio Z ja pelkästään θ :sta riippuva funktio P . Sijoittamalla yrite yhtälöön (3.139) sekä sieventämällä päädytään yhtälöön, jossa osittaisderivaatat voidaan korvata tavallisilla derivaatoilla, koska Z ja P ovat vain yhden muuttujan funktioita

$$(3.141) \quad \frac{1}{r^2} P \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0.$$

Jaetaan tämä yhtälö puolittain yritteellä (3.140) ja kerrotaan puolittain r^2 :lla, jolloin saadaan

$$(3.142) \quad \frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right).$$

Tämän yhtälön vasen puoli riippuu ainoastaan r :stä ja oikea puoli ainoastaan θ :sta. Ainoa mahdollisuus, millä r :stä riippuva funktio voi olla yhtäsuuri kuin θ :sta riippuva funktio kaikilla r :n ja θ :n arvoilla on, että molempien funktioiden on oltava sama vakio k . Vakiota k kutsutaan separointivakioksi.

Yhtälön oikeasta puolesta seuraa,

$$(3.143) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0,$$

joka on *Legendren* yhtälö (2.216) ja jossa k :ksi on valittava $k = n(n+1)$, jotta ratkaisuna ovat Legendren polynomit P_n astetta n . Yhtälössä (2.216)

tulee tehdä muuttujan vaihdos ja merkitä $x = \cos \theta$, jotta päästään yhtälön (3.143) mukaiseen esitysmuotoon. Tarvitaan myös ensimmäisen ja toisen kertaluvun ketjuderivointisääntöä. Kääntäen voidaan tietysti tehdä myös muuttujan vaihdos $\theta = \arccos x$ yhtälöön (3.143), jotta päästään yhtälön (2.216) mukaiseen esitysmuotoon.

Yhtälön (3.142) vasen puoli saa k :n valinnan johdosta muodon

$$(3.144) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z,$$

jonka ratkaisut ovat

$$(3.145) \quad \begin{aligned} Z_n &= r^n, \\ Z_n &= r^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

Voimme kirjoittaa Laplacen yhtälön yleisen ratkaisun pallokoordinaatistossa (ilman φ -riippuvuutta) yritteen (3.140) mukaisesti kahden funktion tulona

$$(3.146) \quad \begin{aligned} \phi_n &= r^n P_n(\theta), \\ \phi_n &= r^{-(n+1)} P_n(\theta). \end{aligned}$$

Tulofunktiota muodostettaessa on huomioitava, että vain saman n :n arvon omaavat funktiot kerrotaan keskenään, koska vain tällöin yhtälön (3.142) molemmat puolet ovat sama vakio $k = n(n+1)$, joka on separoitumisen edellytys.

Laplacen yhtälön lineaarisuusominaisuuden mukaan (ks. s. 100) edellä olevista ratkaisuista koostuvat erilaiset äärelliset ja äärettömät summausekkeet ja lineaarikombinaatiot ovat myös Laplacen yhtälön ratkaisuja. Tämän johdosta voimme valita fysikaaliseen probleemiimme sopivat yhtälöiden (3.146) mukaiset ratkaisut.

Edellä saatu Laplacen yhtälön yleinen ratkaisu sisältää kaikki erityyppisistä lähteistä tulevat osuudet. Jos nimittäin $n = 0$, ϕ on vakio, mikä on Laplacen yhtälön triviaaliratkaisu itse asiassa kaikissa koordinaatistoissa. Lisäksi saadaan pistevarauksen $1/r$ -tyyppinen potentiaali, ja kun $n = 1$, saadaan dipolin potentiaali $r^{-2} \cos \theta$.

Alamme soveltaa saamaamme yleistä potentiaaliratkaisua palloprobleemiimme. Probleemissamme ei ole vakiopotentiaalia edellyttävää reunaehtoakaan eikä ulkoista vapaata varausta, joten voimme jättää vakiotermin ja $1/r$ -tyyppisen termin jo tällä perusteella pois. Kokeilemme, riittääkö ottaa mukaan vain kaksi termiä potentiaaliksi yksikäsitteiseksi määrittämiseksi. Näin voimme menetellä, koska muodostimmepa potentiaaliprobleemin ratkaisun miten tahansa, ainoa vaatimus on, että sen on toteutettava Laplacen yhtälö

sekä reuna- ja rajapintaehdot. Kirjoitamme potentiaalille ϕ_1 pallon ulkopuolella

$$(3.147) \quad \phi_1(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (r \geq a).$$

Pallon sisäpuolella olevalle potentiaalille ϕ_2 kirjoitamme vastaavasti

$$(3.148) \quad \phi_2(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (r \leq a).$$

Tehtävänä on nyt määrittää vakiokertoimet A_1 , A_2 , C_1 ja C_2 siten, että rajapintaehdot ja potentiaalien yhtyminen homogeenisen sähkökentän potentiaaliin kaukana pallosta toteutuvat. On ilmeistä, että $\phi_1 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$, kun olemme kaukana pallosta. Lauseke $\phi^p = -E_0 r \cos \theta$ on nimittäin probleemien primaaripotentiaali eli vakiokentän \mathbf{E}_0 potentiaali pallokoordinaatistossa, kuten muodostamalla nabra on helposti todettavissa. Näin ollen valitaan $A_1 = -E_0$. Jotta potentiaali on pallon sisällä kaikkialla säännöllinen, valitsemme $C_2 = 0$. Jäljelle jää vielä kaksi vakiota A_2 ja C_1 . Vastaavasti meillä on kaksi rajapintaehto eli potentiaalien ja sähkövuon tiheyden normaalikomponenttien jatkuvuusehdot, joten niistä saamme tarvittavat yhtälöt vakioiden kiinnittämiseksi.

Potentiaalien jatkuvuus $\phi_1 = \phi_2$ kohdassa $r = a$ tuottaa yhtälön

$$(3.149) \quad -E_0 a + C_1 a^{-2} = A_2 a.$$

Sähkövuon tiheyden normaalikomponenttien jatkuvuusehto $D_{1r} = D_{2r}$, ($D_r = -\epsilon \partial \phi / \partial r$), kohdassa $r = a$ tuottaa yhtälön

$$(3.150) \quad \epsilon_0 (E_0 + 2C_1 a^{-3}) = -\epsilon A_2.$$

Näistä yhtälöistä saadaan

$$(3.151) \quad A_2 = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0$$

ja

$$(3.152) \quad C_1 = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} a^3 E_0.$$

Nämä määritettyämme voimme todeta, että olemme ratkaisseet annetun probleemin. Potentiaali pallon ulkopuolella on siis

$$(3.153) \quad \phi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

ja pallon sisäpuolella

$$(3.154) \quad \phi_2(r, \theta) = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 r \cos \theta \quad (r \leq a).$$

On vielä syytä korostaa, että sopivan ratkaisun löytämisessä käytetään vahvasti probleemin fysikaalista luonnetta hyväksi valittaessa termejä Laplacen yhtälön yleisestä ratkaisusta. Mukaan otetaan vain fysikaalisesti järkevän ratkaisun tuottavat termit. Esimerkiksi singulaarisuustermejä ei kelpuuteta mukaan.

Koska olemme nyt saaneet potentiaalin selvitetyksi, voimme määrittää sähkökentän muodostamalla potentiaalin negatiivisen gradientin. Kun muodostetaan nabla pallokoordinaatistossa, sähkökentäksi pallon ulkopuolella saadaan

$$(3.155) \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_1 = \mathbf{E}_0 - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} a^3 E_0 \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (r \geq a).$$

Pallon sisäpuolella sähkökenttä on

$$(3.156) \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \mathbf{E}_0 \quad (r \leq a).$$

Huomaamme, että sähkökenttä on siis vakio pallon sisällä ja suunnaltaan sama kuin \mathbf{E}_0 . Lisäksi se on riippumaton pallon säteestä. Kentän itseisarvo on kuitenkin pienempi kuin alkuperäisen homogeenisen kentän itseisarvo, koska $\epsilon \geq \epsilon_0$. Kentän pieneneminen pallon sisällä aiheutuu pallon pinnalla olevista polarisaatiovarauksista, jotka aikaansaavat pallon sisälle alkuperäisen kentän kanssa vastakkaisuuntaisen kentän. Tätä kenttää kutsutaan *depolarisoivaksi* kentäksi.

Pallon ulkopuolella sähkökenttä on vakiokenttä \mathbf{E}_0 lisättynä sirontakentällä \mathbf{E}^s . Sirontakenttä on yhtälön (3.155) mukaan itse asiassa sama kuin origossa olevan pistedipolin kenttä, jonka dipolimomentti on

$$(3.157) \quad \mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \mathbf{E}_0.$$

Pallon polarisaatioksi \mathbf{P}_2 saadaan edelleen yhtälöiden (3.66) ja (3.74) mukaan

$$(3.158) \quad \mathbf{P}_2 = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}_2 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \mathbf{E}_0.$$

Huomataan, että dipolimomentti $\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{P}_2$ eli dipolimomenttitiheys kerjaa pallon tilavuus.

Edellä jo todettiin, että pallon sisälle muodostuu depolarisoiva kenttä, jonka suunta on vastakkainen alkuperäisen kentän \mathbf{E}_0 suunnan suhteen. Sitä on tarkoituksenmukaista määrittellä *depolarisaatiokerroin* L pallon sisällä olevan kentän voimakkuuden \mathbf{E}_2 ja polarisaation \mathbf{P}_2 avulla seuraavasti

$$(3.159) \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 - L\mathbf{P}_2.$$

Sijoittamalla tähän pallon sisällä oleva kentän voimakkuus (3.156) sekä relaatio $\mathbf{P}_2 = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}_2$ saadaan pallon depolarisaatiokerroimeksi

$$(3.160) \quad L = \frac{1}{3\epsilon_0}.$$

Tuntemalla polarisaatio \mathbf{P}_2 voidaan vielä määrittää polarisaatiovaraustiheddet

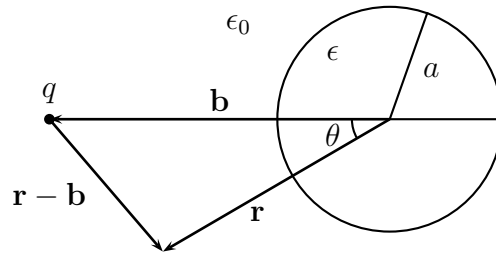
$$(3.161) \quad \begin{aligned} \rho_P &= -\nabla \cdot \mathbf{P}_2 = 0, \\ \sigma_P &= \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P}_2 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_0 = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 \cos \theta. \end{aligned}$$

Näin olemme demonstroineet potentiaaliprobleemin täydellisen ratkaisemisen ja sen, miten saadun potentiaalın avulla voidaan määrittää muut kenttäsuureet. Tämä esimerkki on tärkeä vertailukohde eli referenssi monissa käytännön kenttäteoreettisissa tarkasteluissa.

3.3.11 Eristepallo pistevarauksen kentässä

Edellä toimme eristepallon alunperin homogeeniseen eli vakiosähkökenttään. Seuraavaksi tarkastelemme tilannetta, kun eristepallo tuodaan epähomogeeniseen, joskin radiaaliseen eli säteettäiseen, pistevarauksen sähkökenttään. Olemme jo aiemmin tarkastelleet johdepallon potentiaalia pistevarauksen kentässä. Nyt siis tutkimme vastaavaa tilannetta, kun johdepallon tilalla onkin eristepallo. Tämä probleemi on paitsi geofysiikan sovellusten näkökulmasta geometrialtaan tärkeä, myös kovalähdeperiaatteen soveltamisen kannalta mielenkiintoinen. Kelvinin ajoista alkaen 1800-luvun puolesta välin on probleemin ratkaisemista kovalähdeperiaatella yritetty intensiivisesti, mutta sille ei ole löytynyt yleisessä tapauksessa kovalähderatkaisua. Probleemi joudutaankin ratkaisemaan Laplacen yhtälön avulla yleisenä reuna-arvotehtävänä. On kuitenkin eräitä erikoistapauksia, joissa kovalähdeperiaatetta voidaan käyttää. Näiden tapauksien kovalähderatkaisut ovat tulleet yleiseen tietoisuuteen vasta 1990-luvulla. Yhteen tällaiseen, yli sata vuotta unohduksissa olleeseen kovalähderatkaisuun, palaamme sähköisen virtausstatiikan yhteydessä.

Pistevarauksen q etäisyys pallon (säde a , permittiivisyys ϵ) keskipisteestä olkoon b . Pallo ja pistevaraus sijaitkoon väliaineessa, jonka permittiivisyys on ϵ_0 . Sijoitetaan pallokoordinaatiston origo pallon keskipisteeseen. Merkitään yleisen laskentapisteen (r, θ, φ) paikkavektoria \mathbf{r} :lla ja pistevarauksen paikka-vektoria \mathbf{b} :lla. Tällöin kuvan 3.13 mukaisesti laskentapisteen ja pistevarauksen välinen vektori on $\mathbf{r} - \mathbf{b}$. Probleemi on mitä ilmeisimmin pyörähdysym-



Kuva 3.13: Eristepallo pistevarauksen q kentässä.

metrinen, kun vektoria \mathbf{b} pidetään pyörähdysakselina, joten probleemissa ei ole atsimuuttikulma φ -riippuvuutta. Niinpä Laplacen yhtälön yleinen ratkaisu voidaan ilmaista edellä saatujen separoidun yhtälön ratkaisujen avulla. Pallon ulkopuolella potentiaali muodostuu pistevarauksen aikaansaamasta primaaripotentiaalista sekä pallon polarisaatiovarausten synnyttämästä sekundaaripotentiaalista. Pallon ulkopuoliseksi potentiaaliksi voidaan siten kirjoittaa

$$(3.162) \quad \phi_1(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-(n+1)} P_n(\theta) \quad (r \geq a),$$

kun Laplacen yhtälön yleisestä ratkaisusta (3.146) otetaan mukaan vain säännöllisen, äärettömyydessä häviävän, potentiaalın tuottavat termit.

Pallon sisäpuolella ratkaisuun kelpuutetaan vain r^n :n sisältävät termit, koska muutoin syntyisi singulariteetteja origon sijaitessa pallon keskipisteessä ($r = 0$). Pallon sisäpuoliseksi potentiaaliksi voidaan siten kirjoittaa

$$(3.163) \quad \phi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n P_n(\theta) \quad (r \leq a).$$

Kertoimet A_n ja B_n ovat toistaiseksi tuntemattomia vakioita. Mukaan on otettu nyt ääretön määrä termejä. Syy tähän on siinä, että haluamme siirtää pistevarauksen sisältävän termin summeerausmerkin 'sisälle' kehittämäl-

lä $1/|\mathbf{r} - \mathbf{b}|$ päättymättömäksi sarjaksi Legendren polynomien avulla. Yhtälöissä (2.221) ja (2.222) on esitetty tarvittavat sarjakehitelmät. Soveltamalla näitä sarjakehitelmiä tilanteeseemme voidaan kirjoittaa

$$(3.164) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\theta) \quad (r < b),$$

$$(3.165) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^n P_n(\theta) \quad (r > b).$$

Merkitään vakiota $q/(4\pi\epsilon_0) = C$. Alueessa $r < b$ voimassa olevaa sarjakehitelmää (3.164) käytetään rajapintaehdojen soveltamisessa kohdassa $r = a$, koska $r = a < b$. Näin ollen rajapintatarkastelussa pallon ulkopuolella on voimassa yhtälöstä (3.162) saatava muoto

$$(3.166) \quad \phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{r^n}{b^{n+1}} + \frac{A_n}{r^{n+1}} \right] P_n(\theta) \quad (r < b).$$

Tuntemattomat kertoimet määritetään rajapintaehdoista kohdassa $r = a$

$$(3.167) \quad \phi_1(a, \theta) = \phi_2(a, \theta)$$

ja

$$(3.168) \quad -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\epsilon \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}.$$

Merkitään $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, jolloin yhtälö (3.168) saa muodon

$$(3.169) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_r \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a}.$$

Rajapintaehdojen (3.167) ja (3.169) soveltaminen tuottaa yhtälöryhmän

$$(3.170) \quad \begin{aligned} C \frac{a^n}{b^{n+1}} + A_n a^{-(n+1)} &= B_n a^n \\ nC \frac{a^{n-1}}{b^{n+1}} - (n+1)A_n a^{-(n+2)} &= \epsilon_r n B_n a^{n-1}. \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän yhtälöt tulevat siitä, että n :nnessä termissä $P_n(\theta)$:n kertoimien on oltava samat yhtälöissä (3.166) ja (3.163) eli vaaditaan yhtälöiden toteutuvan identtisesti termi termiltä. Ratkaisemalla vakiot saadaan

$$(3.171) \quad \begin{aligned} A_n &= -C \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + \frac{n+1}{n}} \frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}}, \\ B_n &= \frac{C}{b^{n+1}} \frac{2n+1}{n(\epsilon_r + 1) + 1}. \end{aligned}$$

Näiden avulla voidaan kirjoittaa lopulliset ratkaisut. Pallon ulkopuolella ($r \geq a$) potentiaali on

$$(3.172) \quad \phi_1(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} - \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{b} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n(\epsilon_r + 1) + 1} \left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\theta) \quad (r \geq a).$$

Pallon sisäpuoliseksi ($r \leq a$) potentiaaliksi tulee

$$(3.173) \quad \phi_2(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{n(\epsilon_r + 1) + 1} \left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\theta) \quad (r \leq a).$$

Saimme tulokseksi päättymättömät summalausekkeet. Sarjojen suppeneminen eli konvergenssi on aina oma probleeminsa. Helposti toteamme, että sarjojen yleinen n :s termi lähestyy nolaa, kun n lähestyy ääretöntä. Siten sarjojen suppenemisen välttämätön edellytys on ainakin voimassa. Sen riittävyys vaatisi tarkemman matemaattisen analyysin, joka kuitenkin sivuutetaan.

3.3.12 Loppuhuomautus sähköstatiikan potentiaaliprobleemeista

Olemme läpikäyneet osin varsin seikkaperäisestikin erilaisia sähköstatiikan potentiaaliprobleemeja. Näillä probleemeilla on tärkeä merkitys jatkossa analysoidessamme muita kenttiä. Tulemme huomaamaan, että eri kenttien välillä on samankaltaisuutta eli *analogiaa*, puhutaan myös *dualismista*, jonka avulla jo olemassa olevia ratkaisuja voidaan sopivin parametrimuutoksilla soveltaa fyysikaalisesti aivan erilaisten, mutta matemaattiselta teorialtaan samankaltaisten kenttien tarkasteluissa. Siksi sähköstatiikan kenttäprobleemit muodostavat tärkeän prototyypin muidenkin kenttien kenttäprobleemeille.

Saamamme ratkaisut ovat tarkkoja eli eksakteja. Niissä ei ole tehty mitään approksimaatioita. Siksi tällaiset analyttisesti ratkaistut probleemit muodostavat tärkeän vertailukohdan numeeristen menetelmien soveltamisessa geometrialtaan monimutkaisempien probleemien ratkaisemiseksi. Numeeristen menetelmien toimivuutta voidaan testata vertaamalla niiden antamia tuloksia analyttisesti ratkeavien probleemien antamiin tuloksiin.

Analyttisesti ratkeavien probleemien joukko on äärellinen, mutta siihen kuuluu hyvin laaja joukko geofysiikan sovelluksissa tärkeitä geometrioita, joista pallo ja sylinteri ovat keskeisiä. Todettakoon vielä lopuksi, että kahdessa dimensiossa analyttisesti ratkeavien potentiaaliprobleemien joukko on geometrialtaan hyvin laaja, kun käytetään kompleksifunktioita ja konformikuvaustekniikkaa. Funktioteoriasta eli kompleksianalyysistä tiedetään,

että kompleksianalyttisen funktion reaali- ja imaginaariosa toteuttavat ns. Cauchy-Riemannin¹⁰ differentiaaliyhtälöt, joista seuraa, että reaali- ja imaginaariosa toteuttavat myös Laplacen yhtälön. Näin ollen minkä tahansa kompleksianalyttisen funktion reaali- ja imaginaariosa ovat jonkin potentiaaliprobleemin ratkaisuja. Konformikuvauksessa muunnetaan jonkin alueen tunnettu potentiaaliratkaisu vastaamaan pisteittäin jonkin toisen, viivojen väliset kulmat säilyttävän eli konformisen muunnoksen avulla muodostetun, alueen ratkaisua. Konformikuvauksen käyttöä emme kuitenkaan esittele tarkemmin tässä esityksessämme.

¹⁰Augustin Cauchy (1789–1857), ransk. matemaatikko. Bernhard Riemann (1826–1866), saks. matemaatikko.

Luku 4

Sähköinen virtausstatiikka

Olemme tähänastisissa tarkasteluissa lähteneet siitä, että varaukset ovat olleet valitussa referenssisysteemissä eli koordinaatistossa täysin levossa. Tarkastelemme seuraavaksi varausten liikettä ja määrittelemme tärkeät käsitteet sähkövirta ja sähkövirrantiheys sekä johdamme varauksen säilymislain matemaattisen esitysmuodon. Tarkastelu on voimassa yleisesti, myös kun aikariippuvuus on mukana. Palaamme näiden jälkeen otsikossa mainittuun virtausstatiikkaan, jossa aikariippuvuutta ei nimensä mukaisesti ole.

4.1 Sähkövirta ja virrantiheys

Varausten liikettä kutsutaan yleisesti *sähkövirraksi*. Varausten liike voi olla itse aineen virtauksen mukana tapahtuvaa liikettä eli *konvektiota*. Varaukset voivat liikkua aineessa myös johtumalla niihin kohdistuvan ulkoisen voiman, kuten sähkökenttään liittyvän voiman vaikutuksesta, jolloin puhutaan *konduktiosta*. Tyhjiössä eli aineettomassa tilassa tapahtuvaa varausten liikettä pidetään konvektiona. Johtuminen sen sijaan tapahtuu aina väliaineessa.

Geofysiikassa konvektiivista sähkövirtausta ovat esimerkiksi Auringosta peräisin olevien varattujen hiukkasten kulkeutuminen Maata kohti ja yleisestikin ilmakehän sähköilmiöihin liittyvät sähkövirrat. Kiinteän maan geofysiikassa ja sen sovelluksissa ollaan kuitenkin enemmän tekemisissä konduktiivisen sähkövirtauksen kanssa. Siksi esityksessämmekin painotamme sitä. Oletamme lisäksi, että itse väliaine on levossa.

Erilaisissa aineissa on erilaisia varauksenkuljettajia. Metalleissa, metallimineraaleissa ja muissa ns. elektronisissa johteissa ne ovat elektroneja. Elektrolyytissä ioniliuoksissa varauksenkuljettajina ovat positiivisesti ja negatiivisesti varautuneet ionit. Näin myös useissa geologisissa materiaaleissa, varsinkin seosmateriaaleissa. Kivilajeja ja niiden mineraaleja pidetään kiteisinä

ioniliuoksina. Puolijohteissa varauksenkuljettajina ovat elektronit ja aukot.

Sähkövirta määritellään matemaattisesti jonkin poikkipinnan läpi aikayksikössä liikkuvana nettovarausmääränä

$$(4.1) \quad I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt},$$

missä siis dQ on poikkipinnan läpi kulkeutuva nettovarausmäärä ajassa dt . On huomattava, että nettovarausmäärä on vain ajan funktio $Q = Q(t)$ ja että sähkövirta näin määriteltynä on skalaarisuure.

Sähkövirran yksikkönä on SI-yksikköjärjestelmässä ampeeri, A, ranskalaisen fyysikon Ampèren¹ mukaan. Määritelmän (4.1) mukaisesti ampeeri on sama kuin C/s.

Vaikka sähkövirta I on skalaarisuure, on tapana puhua myös sähkövirran suunnasta. Tällä suunnalla ei tule kuitenkaan ymmärtää vektoriin liittyvää suuntaa, vaan sähkövirran suunnalla tarkoitetaan positiivisten varausten liikesuuntaa, jolloin siis negatiiviset varaukset kulkevat vastakkaiseen suuntaan. Tästä johtuu, että negatiivisten varausten kontribuutio sähkövirtaan on kuitenkin samansuuntainen kuin positiivisten varausten liikesuunta.

Koska sähkövirta on varausten liikettä, on kuitenkin tarkoituksenmukaista määritellä siihen liittyvä vektorikenttä, joka kuvaa liikettä – virtausta – ja sen suuntaa. Oletamme aluksi, että on vain yhdentyypisiä varauksenkuljettajia q_i , joilla kaikilla on sama nopeus \mathbf{v}_i jossakin differentiaalisessa tilavuudessa. Jos ajatellaan, että kuhunkin varaukseen q_i liitetään sen liikettä kuvaava nopeusvektori \mathbf{v}_i ja että tällaisten varausten tiheys eli lukumäärä tilavuusyksikköä kohden on N_i , yksikkönä kpl/m³, kuvaa suure $N_i q_i \mathbf{v}_i$ varausten virtausta tilavuudessa eli varausten virtaustiheyttä. Suurelle käytetään yleisesti symbolia \mathbf{J} ja sitä kutsutaan *virrantiheydeksi* tai sähkövirrantiheydeksi. Koska käytännössä varauksenkuljettajia on etumerkiltään, suuruudeltaan ja nopeudeltaan monenlaatuisia, jotka kaikki aikaansaavat oman kontribuutionsa varausten virtauskenttään, tulee kokonaisvirrantiheydeksi kirjoittaa

$$(4.2) \quad \mathbf{J} = \sum_i N_i q_i \mathbf{v}_i.$$

Makroskooppisesti tarkasteltuna varauksia on useimmiten hyvin suuri määrä differentiaalisissa tilavuuksissa. Niin muodoin yksittäisen varauksen nopeus ei ole mielekäs lähtökohta kokonaisvirrantiheyden määrittämiseksi. Yhtälön (4.2) sijasta onkin järkevää kirjoittaa virrantiheydelle

$$(4.3) \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

¹André Marie Ampère (1775–1836), ransk. fyysikko.

missä kokonaisavaruusvaraustiheyttä on merkitty ρ :lla (yksikkönä C/m^3) sekä varausten keskimääräistä nopeutta \mathbf{v} :llä (yksikkönä m/s). Virrantiheys on siis vektorifunktio ja sen yksiköksi tulee A/m^2 . Se on paikan ja ajan funktio ja sillä on sähkömagneettisessa kentäteoriassa hyvin keskeinen asema.

4.2 Varauksen säilymislaki

Empiirisesti ja kokeellisesti on havaittu, että suljetussa systeemissä eli systeemissä, joka ei vaihda ainetta ympäristönsä kanssa, kokonaisvarausmäärä on muuttumaton. Tämä havainto on johtanut siihen käsitykseen, että varausta ei voi syntyä eikä hävitä. Varausmäärä siis säilyy suljetussa systeemissä. Tätä havaintoa kutsutaan siitä syystä varauksen säilymislakeksi ja se on yksi klassillisen fysiikan keskeisiä säilymislakeja. Laki voidaan matemaattisesti ilmaista virrantiheyden \mathbf{J} ja avaruusvaraustiheyden ρ avulla.

Tarkastellaan jotakin tilavuutta V avaruudessa, jota rajoittaa umpinainen säännöllinen pinta S , jonka ulkonormaaliyksikkövektori on \mathbf{n} . Tilavuuteen menevä eli ulkonormaalin suuntaa vastaan menevä nettovirta on

$$(4.4) \quad I = - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Toisaalta sähkövirran määritelmän mukaan

$$(4.5) \quad I = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

missä ρ on tilavuudessa V hetkellisesti olevan varauksen avaruusvaraustiheys. Kun pidämme tilavuutta ajan suhteen muuttumattomana, voidaan derivointi siirtää integraalimerkin alle ja samalla muuttaa tavallinen derivaattamerkki osittaisderivaataksi, koska avaruusvaraustiheys riippuu sekä paikasta että ajasta. Näin ollen voimme kirjoittaa yhtälön (4.5) muotoon

$$(4.6) \quad I = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Käyttämällä Gaussin lausetta muuntamaan yhtälön (4.4) pintaintegraali tilavuusintegraaliksi saadaan

$$(4.7) \quad I = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV$$

Koska yhtälöiden (4.7) ja (4.6) on oltava voimassa mille tahansa tilavuudelle V , tulee integrandien olla samat, ja siten päädytään differentiaali- muotoiseen yhtälöön

$$(4.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Varauksen säilymislain mukaan johonkin tilavuuteen virtaava varausmäärä aikayksikössä ilmenee tilavuudessa olevan varauksen tiheysmuutoksena ajan suhteen. Jos esimerkiksi varausta tulee koko ajan lisää ilman, että sitä poistuu samanaikaisesti tilavuudesta, varaustiheyden on kasvettava, koska varausta ei synny tai häviä tilavuudessa.

Varauksen säilymislaki eli *jatkuvuusyhtälö* (4.8) on voimassa kaikille varauslajeille sekä kaikille virrantiheyksille, sekä konduktio- että konvektiovirroille, kaikkialla maailmankaikkeudessa sen jokaisessa pisteessä kaikkina hetkinä. Kysymys ei ole siis mistään kovin vähäpätöisestä laista, joten on syytä laittaa se laatikon sisälle muistutukseksi lain perustavanlaatuisesta luonteesta:

$$(4.9) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.}$$

4.3 Sähkönjohtavuus

Sähkövirran kulkeutuminen väliaineessa aiheutuu varauksiin kohdistuvasta voimasta sekä varausten satunnaisesta lämpöliikkeestä. Jälkimmäinen riippuu lämpötilasta ja koska se on satunnaista, varausten eri suuntiin tapahtuvaa liikettä kussakin pisteessä, se ei ole syynä varsinaiseen konduktiiviseen sähkövirtaan eli konduktiovirtaan. Konduktiovirran aikaansaa useimmiten varausten vuorovaikutus sähkömagneettisen kentän kanssa.

Mekaniikasta tiedetään, että kappale, siis tässä tapauksessa varattu hiukkanen, johon kohdistuu voima, joutuu kiihtyvään liikkeeseen. Aineessa sen sijaan erilaiset varaukset kokevat jatkuvaa törmäilyä toistensa ja aineen molekulaaristen rakenneosien kanssa, ja ne eivät pysty siten liikkumaan vapaasti kovin pitkiä matkoja. Makroskooppisesti voidaankin ajatella, että ajan suhteen muuttumattomassa sähkökentässä varausten liike kokonaisuutena on ajasta riippumatonta ja että niiden liikenopeus \mathbf{v} aineessa on verrannollinen ulkoiseen sähkökenttään \mathbf{E} . Voidaan kirjoittaa

$$(4.10) \quad \mathbf{v} = \mu \mathbf{E},$$

missä verrannollisuuskerroin μ on nimeltään *liikkuvuus*. Sen yksikkö on $\text{m}^2/(\text{Vs})$ ja se on positiivinen positiiviselle varaukselle ja negatiivinen negatiiviselle varaukselle. Ajasta riippumatonta virtausta kutsutaan *stationaariseksi* virtaukseksi. Sähköisestä stationaarisesta virtausopista käytetään lyhyempää ilmaisu *virtausstatiikka*.

Varausten liikkumiseen väliaineessa vaikuttaa väliaineen ominaisuus, jota kutsutaan *sähkönjohtavuudeksi*. Se on materiaaliominaisuus, joka tulee kentäteorian yhtälöihin konstitutiivisten yhtälöiden kautta. Sähkönjohtavuuden tärkein konstitutiivinen yhtälö on *Ohmin² laki*

$$(4.11) \quad \mathbf{J} = g\mathbf{E},$$

missä g on aineen sähkönjohtavuus, yksikkönä $\text{A}/(\text{Vm}) = \text{S}/\text{m}$, (siemens per metri)³. Ohmin laki esitetyssä muodossa on voimassa lineaariselle väliaineelle. Tällaista väliainetta kutsutaan myös ohmiseksi väliaineeksi. Epälinearisessa väliaineessa Ohmin laki on kirjoitettava muotoon

$$(4.12) \quad \mathbf{J} = g(E)\mathbf{E},$$

jossa sähkönjohtavuus riippuu sähkökentästä. Anisotrooppiselle aineelle sähkönjohtavuus on toisen kertaluvun tensori. Lisäksi sähkönjohtavuus epähomogeenisessa aineessa on paikan funktio. Esityksessämme rajoitumme ohmiseen eli lineaariseen väliaineeseen.

Yhtälö (4.11) on Ohmin lain differentiaalimuoto. Se tarkoittaa, että Ohmin laki on voimassa aineessa kussakin pisteessä eli pisteittäin. Sähkötekniikassa puhutaan myös Ohmin laista, joka lausuu, että jännitehäviö on yhtä kuin virta kertaa resistanssi eli vastus. Tämä laki on itse asiassa edellä esittämämme Ohmin lain integroitu muoto, joka on voimassa koko kappaleelle (kuten vastuskappale).

Sähkönjohtavuuden käänteisarvoa

$$(4.13) \quad \varrho = \frac{1}{g}$$

kutsutaan *ominaisvastukseksi*, jonka yksikkö on $\text{Vm}/\text{A} = \Omega\text{m}$. Sähkönjohtavuuden yksikön voimme tällä merkinnällä kirjoittaa myös $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$. Siemensille S käytetään varsinkin anglosaksisessa kirjallisuudessa myös merkintää $\text{mho} = \text{U}$ eli ohm toisinpäin kirjoitettuna ja kreikkalainen kirjain Ω ylösalaisin käännettynä. Ominaisvastukselle käytetään yleisesti kirjallisuudessa

²Georg Simon Ohm (1789–1854), saks. fyysikko.

³Siemens-yksikkö on nimetty saksalaisen insinöörin ja fyysikon Werner von Siemensin (1816–1892) mukaan.

kreikkalaista kirjainta ρ . Käytämme sitä myös tässä esityksessä. Sitä ei tule kuitenkaan sotkea avaruusvaraustiheyteen. Sähkönjohtavuudelle käytetään yleisesti kirjallisuudessa myös kreikkalaista kirjainta σ , mutta tässä esityksessä käytämme g :tä.

Linearisessa väliaineessa voidaan virrantiheys kirjoittaa yhtälön (4.3) ja liikkuvuuden μ (4.10) avulla muotoon

$$(4.14) \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = \rho \mu \mathbf{E} = g \mathbf{E},$$

jossa sähkönjohtavuus $g = \rho \mu$.

Sähkönjohtavuus on geofysiikassa hyvin keskeinen materiaaliominaisuus. Itse asiassahan geofysiikan sähköisillä ja sähkömagneettisilla menetelmillä selvitetään juuri maankamaran sähkönjohtavuusrakennetta. Yleisesti sähkönjohtavuus on kompleksinen ja taajuudesta riippuva eli dispersiivinen suure. Tällä ominaisuudella on selitettävissä mm. indusoitu polarisaatio eli IP-ilmiö, joka syntyy virran kulkiessa elektrolyyttisessä liuoksessa olevien elektronien johdepartikkeleiden rajapintojen läpi. Rajapinnalla tapahtuu varauksenkuljettajan vaihtuminen. Elektrolyytissä varauksenkuljettajina ovat ionit, kun taas elektronisessa johteessa ne ovat elektroneja. Rajapinnalla tapahtuu mm. hapetus-pelkitysreaktioita eli redox-prosessi. Pintavarauksen lisäksi rajapinnalle muodostuu sähkökemiallisten prosessien seurauksena myös sähköinen dipolikerros. Tämä sähköinen dipolikerros vastaa pintaimpedanssia, joka on luonteeltaan kompleksinen ja jonka suuruus riippuu virran taajuudesta. Johdepartikkeleita on elektrolyytissä runsaasti sikin sokin (kuten metallimalmineraalipartikkeleita isäntäkivessä) ja kunkin rajapinnalla tapahtuu edellä kuvatun kaltainen varauksenkuljettajan vaihtuminen. Tuloksesta tästä prosessista on, että makroskooppisesti tarkasteltuna väliaineen sähkönjohtavuus onkin taajuudesta riippuva ja kompleksinen. Kompleksisuus tulee siitä, että syöttövirralla (virrantiheydellä) ja potentiaalierolla (sähkökentällä) on vaihe-ero. Näin ollen sähkönjohtavuus on matemaattisesti ilmaistuna reaaliuuttujan eli taajuuden kompleksiarvoinen funktio. On kehitetty erilaisia funktiomuotoisia lausekkeita sähkönjohtavuuden kuvaamiseksi. Emme kuitenkaan perehdy niihin tässä kenttäteoriaan painottuvassa esityksessä tarkemmin. Indusoidun polarisaation kenttäteoria pohjautuu virtausstatiikkaan, vaikka siinä syöttövirta onkin vaihtovirtaa. Kysymys on ns. kvasistaattisesta approksimaatiosta, jossa syöttövirran taajuus on niin alhainen, ettei se aiheuta merkittävästi induktioilmiötä. Induktiota käsitellään dynaamisten kenttien teoriassa.

Taulukkoon 4.1 on koottu joidenkin tavallisimpien geologisten materiaalien reaalisia sähkönjohtavuuden arvoja. Arvoja on pidettävä vain suuntaa antavina. Luonnonmateriaaleilla on tyypillisesti hyvin suuri hajonta fysikaalisten ominaisuuksien arvoissa. Lisäksi geologisten materiaalien vesipitoisuus

ja niissä olevan veden kemiallinen koostumus vaikuttavat ratkaisevasti sähkönjohtavuuteen. On myös huomattava, että anisotrooppisen aineen (kuten useimpien mineraalien ja kivilajien) sähkönjohtavuus on kuvattava toisen kertaluvun tensorilla, joten sähkönjohtavuuden karakterisoimiseen ei riitä yksi luku. Sähkönjohtavuus on hyvin laajoissa rajoissa vaihteleva aineominaisuus eri geologisten materiaalien välillä. Vaihteluväli on $10^{-15} - 10^8$ S/m eli huomattavasti yli 20 kertaluokkaa. Huomattakoon vielä, että sähkönjohtavuus riippuu yleisesti myös lämpötilasta.

Taulukko 4.1: Geologisten materiaalien sähkönjohtavuuden arvoja, yksikkönä S/m.

Materiaali	Sähkönjohtavuus
ilma	0
vesi	$3 * 10^{-4} - 10^{-2}$
jää	10^{-3}
biotiiitti	$10^{-6} - 10^{-2}$
kvartsi	$10^{-14} - 10^{-10}$
kuparikiisu	$10 - 10^4$
grafiitti	$10^2 - 10^6$
graniitti	$10^{-6} - 10^{-4}$
gabro	$3 * 10^{-5} - 10^{-4}$
gneissi	$10^{-6} - 10^{-4}$
sulfdimalmit	$10^{-1} - 10^2$
savi	$2 * 10^{-4} - 5 * 10^{-2}$
hiekkä	$10^{-5} - 7 * 10^{-3}$
siltti	$10^{-3} - 10^{-2}$
moreeni	$10^{-4} - 10^{-2}$
turve	$10^{-3} - 5 * 10^{-3}$

4.4 Stationaaritilan muodostuminen

Edellä sähkönjohtavuuden yhteydessä käytimme jo käsitteitä stationaarinen virtaus ja virtausstatiikka. Yleisesti aineilla on sekä dielektristä polarisoituvuutta että sähkönjohtavuutta. Virtausstatiikka tuo aineiden ominaisuuksiin uuden lisäpiirteen eli johtavuuden. Sähköstatiikassahan aineet olivat joko täydellisiä johteita, joissa varaukset voivat liikkua tai eristeitä, joissa varaukset eivät voi liikkua vapaasti.

Selvennettäköön stationaarisen virtauksen olemusta vielä hieman tarkemmin. Stationaarinen virtaus ei tarkoita, että virtausnopeus olisi vakio, vaan se tarkoittaa, että virtausnopeus ja sen myötä virrantiheys ja sähkökenttä eivät riipu ajasta. Ne ovat siis vain ajan suhteen muuttumattomia. Varausten virtausnopeudella ja sitä kautta virrantiheydellä voi aineen eri osissa olla erilainen suuruus ja suunta, mutta virrantiheys eli itse 'virtauskuva' ei muutu ajan mukana eli yhtälöissä olevat derivaatat $\partial(\cdot)/\partial t$ häviävät.

Stationaarisen tilan saavuttamisen kesto riippuu sekä aineen sähkönjohtavuudesta g että sen permittiivisyydestä ϵ . Sähkökentän divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ yhdistettynä Ohmin lakiin $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$ antaa varauksen säilymislailla (4.9) muodon

$$(4.15) \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{g}{\epsilon}\rho = 0.$$

Tämä on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisu on

$$(4.16) \quad \rho(t) = \rho(0)e^{-gt/\epsilon} = \rho(0)e^{-t/T},$$

missä T tarkoittaa aikavakiota

$$(4.17) \quad T = \frac{\epsilon}{g}.$$

Aikavakio kuvaa aikaa, jonka kuluttua avaruusvaraustiheys on pienentynyt e :nteen osaan alkuperäisestä arvostaan. Tämä aikavakio on karakteristinen mitta sille, miten nopeasti johtavaan aineeseen tuodut varaukset siirtyvät aineen pinnoille eli miten nopeasti aine käyttäytyy sähköstaattisessa mielessä johteen tavoin. Hyville sähkönjohteille aikavakio on hyvin pieni, esimerkiksi kuparille se on noin 10^{-19} s. Hyville eristeille se on puolestaan suuri, esimerkiksi kiilteelle noin 10 tuntia.

Sähköisessä virtausstatiikassa aineeseen tuodaan jatkuvasti tasaisena virtana eli *tasavirtana* uusia varauksia, joten siihen muodostuu pysyvä ajan suhteen muuttumaton varausjakauma. Matemaattisesti tämä tarkoittaa, että jatkuvuusyhtälössä osittaisderivaatta ajan suhteen on nolla eli

$$(4.18) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Stationaaritilassa virrantiheyskentän divergenssi on siis nolla ja virrantiheys on tällöin lähteetön vektorikenttä. Aineessa olevat stationaarisisina pysyvät varausjakaumat synnyttävät sähkökentän. Jos aineilla on lisäksi permittiivisyyttä, aineeseen muodostuu myös sähköinen polarisaatio.

4.5 Virtausstatiikan kenttäyhtälöt

Selvitetyämme sähköisen stationaarisen virtauskentän luonteen voimme kirjoittaa virtausstatiikan kenttäyhtälöt suoraan sähköstatiikan yhtälöiden ja varauksen säilymislain pohjalta. Yhtälö (4.18) on itse asiassa voimassa kaikkialla, myös virtalähteiden, kuten paristojen sisällä. Varauksen säilymislaki eli jatkuvuusyhtälö kirjoitetaan virtausstatiikassa kuitenkin usein muotoon

$$(4.19) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = i,$$

missä i on avaruusvarausta vastaava ajan suhteen muuttumaton tilavuusvirtalähde, yksikkönä A/m^3 . Todellisuudessa tällaista lähdettä avaruudessa ei ole olemassa, sillä kaikki virtalähteet ovat aina dipolimaisia eli kaksinapaisia (+ ja -) lähteitä.

Varauksen säilymislain esittäminen virtausstatiikassa edellä olevassa muodossa on kuitenkin tarkoituksenmukaista. Virtausstatiikan probleemit ovat nimittäin usein sellaisia, että jossakin avaruuden osassa on tunnettuja virtalähteitä, joiden aikaansaamia potentiaaliroja lasketaan. Virtalähteiden lähdeefekti samastetaan tällöin varauksen aikaansaamaan lähdeefektiin. Fysikaalisesti tämän voi mieltää siten, että esimerkiksi pistemäisen virtalähteen kohdalla on koko ajan tietyn suuruinen stationaarinen varaus, jossa varauksen kantajat vain vaihtuvat sitä mukaa, kun virtalähteestä tulee uusia varauksia niitä korvaamaan. Jos tarkastellaan LIH-väliaineessa pisteessä \mathbf{r}_0 olevaa pistemäistä virtalähdettä I , niin tätä virtalähdettä vastaa pistevaraus

$$(4.20) \quad q = \epsilon_0 \frac{I}{g}.$$

Tämä nähdään helposti soveltamalla yhtälöitä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

ja

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

sekä LIH-väliaineen eli ohmisen väliaineen konstitutiivista yhtälöä $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. Esimerkiksi geofysiikan galvaanisissa menetelmissä virtalähteet ovat usein pistemäisinä pidettäviä maahan työnnettäviä sauvaelektrodeja tai lineaarisia viivavirtaelektrodeja. Virran syöttämiseksi maahan tarvitaan kaksi elektrodia (+ ja -), joilla maankamara saatetaan osaksi suljettua virtapiiriä. Virran syöttämisessä ja potentiaalieron mittaamisessa on käytettävissä erilaisia elektrodien sijoitteluja eli elektrodikonfiguraatioita.

Sähkökenttä on myös virtausstatiikassa pyörteetön eli sillä on skalaaripotentialiaali ϕ . Sen divergenssi on myös sama kuin sähköstatiikassa, koska varausten ajan suhteen muuttumaton liike ei tuo mitään uutta sähkökentän lähdeettä. Sähkövuon tiheys ja sen divergenssi säilyvät samoina myös virtausstatiikassa. Voimme kirjoittaa sähköstatiikan ja virtausstatiikan yhtälöt vierekkäin, jotta näemme selvästi yhtälöiden samankaltaisuuden. Vasemmalla ovat sähköstatiikan yhtälöt ja oikealla virtausstatiikan yhtälöt LIH-väliaineessa. On huomattava, että molempien puolien kaikki yhtälöt ovat voimassa virtausstatiikassa. Sen sijaan vasemman puolen yhtälöt ovat voimassa vain sähköstatiikassa.

$$\begin{aligned}
 (4.21) \quad & \nabla \times \mathbf{E} = 0 & \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\
 & \mathbf{E} = -\nabla\phi & \mathbf{E} = -\nabla\phi, \\
 & \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{tot}/\epsilon_0 & \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{tot}/\epsilon_0, \\
 & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & \nabla \cdot \mathbf{J} = i, \\
 & \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} & \mathbf{J} = g\mathbf{E}, \\
 & \nabla \cdot (\epsilon\nabla\phi) = -\rho & \nabla \cdot (g\nabla\phi) = -i \quad (\text{lähdealueessa}), \\
 & \nabla^2\phi = 0 & \nabla^2\phi = 0 \quad (\text{lähdealueen ulkopuolella}).
 \end{aligned}$$

Huomaamme, että pääsemme täydelliseen vastaavuuteen sähköstatiikan ja virtausstatiikan kesken, jos teemme samastukset

$$(4.22) \quad \mathbf{D} \longleftrightarrow \mathbf{J},$$

$$(4.23) \quad \epsilon \longleftrightarrow g,$$

$$(4.24) \quad \rho \longleftrightarrow i.$$

Näin ollen kukin sähköstaattinen ongelma vastaa virtausstatiikan ongelmia ja päinvastoin. Kun tunnetaan sähköstaattisen ongelman ratkaisu, päästään vastaavaan virtausstatiikan ongelman ratkaisuun vain merkintöjä muuttamalla, kun reunaehdot ja rajapintaehdot ovat myös muodoltaan samat. Virtausstatiikan tehtävät ovat siis viime kädessä myös potentiaaliprobleemeja. Rajapintaehtoja tarkastelemme lähemmin seuraavaksi.

4.5.1 Rajapintaehdot

Kahden sähköjohtavuudeltaan (g_1 ja g_2) erilaisen aineen rajapinnalla on virrantiheyden normaalikomponentin oltava jatkuva. Tämä nähdään jatkuvuusyhtälöstä (4.18), kun sovelletaan Gaussin lausetta pieneen pillerirasiaan, joka sijaitsee molemmiin puolin rajapintaa. Virrantiheyden normaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa fyysikaalisesti samaa kuin, että rajapinnalle ei voi kerääntyä ylimääräistä sähkövarausta.

$$(4.25) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_2.$$

Lineaarisisessa (ohmisessa) aineessa tämä saa muodon

$$(4.26) \quad g_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 = g_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2.$$

Sähkökentän pyörteettömyys johtaa puolestaan ehtoon sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuudesta

$$(4.27) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2,$$

mikä on edelleen ekvivalenttia potentiaalin jatkuvuudelle

$$(4.28) \quad \phi_1 = \phi_2.$$

Sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuus voidaan kirjoittaa ohmisessa väliaineessa virrantiheyden avulla muotoon

$$(4.29) \quad \frac{1}{g_1} \mathbf{n} \times \mathbf{J}_1 = \frac{1}{g_2} \mathbf{n} \times \mathbf{J}_2.$$

Jos väliaineilla on samanaikaisesti sekä johtavuutta että permittiivisyyttä, kuten geologisessa väliaineessa usein on asian laita, muodostuu rajapinnalle ohmisessa väliaineessa stationaarinen pintavarausjakauma, kuten seuraava tarkastelu osoittaa.

Sähkövuon tiheyden normaalikomponentilla on yhtälön (3.78) mukaan epäjatkuvuus pintavaraustiheyden σ_f verran

$$(4.30) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \sigma_f,$$

mikä voidaan sähkökentän avulla kirjoittaa muotoon

$$(4.31) \quad \epsilon_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_2 = \sigma_f$$

ja edelleen virrantiheyden avulla muotoon

$$(4.32) \quad \frac{\epsilon_1}{g_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_1 - \frac{\epsilon_2}{g_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_2 = \sigma_f.$$

Koska virrantiheyden normaalikomponentti on aina jatkuva yhtälön (4.25) mukaisesti, voidaan pintavaraustiheydelle σ_f kirjoittaa

$$(4.33) \quad \sigma_f = \left(\frac{\epsilon_1}{g_1} - \frac{\epsilon_2}{g_2} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_1 = \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2 g_1}{g_2} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_1.$$

Tämä pintavaraus on siis luonteeltaan vapaata varausta, joka asettuu rajapinnalle virtausstationaarisisessa tilanteessa.

Tarkastellaan vielä kahden sähköjohtavuudeltaan ja permittiivisyydel-
tään erilaisen aineen rajapinnalle muodostuvaa *kokonaisvarausta* eli vapaan
ja polarisaatiovarausten summaa. Se saadaan selville lähtemällä sähkökentän
divergenssiyhtälöstä (3.68), joka koskee kokonaisvarausta ρ_{tot} . Soveltamalla
pillerirasiatekniikkaa yhtälöön $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{tot}/\epsilon_0$ saadaan sähkökentän normaali-
komponentille kokonaispintavaraustiheyden suuruinen epäjatkuvuus

$$(4.34) \quad \sigma_{tot} = \epsilon_0(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}.$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan ohmissessa väliaineessa virrantiheyden nor-
maalikomponentin jatkuvuusehto, saadaan kokonaispintavaraustiheydelle muo-
to

$$(4.35) \quad \sigma_{tot} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2} \right) \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n}.$$

Polarisaatiovektori saadaan \mathbf{D} :n määrittelevästä yhtälöstä (3.66) $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$. Polarisaatiopintavaraukselle saamme $\sigma_P = -(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}$. Edelleen voi-
daan kirjoittaa $\sigma_f - (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{tot}$. On erityisesti huomattava, että
sähkökentän lähteenä on aina totaali- eli kokonaisvaraus.

4.5.2 Reunaehdot

Reunaehdot määräytyvät myös virtausstatiikassa kunkin probleemin fysikaal-
lisen luonteen mukaisesti. Geofysiikassa tärkeä rajapinta ja samalla reuna on
maan ja ilman välinen rajapinta. Koska ilman tasavirtasähköjohtavuus on
nolla, tarkoittaa se sitä, että varauksia ei voi siirtyä maasta ilmaan virtaus-
statiikan tilanteessa eli rajapinnan läpi ei mene sähkövirtaa. Toisin sanoen
maan ja ilman rajapinnalla on voimassa reunaehto

$$(4.36) \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Virrantiheyden kenttäviivat eli virtaviivat kaareutuvat maanpinnan suuntais-
iksi. LIH-väliaineessa reunaehto (4.36) vastaa Neumannin reunaehto

$$(4.37) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0.$$

On mielenkiintoista huomata, että sähköstatiikassa tällaista tilannetta ei
ole, sillä permittiivisyydellä on aina nolasta poikkeava arvo. Sähkökenttä on
olemassa myös ilmassa, koska ilman suhteellinen permittiivisyys on n. 1. Yksi
tapa sähköstatiikassa tällaisten reunojen käsittelemiseksi onkin kuvata niitä
ns. *magneettisina johdereunoina*, joille $\epsilon = 0$. Magneettiset johteet ovat tältä

osin epäfysikaalisia, mutta matemaattisina oliona erittäin toimivia kenttäteoreettisissa tarkasteluissa. Ne vastaavat siis täydellisen ideaalieristeen reunoja. Ideaalieristeen sähkönjohtavuus $g = 0$. Ilma on virtausstatiikassa ideaalieristettä.

Ideaalijohteen ($g = \infty$) tapauksessa sähkökenttä johteen sisällä on nolla ja samoin sen tangentialikomponentti johteen pinnalla

$$(4.38) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0.$$

Ideaalijohteen pinnalla sähkökenttä on kohtisuorassa johteen pintaa vastaan. Ideaalijohde muodostaa tasapotentialialueen. Ohmissessa LIH-väliaineessa on virrantiheydelle voimassa

$$(4.39) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{J} = 0$$

ja virta kulkee aina kohtisuorassa johdoreunaa vastaan.

Koska sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuus on ekvivalenttia potentiaalain jatkuvuudelle, seuraisi edellä olevasta, että virtausstatiikassa ideaalijohteiden potentiaalikin olisi aina nolla. Koska näin ei yleisesti ole, käytetään umpinaisten pintojen S_i rajoittamien ideaalijohdealueiden potentiaalain määrittämisessä varauksen säilymislaista saatavaa lisäehtoa, joka voidaan kirjoittaa

$$(4.40) \quad I_i = \oint_{S_i} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS,$$

missä I_i on kokonaisvirta alueesta ulos. Tämän arvo on nolla, jos virtalähde I_i on pinnan ulkopuolella ja I_i , jos lähde on pinnan sisäpuolella. Tämä ehto on korvattavissa Dirichletin reunaehdolla

$$(4.41) \quad \phi = \phi_i$$

pinnalla S_i .

Potentiaalain on oltava kaikkialla säännöllinen ja sen on käyttäydyttävä kolmiulotteisissa probleemeissa vähintään kuten $1/r$ äärettömyyttä lähestyttäessä.

4.6 Virtausstaattisten probleemien ratkaiseminen

Kuten jo yhtälöistä (4.21) ilmenee, ovat virtausstaattiset kenttäprobleemit täysin analogisia sähköstaattisten probleemien kanssa. Sähköstaattisten probleemien ratkaisuihin saadaan vastaavat virtausstaattisten probleemien ratkaisut vain merkintöjä muuttamalla. Koska geofysiikassa virtausstaattiset

probleemit ovat keskeisiä galvaanisten anomalioiden laskennassa, tarkastelemme erikseen vielä joitakin erityisesti galvaanisten menetelmien kannalta tärkeitä potentiaaliprobleemeja.

4.6.1 Pistemäinen virtalähde ja viivavirtalähde johtavassa kokoavaruudessa

Pistemäinen virtalähde

Saimme jo aiemmin tuloksen (vrt. yhtälö (4.20)), että pistemäinen virtalähde I vastaa pistevarausta q , jonka suuruus on $q = \epsilon_0 I/g$. Tämän perusteella voidaan johtavassa kokoavaruudessa olevan, origossa sijaitsevan, pistemäisen virtalähteen aikaansaamaksi sähkökentäksi ja potentiaaliksi yhtälön (3.18) ja vastaavasti (3.26) mukaan kirjoittaa

$$(4.42) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi g} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

ja

$$(4.43) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi g} \frac{1}{r}.$$

Edelleen virrantiheydelle saadaan lauseke

$$(4.44) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Nämä ovat tärkeitä pistelähteen primaarikenttälausekkeitä.

Lineaarinen viivavirtalähde

Analogisesti viivavarauslähteen sähkökentän (3.111) ja potentiaalın (3.112) lausekkeiden kanssa voidaan kirjoittaa viivavirtalähteen sähkökentän ja potentiaalın lausekkeet

$$(4.45) \quad \mathbf{E}(\rho) = \frac{i_l}{2\pi g} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho$$

ja vastaavasti

$$(4.46) \quad \phi(\rho) = -\frac{i_l}{2\pi g} \ln(C\rho)$$

sekä edelleen virrantiheyden lauseke

$$(4.47) \quad \mathbf{J}(\rho) = \frac{i_l}{2\pi} \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_\rho.$$

Edellä olevissa yhtälöissä on käytetty sylinterikoordinaatiston ρ -koordinaattia sekä merkitty virtaa pituusyksikköä kohden i_l :llä.

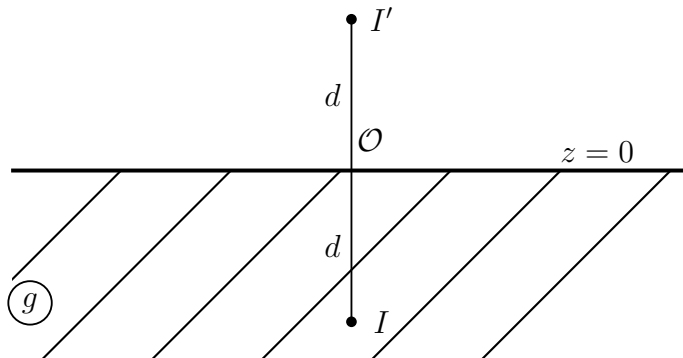
4.6.2 Pistemäinen virtalähde johtavassa puoliavaruudessa

Johtava puoliavaruus on geofysiikassa tärkeä, koska se vastaa maankamaraa, jonka yläpuolella on sähköjohtamaton eriste eli ilma. Toisin sanoen maan ja ilman rajapinta on magneettinen johdereuna. Sijaitkoon pistemäinen virtalähde syvyydellä d johtavan puoliavaruuden (sähkönjohtavuus g) pinnasta, joka sijoitetaan oikeakätisen karteesisen (x, y, z) -koordinaatiston tasolle $z = 0$. Sähköstatiikan puolella ratkaisimme kuvälähdeperiaatteella probleemin, jossa pistevaraus sijaitsee tasomaisen eristerajapinnan lähellä (ks. kohta 3.3.9). Jos tähän ratkaisuun tehdään analogiset sijoitukset eli korvataan varaus q virralla I ja permittiivisyydet ϵ_1 ja ϵ_2 sähkönjohtavuuksilla g_1 ja vastaavasti g_2 , saadaan vastaavan virtausstationaarisen probleemin ratkaisu.

Kun nyt yhtälöitä (3.137) vastaavissa virtausstatiikan yhtälöissä annetaan g_2 :n lähestyä nollaa, saadaan kuvälähderatkaisuksi

$$(4.48) \quad I' = I.$$

Toisin sanoen maan ja ilman rajapinta korvataan kuvälähdevirralla, jonka suuruus on sama kuin alkuperäisen virtalähteen ja joka sijaitsee symmetrisesti rajapinnan suhteen kuvan 4.1 mukaisesti. Origo (\mathcal{O}) on virtalähteitä I ja I' yhdistävän janan ja tason $z = 0$ leikkauspisteessä. Kuvassa on tehty geofysiikan problemeissa tavanomainen valinta, jossa z kasvaa alaspäin eli kuvan (3.12) koordinaatisto on vain käännetty ylösalaisin. Luonnollisestikaan tämä toimenpide ei vaikuta millään lailla koordinaattien merkintätapoihin, kunhan muistetaan, että kysymys on koko ajan oikeankäden koordinaatistosta.

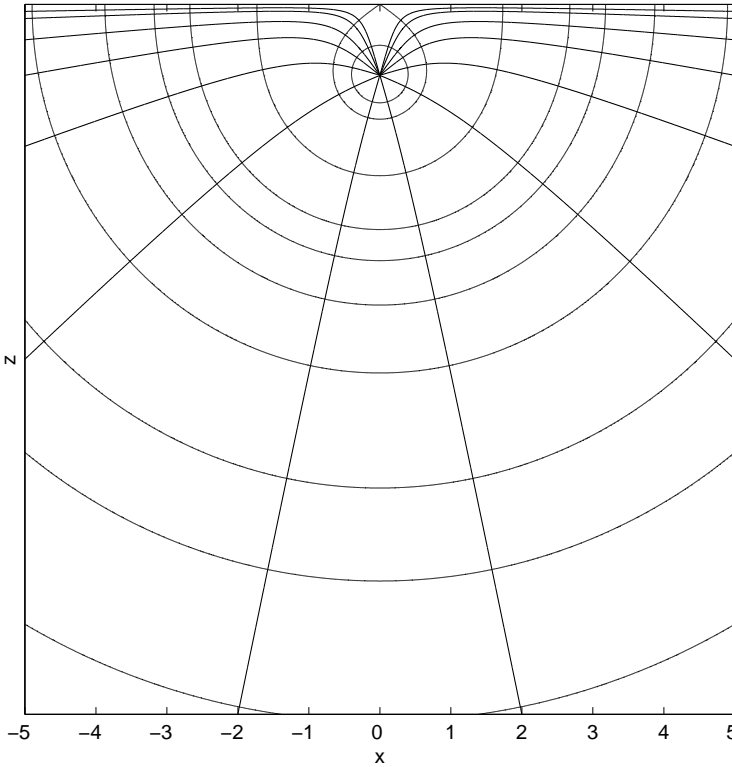


Kuva 4.1: Pistemäinen virtalähde johtavassa puoliavaruudessa.

Näin ollen voidaan puoliavaruudessa olevaksi potentiaaliksi kirjoittaa

$$(4.49) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi g} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right).$$

Fysikaalisesti ratkaisu tarkoittaa sitä, että virrantiheyden ja myös sähkökentän kenttäviivat kaareutuvat puoliavaruuden pinnan eli maanpinnan suuntaiseksi läpäisemättä sitä, koska virtaa ei mene maasta ilmaan. Helposti on todettavissa, että edellä saatu ratkaisu toteuttaa rajapinnalla ($z = 0$) Neumannin reunaehdon $\partial\phi/\partial z = 0$. Kuvassa 4.2 on esitetty joitakin samapotentiaalikäyriä ja niitä kohtisuoraan leikkaavia virtaviivoja, jotka lähtevät yksikön syvyydellä olevasta +-merkkisestä lähteestä.



Kuva 4.2: Yksikön syvyydellä johtavassa puoliavaruudessa olevan pistelähteen samapotentiaalikäyriä ja virtaviivoja.

Puoliavaruuden pinnalla oleva pistemäinen virtalähde ($d = 0$) aikaansaa yhtälön (4.49) mukaan puoliavaruuteen potentiaalin, jonka suuruus on

$$(4.50) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi g} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{I}{2\pi g} \frac{1}{r}.$$

Jos virtalähde on syvyydellä d , mutta potentiaali lasketaan puoliavaruuden pinnalla $z = 0$, saadaan

$$(4.51) \quad \phi(x, y, 0) = \frac{I}{2\pi g} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \right).$$

Edelleen yhtälön (4.49) perusteella on yleisesti huomattava, että jos vaihdetaan potentiaalin laskentapisteen ja virtalähdepisteen paikkaa keskenään eli sijoitetaan virtalähde laskentapisteeseen ja laskentapiste virtalähteen kohdalle, potentiaali laskentapisteessä säilyy samana. Tämä on ns. *resiprookkisuusperiaate*, joka on voimassa lineaarisessa väliaineessa. Resiprookkisuusperiaate lausuu siis sen, että virtalähdepisteen ja potentiaalin laskentapisteen voi vaihtaa keskenään potentiaalin arvon siitä muuttumatta.

On huomionarvoista, että vaikka galvaanisissa mittauksissa virtaa syötetään maahan ja potentiaalia tai tarkemmin sanottuna potentiaalieroa mitataan maanpinnalla tai maan sisällä, potentiaalikenttä ja sitä myöten sähkökenttä muodostuvat myös ilmaan. Tästä potentiaalista ei kuitenkaan olla kiinnostuneita galvaanisissa mittauksissa, koska sen mittaaminen galvaanisesti eli elektrodien avulla ei ole mahdollista. Virrantiheykenttää ei sen sijaan ilmaan luonnollisestikaan synny, koska ilma on virtausstatiikassa täydellinen eriste.

4.6.3 Pistemäinen virtalähde kerrostuneen puoliavaruuden pinnalla

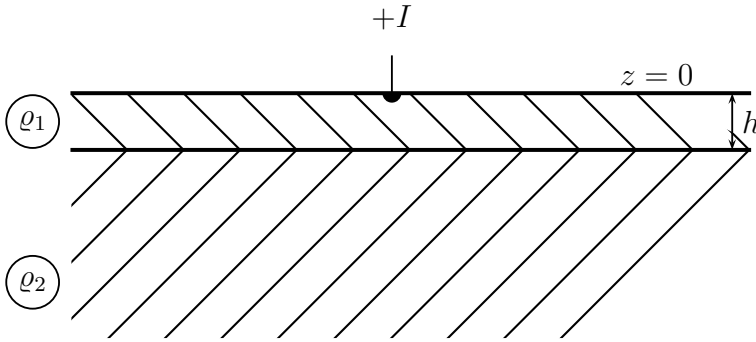
Geofysiikan sovelluksissa vaakakerroksista koostuva johtava puoliavaruus muodostaa erittäin keskeisen geometrian. Tarkastellaan seuraavaksi kaksikerroksellista maankamaran mallia kuvan 4.3 mukaisesti. Sijoitetaan pistevirtalähde $+I$ sylinterikoordinaatiston origoon maanpinnalle. Sylinterikoordinaatiston z -akseli kasvaa alaspäin. Ylemmän kerroksen paksuus olkoon h ja sen ominaisvastus $\varrho_1 = 1/g_1$. Äärettömyyteen ulottuvan alemman kerroksen ominaisvastus on ϱ_2 .

Yhtälöiden (4.21) mukaan ratkaistavana on Laplacen yhtälö. Reunaehtona on maanpinnalla voimassa oleva Neumannin ehto

$$(4.52) \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

sekä potentiaalin vaimeneminen kuten $1/r$ äärettömyyttä lähestyttäessä. Lisäksi kerrosten rajapinnalla on oltava voimassa rajapintaehdot

$$(4.53) \quad \left. \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=h} = \left. \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=h}$$



Kuva 4.3: Kaksikerroksinen johtava puoliavaruus, jonka pinnalla on pistemäinen virtalähde $+I$.

ja

$$(4.54) \quad \phi_1|_{z=h} = \phi_2|_{z=h}.$$

Probleemi on sylinterisymmetrinen, joten Laplacen yhtälö (2.107) saa muodon

$$(4.55) \quad \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Varoitus. Käytämme kreikkalaista kirjainta ρ merkitsemään sylinterikoordinaatiston muuttujaa ja hieman eri tavalla kirjoitettua samaa kreikkalaista kirjainta ϱ tarkoittamaan ominaisvastusta. Syy, että probleemi formuloidaan mieluummin ominaisvastusten kuin sähkönjohtavuuden avulla on se, että geofysiikan kirjallisuudessa kerrostuneen maan probleemi kuuluu nimenomaan maavastusluotaustehtäviin ja se formuloidaan siten ominaisvastusten avulla. Merkitsemistavoista ei aiheutune ongelmaa tarkkaavaiselle lukijalle. ■

Ratkaistava kokonaispotentiaali muodostuu fysikaalisesti pistemäisen virtalähteen aikaansaamasta potentiaalista eli ns. primaaripotentialista ja johdekerroksen rajapinnoille muodostuvista staattisten varausjakautumien aikaansaamasta sekundaaripotentialista. Näitä varausjakautumia muodostuu maan ja ilman väliselle rajapinnalle sekä syvyydellä h olevalle rajapinnalle.

Yhtälön (4.55) yleinen ratkaisu löydetään muuttujien erottelumenetelmällä. Sijoitetaan yhtälöön yrite

$$(4.56) \quad \phi(\rho, z) = R(\rho)Z(z),$$

jossa on pelkästään ρ :sta riippuva funktio R ja pelkästään z :sta riippuva funktio Z . Sijoittamisen jälkeen sekä jakamalla yhtälö puolittain yritteellä

(4.56) saadaan yhtälö

$$(4.57) \quad \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Jotta yhtälö (4.57) on voimassa kaikilla ρ :n ja z :n arvoilla, täytyy yhtälön ensimmäisen termin olla jokin vakio ja vastaavasti jälkimmäisen termin sama vakio vastakkaismerkkisenä, jolloin niiden summa on nolla. Merkitään

$$(4.58) \quad \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} \right) = -\lambda^2,$$

jolloin

$$(4.59) \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = +\lambda^2,$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on separointiparametri.

Osittaisdifferentiaaliyhtälö (4.55) hajoaa separoinnin seurauksena kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi.

Yhtälö (4.58) on Besselin differentiaaliyhtälö (2.223), jonka ratkaisu on ensimmäisen lajin Besselin funktio astetta 0 $J_0(\lambda\rho)$. Tämä nähdään, kun yhtälöön (4.58) tehdään R :lle muuttujan vaihdos $s = \lambda\rho$ ja käytetään ketjuderivointisääntöä ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatoille. Tällöin yhtälö (4.58) muuntuu yhtälöksi (2.223), jonka tuntemattomana funktiona on $y = R$, muuttujana $x = s$ ja $\nu = 0$. Siis yhtälön (4.58) ratkaisu on $J_0(s) = J_0(\lambda\rho)$. Yhtälön (4.58) toisena ratkaisuna on toisen lajin Besselin funktio astetta 0 $Y_0(\lambda\rho)$. Tämä ratkaisu on kuitenkin epäsäännöllinen, kun $\rho \rightarrow 0$, joten sitä ei kelpuuteta fysikaaliseksi ratkaisuksi.

Yhtälön (4.59) ratkaisu löytyy alkeisfunktioiden avulla ja se on muotoa

$$(4.60) \quad Z = A(\lambda)e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z},$$

missä λ voi saada jatkuvasti kaikki reaali-lukuarvot välillä $[0, \infty)$. Koska Laplacen yhtälö on lineaarinen ja sen ratkaisuna ovat kaikki summalausekkeet, jotka muodostuvat Laplacen yhtälön erikseen toteuttavista termeistä, voidaan yhtälön (4.55) yleiseksi ratkaisuksi kirjoittaa, kun summeeraus korvataan integroinnilla parametrin λ suhteen

$$(4.61) \quad \phi(\rho, z) = \int_0^\infty (A(\lambda)e^{-\lambda z} + B(\lambda)e^{\lambda z}) J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

Primaaripotentialiaali on yhtälön (4.50) mukaan

$$(4.62) \quad \phi_p = \frac{I \varrho_1}{2\pi \xi},$$

missä $\xi = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Lausutaan funktio $1/\xi$ ensimmäisen lajin Besselin funktion astetta 0 avulla käyttäen Lipschitzin integraali-identiteettiä (2.235). Näin saamme

$$(4.63) \quad \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\lambda z} d\lambda,$$

kun $z > 0$. Integraali konvergoi myös, kun $z \rightarrow 0$.

Aineessa 1 olevaksi potentiaaliksi voidaan yhtälöiden (4.63) ja (4.61) avulla kirjoittaa

$$(4.64) \quad \phi_1(\rho, z) = \int_0^\infty \left[\left(\frac{\varrho_1 I}{2\pi} + A_1(\lambda) \right) e^{-\lambda z} + B_1(\lambda) e^{\lambda z} \right] J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

Aineessa 2 olevaksi potentiaaliksi voidaan kirjoittaa

$$(4.65) \quad \phi_2(\rho, z) = \int_0^\infty A_2(\lambda) e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho) d\lambda,$$

missä potentiaalın säännöllisen käyttäytymisen takaamiseksi äärettömyydessä ei ole hyväksytty $e^{\lambda z}$ -termejä. Kertoimien $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ ja $A_2(\lambda)$ määrittämiseksi käytetään reuna- ja rajapintaehtoja (4.52), (4.53) ja (4.54). Niiden avulla saadaan yhtälöryhmä

$$(4.66) \quad \begin{aligned} A_1 - B_1 &= 0 \\ \frac{1}{\varrho_1} \left[- \left(\frac{\varrho_1 I}{2\pi} + A_1 \right) e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h} \right] &= -\frac{1}{\varrho_2} A_2 e^{-\lambda h} \\ \left(\frac{\varrho_1 I}{2\pi} + A_1 \right) e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h} &= A_2 e^{-\lambda h}, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on

$$(4.67) \quad \begin{aligned} A_1 = B_1 &= \frac{\varrho_1 I}{2\pi} \frac{K e^{-2\lambda h}}{(1 - K e^{-2\lambda h})}, \\ A_2 &= \frac{\varrho_1 I}{2\pi} \left(1 + K \frac{1 + e^{-2\lambda h}}{1 - K e^{-2\lambda h}} \right), \end{aligned}$$

missä kerrointa

$$(4.68) \quad K = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 + \varrho_1}$$

kutsutaan reflektiokertoimeksi. Useimmiten ollaan kiinnostuneita potentiaalista maanpinnalla ($z = 0$). Tällöin potentiaaliksi saadaan

$$(4.69) \quad \phi_1(\rho, 0) = \frac{\varrho_1 I}{2\pi\rho} G(\rho, K),$$

missä

$$(4.70) \quad G(\rho, K) = 1 + 2K\rho \int_0^\infty \frac{e^{-2\lambda h}}{1 - Ke^{-2\lambda h}} J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

Kun ensimmäisen kerroksen paksuus kasvaa suhteessa havaintopisteen ρ -koordinaatin arvoon eli kun $h \rightarrow \infty$, $G(\rho, K) \rightarrow 1$. Näin pitää ollakin, koska silloin syntyy tilanne, missä pistelähde on homogeenisen puoliavaruuden pinnalla. Jos taas ylemmän kerroksen paksuus $h \rightarrow 0$, niin

$$(4.71) \quad G(\rho, K) \rightarrow 1 + \frac{2K\rho}{1 - K} \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

Edellä olevan lausekkeen integraali on yhtälön (4.63) mukaan, kun $z \rightarrow 0$, $1/\rho$, joten

$$(4.72) \quad G(\rho, K) \rightarrow 1 + \frac{2K}{1 - K} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

eli saadaan homogeenisen puoliavaruuden pinnalla olevan pistelähteen potentiaali, kun puoliavaruuden ominaisvastus on ϱ_2 , kuten pitääkin.

Edellä saatua kaksikerroksisen maan potentiaalın ratkaisua kutsutaan potentiaaliteoreettisessa kirjallisuudessa *Stefanescun*⁴ ratkaisuksi. Se esitettiin ensimmäisen kerran vuonna 1930. Tähän ratkaisuun pohjautuvat galvaanisten maavastusluotausten tulkinnoissa käytettävät tulkintakäyrästöt.

Stefanescun ratkaisu on yleistettävissä myös kolmi- ja useampikerroksisen maan tapaukselle soveltamalla rajapintayhtälöitä (4.53) ja (4.54) kullekin rajapinnalle tuntemattomien kertoimien määrittämiseksi. Näiden ratkaisujen yksityiskohtiin emme kuitenkaan syvenny, koska kenttäteoreettisessa mielessä ne eivät tuo mitään uutta esityksemme. Useampien virtalähteiden (+ ja -) potentiaali saadaan superpositioperiaatteella. Todettakoon vielä, että kaksikerrosmaan potentiaalın ratkaisu on löydettävissä myös kuvalähdeperiaatteella. Tällöin tuloksena on päättymätön sarja.

⁴Sabba S. Stefanescu (1902–1994), romanial. geofysikko.

4.6.4 Pistemäinen virtalähde anisotrooppisessa väliaineessa

Tähänastiset tarkastelut ovat koskeneet lineaarista, isotrooppista ja homogeenista tai paloittain homogeenista väliainetta eli LIH-ainetta. Seuraavassa tarkastelemme, tosin vain hyvin suppeasti, tilannetta, jossa väliaine on sähköjohtavuudeltaan anisotrooppista, mutta edelleen lineaarista ja homogeenista. Tällaista väliainetta voidaan siten kutsua LAH-väliaineeksi. Lisäksi oletamme esityksen yksinkertaistamiseksi, että sähköjohtavuus on reaali-

Anisotrooppinen sähköjohtavuus

Olemme jo aiemmin todenneet, että sähköjohtavuus on yleisesti anisotrooppinen ominaisuus eli että sillä on suuntariippuvuus. Geologiset materiaalit ovat useimmiten anisotrooppisia. Itse asiassa isotrooppiset materiaalit ovatkin luonnossa varsin harvinaisia. Kiteet, lukuunottamatta kuutiollista kidejärjestelmää, ovat sähköjohtavuudeltaan ja myös muilta ominaisuuksiltaan, kuten permittiivisyydeltään, anisotrooppisia. Useat kivilajit ovat anisotrooppisia myös syntytapansa ja rakenteesta johdosta. Esimerkiksi sedimenttikivet ja metamorfiset liuskeet omaavat usein selvää rakenteellista anisotropiaa. Toisaalta myös kivessä oleva eriasteinen rakoilu ilmenee kiven anisotrooppisena ominaisuutena. Se milloin jotakin kiven rakenteellista ominaisuutta pidetään anisotropiana, riippuu tarkasteltavasta mittakaavasta. Tietyissä mittakaavoissa anisotropia on korvattava epähomogeenisuudella. On kuitenkin tärkeää ymmärtää anisotrooppisuuden ja epähomogeenisuuden ero eikä niitä tule sekoittaa keskenään. On huomattava, että anisotrooppisuus on nimenomaan aineen ominaisuus. Geofysiikassa on siis kaiken kaikkiaan hyvät perusteet tarkastella myös anisotrooppista sähköjohtavuutta.

Anisotrooppisen sähköjohtavuuden tapauksessa Ohmin laki (4.11) kirjoitetaan muotoon

$$(4.73) \quad \mathbf{J} = \bar{g} \cdot \mathbf{E},$$

missä sähköjohtavuutta kuvataan toisen kertaluvun tensorilla tai dyadilla \bar{g} . Olemme nimittäin jo aiemmin kohdassa 2.5.2 sivulla 58 todenneet, että toisen kertaluvun tensorit ja dyadit vastaavat toisiaan täydellisesti. Sähköjohtavuus voidaan siten ilmaista myös matriisimuodossa

$$(4.74) \quad (g_{ij}) = \bar{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

On huomattava, että anisotrooppisessa tapauksessa yleensä sähkökenttä ja virrantiheyskenttä ovat erisuuntaisia, ts. $\mathbf{J} \nparallel \mathbf{E}$. Tulemme seuraavassa käyttämään tietyin osin sekä tensoreihin ja matriiseihin että dyadeihin pohjautuvaa esitystapaa, koska näitä kaikkia käytetään anisotrooppisuuden tarkasteluissa.

Sähkönjohtavuus on positiivi-definiitti ja symmetrinen. Positiivi-definiittisyys tarkoittaa, että mielivaltaiselle vektorille $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \stackrel{\wedge}{=} x = [x_1, x_2, x_3]$ ja dyadille \bar{g} pätee neliömuoto

$$(4.75) \quad \bar{g} : \mathbf{r}\mathbf{r} > 0$$

kaikille nollasta poikkeaville vektoreille $\mathbf{r} \neq 0$. Tensorimerkinnöin positiivi-definiittisyys on vastaavasti ilmaistavissa muodossa

$$(4.76) \quad g_{ij}x_ix_j > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

ja matriisialgebran merkinnöin

$$(4.77) \quad x\bar{g}x^T > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

missä yläindeksi T tarkoittaa transpoosia (x on vaakavektori).

Positiivi-definiittisyys tarkoittaa käytännössä sitä, että dyadin, tensorin tai matriisin ominaisarvot ovat positiivisia. Myös niitä vastaava determinantti on positiivinen. Jos sähkönjohtavuus on pelkkä skalaari, positiivi-definiittisyys tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että sähkönjohtavuus on positiivinen, mikä onkin fysikaalisesti paikkansa pitävää. Neliömuoto (4.75), (4.76) tai (4.77) on komponenttimuodossa

$$(4.78) \quad \begin{aligned} &g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + \\ &g_{21}x_2x_1 + g_{22}x_2^2 + g_{23}x_2x_3 + \\ &g_{31}x_3x_1 + g_{32}x_3x_2 + g_{33}x_3^2 > 0. \end{aligned}$$

Symmetrisyys tarkoittaa, että

$$(4.79) \quad \bar{g} = \bar{g}^T \quad \text{eli tensorimerkinnöin} \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

Sähkönjohtavuustensorin tai dyadin symmetrisyys ei ole yhtä helposti todennettava ominaisuus kuin positiivi-definiittisyys. Symmetrisyysominaisuus tulee itse asiassa termodynamiikasta ja entropian kasvuominaisuudesta, ns. Onsagerin⁵ periaatteesta. Sivuutamme kuitenkin tässä yhteydessä tarkemmat termodynaamiset perustelut ja tarkastelut. Todettakoon, että symmetrisyysominaisuus on Onsagerin periaatteen mukaan yleinen kaikille kulkeutumisolmiöille (transport phenomena). Muita geofysiikan kannalta keskeisiä

⁵Lars Onsager (1903–1976), norj.-yhdysvalt. fyysikko ja kemisti.

kulkeutumislmiöitä ovat lämmönjohtuminen ja aineen diffuusio, joihin palaamme myöhemmin.

Kun otetaan huomioon sähkönjohtavuuden symmetrisyys $g_{ij} = g_{ji}$, saadaan neliömuodolle (4.78) esitysmuoto

$$(4.80) \quad g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{23}x_2x_3 + 2g_{31}x_3x_1 + 2g_{12}x_1x_2 > 0.$$

Jos epäyhtälön (4.80) oikea puoli merkitään $= 1$ (tai muuksi positiiviseksi luvuksi), saadaan toisen asteen pinnan yleinen yhtälö, jonka keskipisteenä on origo. Yleisesti tämä pinta voi olla ellipsoidi tai hyperboloidi. Tämä tarkoittaa sitä, että symmetristä toisen kertaluvun tensoria tai dyadia vastaa neliömuoto, joka geometrisesti kuvaa ellipsoidia tai hyperboloidia.

Muunnamme esitystämme varten sähkönjohtavuusdyadin laaduttomaksi kirjoittamalla sen muotoon

$$(4.81) \quad \bar{\bar{g}}_r = \frac{\bar{\bar{g}}}{g_0},$$

missä g_0 on mielivaltaisesti valittu johtavuuden referenssiarvo. Tämä merkintätapa on analoginen suhteellisen permittiivisyyden merkintätavan (3.76) kanssa, mutta valitettavasti johtavuuden osalta ei ole käytettävissä tyhjiön permittiivisyyden (ϵ_0) eli sähkövakion kaltaista yleistä vakiota.

Pistemäinen virtalähde uniakσιαalisessa anisotrooppisessa kokoavaruudessa

Tarkastelemme seuraavaksi uniakσιαalista anisotrooppista kokoavaruutta. Uniakσιαalisen anisotrooppisen väliaineen laaduton sähkönjohtavuus on esitettävissä matriisimuodossa ja dyadimuodossa

$$(4.82) \quad \bar{\bar{g}}_r = \begin{pmatrix} g_{r11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{r11} & 0 \\ 0 & 0 & g_{r33} \end{pmatrix} = g_{r11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + g_{r11} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + g_{r33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Uniakσιαalisessa aineessa on siis kaksi sähkönjohtavuudeltaan erilaista toisiaan vastaan kohtisuorassa olevaa suuntaa. Uniakσιαalisessa aineessa koordinaatistoa voidaan kiertää tensorilaskennan mielessä siten, että johtavuuden suunnat yhtyvät koordinaatiston akselisuuntiin. Termi uniakσιαalisuus viittaa yksiakseliseen tilanteeseen. Nimitys tulee itse asiassa kideoptiikasta, jossa uniakσιαalisella kiteellä on yksi optinen akseli. Akseli on kohtisuorassa kahden yhtäsuuren johtavuuden määrittämää tasoa vastaan. Usein uniakσιαalisen johtavuuden ollessa kyseessä puhutaankin *pitkittäisestä* eli tason suuntaisesta (g_{\parallel}) ja *poikittaisesta* eli tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa olevasta johtavuudesta (g_{\perp}).

Sijoitamme seuraavaksi pistemäisen virtalähteen I sähkönjohtavuudeltaan uniakσιαalisen *kokoavaruuden* origoon. Tällöin voidaan merkitä

$$(4.83) \quad i(\mathbf{r}) = I\delta(\mathbf{r}),$$

missä yleistä kenttäpistettä merkitään vektorilla $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = [x_1, x_2, x_3]$.

Varauksen säilymlain (4.19) ja Ohmin lain (4.73) mukaan voidaan probleemin kenttäyhtälöksi dyadimerkinnöin kirjoittaa

$$(4.84) \quad \nabla \cdot (\bar{g}_r \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})) = -\frac{I}{g_0} \delta(\mathbf{r}).$$

Kun yhtälöön (4.84) sijoitetaan uniakσιαalisen aineen sähkönjohtavuus (4.82), päädytään yhtälöön

$$(4.85) \quad g_{r11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + g_{r11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + g_{r33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = -\frac{I}{g_0} \delta(\mathbf{r}).$$

Päädyttiin siis Laplacen tai tarkemmin sanottuna Poissonin yhtälöä suuresti muistuttavaan yhtälöön. Erona aitoihin Laplacen ja Poissonin yhtälöihin on se, että toisen kertaluvun osittaisderivaattatermeissä on johtavuudesta riippuvat kertoimet. Osoittautuu, että jos tehdään tietynlainen avaruuden venyttäminen tai kutistaminen sähkönjohtavuuden suunnissa, voidaan yhtälö (4.85) muuntaa aidoksi Laplacen/Poissonin yhtälöksi venytetyssä tai kutistetussa avaruudessa. Tällaista toimenpidettä vastaa ns. *affiininen* muunnos, jossa avaruuden metriikkaa muutetaan muunnoksen

$$(4.86) \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \bar{g}_r^{-1/2} \cdot \mathbf{r} = \left[\frac{x_1}{\sqrt{g_{r11}}}, \frac{x_2}{\sqrt{g_{r11}}}, \frac{x_3}{\sqrt{g_{r33}}} \right]$$

mukaisesti. Affinisessa muunnoksessa avaruuden jonkin tietyn suunnan etäisyyksiä lyhennetään tai pidennetään aina saman verran. Tämä on siis muunnos, jonka avulla esimerkiksi pallo muuttuu ellipsoidiksi ja kuutio muuttuu paralleelipipediksi. Affinimuunnos (4.86) säilyttää origon origona. Toisin sanoen origossa olevan pistelähteen sijainti ei muutu kyseisessä affinisessa muunnoksessa. Affinimuunnoksen jälkeen päädytään yhtälöön

$$(4.87) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3'^2} &= -\frac{I}{g_0} \delta(\bar{g}_r^{-1/2} \cdot \mathbf{r}') \\ &= -\frac{I}{g_0} \frac{\delta(\mathbf{r}')}{\det(\bar{g}_r^{-1/2})} = -\frac{I}{g_0} \frac{\delta(\mathbf{r}')}{\sqrt{\det \bar{g}_r}}, \end{aligned}$$

missä sähkönjohtavuusdyadin determinantti uniakσιαalisen johtavuuden tapauksessa on

$$(4.88) \quad \det \bar{g}_r = g_{r_{11}}^2 g_{r_{33}}.$$

Yhtälössä (4.87) on käytetty Diracin δ -funktion ominaisuutta (2.156) dyadin ja vektorin pistetulon tapauksessa, jossa dyadin itseisarvo on samastettavissa sen determinantin itseisarvon kanssa. Koska positiivi-definiitin johtavuuden tapauksessa johtavuuden determinantti on aina positiivinen, voidaan itseisarvomerkitkin jättää kirjoittamatta. Lisäksi käytetään tietoa, että

$$(4.89) \quad \det (\bar{g}_r^{1/2}) = \sqrt{\det \bar{g}_r},$$

mikä on helposti todettavissa uniakσιαalisessa tapauksessa paikkansa pitäväksi, koska uniakσιαalisessa tapauksessa pätee

$$(4.90) \quad \bar{g}_r^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{g_{r_{11}}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{r_{11}}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{g_{r_{33}}} \end{pmatrix}.$$

Yhtälö (4.87) on Poissonin yhtälö metriikaltaan muunnetussa avaruudessa. Yhtälön ratkaisu on kyseisen metriikan omaavassa kokoavaruudessa olevan pistelähteen potentiaali

$$(4.91) \quad \phi(\mathbf{r}') = \frac{I}{4\pi g_0 \sqrt{\det \bar{g}_r}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}}.$$

Siirtymällä affiinimuunnetusta pilkutetusta avaruudesta alkuperäiseen avaruuteen muunnoksen (4.86) avulla saadaan lopulta origossa olevan pistelähteen potentiaaliksi

$$(4.92) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi g_0 \sqrt{\det \bar{g}_r}} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_r^{-1} : \mathbf{r} \mathbf{r}}}.$$

Tämä on siis homogeenisen, uniakσιαalisen anisotrooppisen kokoavaruuden origossa olevan pistelähteen aikaansaama potentiaalikenttä. Siirrämme nyt pistelähteen yleiseen pisteeseen \mathbf{r}_0 , jolloin yhtälön (4.83) sijasta kirjoitetaan

$$(4.93) \quad i(\mathbf{r}) = I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Potentiaaliksi (4.92) voidaan tällöin kirjoittaa

$$(4.94) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi g_0 \sqrt{\det \bar{g}_r}} \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_r^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}}.$$

Huomataan, että tasapotentiaalipinnat ovat anisotrooppisessa väliaineessa ellipsoideja, joiden yhtälö on

$$(4.95) \quad \bar{g}_r^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = C,$$

missä C on vakio. Ellipsoidien keskipiste on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ja sen akselisuunnat ovat dyadin \bar{g}_r^{-1} ominaisvektoreiden suunnat, jotka ovat samat kuin \bar{g}_r :llä. Jos ekvipotentiaalipintojen joukkoa leikataan jollakin tasolla, tuloksena ovat ekvipotentiaalikäyrät, jotka ovat yhteisen keskipisteen omaavia ellipsejä.

Kirjoitetaan potentiaali (4.94) ilman dyadimerkintöjä sijoittamalla siihen uniaksiaalisen sähkönjohtavuuden dyadimuotoinen lauseke (4.82), sähkönjohtavuuden determinantin lauseke (4.88) sekä paikkavektoreiden komponenttimuotoiset lausekkeet. Otetaan lisäksi käyttöön merkinnät

$$(4.96) \quad \lambda = \sqrt{\frac{g_{r_{11}}}{g_{r_{33}}}} = \sqrt{\frac{g_{r_{\parallel}}}{g_{r_{\perp}}}}$$

ja

$$(4.97) \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{g_{r_{\parallel}} g_{r_{\perp}}}}.$$

Näiden avulla voidaan potentiaaliksi (4.94) kirjoittaa

$$(4.98) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{I\lambda}{4\pi g_0 g_{r_{\parallel}}} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \lambda^2(z-z_0)^2}},$$

missä selvyuden takaamiseksi on merkitty koordinaatteja (x_1, x_2, x_3) (x, y, z) :lla. Kertoimia (4.96) ja (4.97) kutsutaan *anisotropiakertoimiksi*. Niiden välillä on voimassa yhtälö

$$(4.99) \quad \eta = \frac{\lambda}{g_{r_{\parallel}}}.$$

Usein anisotropiakertoimet esitetään ominaisvastuksia koskevinä, jolloin ne saavat muodon

$$(4.100) \quad \lambda = \sqrt{\frac{\varrho_{r_{\perp}}}{\varrho_{r_{\parallel}}}}$$

ja vastaavasti

$$(4.101) \quad \eta = \sqrt{\varrho_{r_{\perp}} \varrho_{r_{\parallel}}}.$$

Anisotropiakertoimen (4.100) arvo vaihtelee sedimenttikivillä tavallisesti välillä $1, 1 - 2, 5$, mutta huomattavasti korkeampiakin arvoja voi esiintyä esimerkiksi metamorfisilla kivillä. Mitään kiinteää ylärajaa λ :lle ei ole.

Edellä teimme tarkastelun uniaksiaalisen sähkönjohtavuuden tapauksessa. On osoitettavissa, että esitetty affiiniseen muunnokseen pohjautuva metodi on yleispätevä myös yleisemmälle biaksiaaliselle johtavuudelle, jossa sähkönjohtavuustensorissa voi lävistäjäalkioiden lisäksi olla myös muita alkioita. Dyadiformalismiin käyttö osoittautuu tässä yhteydessä vertaansa vailla olevaksi tavaksi johtaa anisotrooppisen väliaineen potentiaalinen ratkaisu. Emme kuitenkaan tarkastele yleistä tapausta perusteellisemmin, koska se edellyttäisi myös esitettyä laajemman dyadianalyysin soveltamista. Huomattakoon, että uniaksiaalisessa tapauksessa on helppo muodostaa dyadin neliöjuuri (4.90) muodostamalla vain päälävistäjäalkioiden neliöjuuri. Samoin käänteisdyaadin muodostaminen onnistuu helposti uniaksiaalisessa tapauksessa. Lävistäjälle kirjoitetaan silloin vain alkuperäisen uniaksiaalisen dyadin päälävistäjäalkioiden käänteisarvot. Yleisessä tilanteessa näin ei voida menetellä.

Pistemäinen virtalähde uniaksiaalisessa anisotrooppisessa puoliavaruudessa

Jos pistemäinen virtalähde sijaitsee uniaksiaalisen puoliavaruuden pinnalla, on ilmeistä, että sen potentiaali saadaan yhtälöstä (4.98), kun siihen sijoitetaan $z_0 = 0$. Puoliavaruuden pinta on tasolla $z = 0$. Tällöin yhtälön (4.98) 4π korvataan 2π :llä. Sen sijaan, jos pistelähde on puoliavaruudessa syvyydellä d anisotrooppisen puoliavaruuden pinnasta, probleemi muuttuu hieman hankalammaksi. Vastaava isotrooppinen probleemi ratkeaa helposti kuvalähdeperiaatteella, kuten kohdassa 4.6.2 olemme nähneet. Jos uniaksiaalisen johtavuuden akseli on kohtisuorassa puoliavaruuden pintaa vastaan eli on puoliavaruuden pinnan normaalin suuntainen, voidaan probleemi ratkaista edelleen suhteellisen helposti kuvalähdeperiaatteella sijoittamalla kuvalähde symmetrisesti puoliavaruuden pinnan suhteen ja vaatimalla virrantiheyden normaali-komponentin häviäminen puoliavaruuden pinnalla. Jos uniaksiaalisen aineen akseli ei sen sijaan ole kohtisuorassa puoliavaruuden pintaa vastaan, osoittautuu, että kuvalähteen paikka ei tällaisessa yleisessä tapauksessa olekaan symmetrisesti tason $z = 0$ suhteen, vaan se siirtyy tason normaalista pois-päin. Seuraava tarkastelu osoittaa kuinka suuri mainittu siirtymä on.

Puoliavaruuden, jonka yläpuolella on täydellinen eriste, pinnalla on voimassa ehto

$$(4.102) \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{J} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_z \cdot \bar{\mathbf{g}}_r \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0,$$

kun \mathbf{r} on pinnalla $z = 0$. Tavoitteena on etsiä pisteessä $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ sijaitseva kuva-

lähdevirta $i_i(\mathbf{r})$, joka alkuperäisen virtalähteen kanssa tuottaa potentiaalin, joka toteuttaa ehdon (4.102) homogeenisessa anisotrooppisessa avaruudessa. Koska nyt osaamme laskea potentiaalin anisotrooppisessa kokoavaruudessa, voimme superpositioperiaatteella kirjoittaa yhtälön (4.94) mukaisesti

$$(4.103) \quad 4\pi g_0 \sqrt{\det \bar{g}_r} \phi(\mathbf{r}) = I \left[\bar{g}_r^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{e}_z d)(\mathbf{r} - \mathbf{e}_z d) \right]^{-1/2} + I_i \left[\bar{g}_r^{-1} : (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right]^{-1/2}.$$

Merkitään (x_1, x_2) - eli (x, y) -tasolla olevaa radiusvektoria $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2 x_2 = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$. Kun yhtälöön (4.103) sovelletaan ehtoa (4.102) kohdassa $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$, $x_3 = z = 0$, päädytään yhtälöön

$$(4.104) \quad Id \left[\bar{g}_r^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{e}_z d)(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{e}_z d) \right]^{-3/2} + I_i (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_i) \left[\bar{g}_r^{-1} : (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_i)(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_i) \right]^{-3/2} = 0,$$

jonka täytyy olla voimassa kaikille vektoreille $\boldsymbol{\rho}$. Kvalälähdevirraksi saadaan tästä ehdosta, kun $|\boldsymbol{\rho}| \rightarrow \infty$

$$(4.105) \quad I_i = -\frac{Id}{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_i}.$$

Kun tämä sijoitetaan yhtälöön (4.104) ja kun erityisesti $\boldsymbol{\rho} = 0$, päädytään seuraavaan yhtälöön, joka perustuu juurettavien yhtäsuuruuteen

$$(4.106) \quad \bar{g}_r^{-1} : (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z d^2) = 0.$$

Lopulta saamme yhtälön (4.104) avulla

$$(4.107) \quad \boldsymbol{\rho} \cdot \bar{g}_r^{-1} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{e}_z d) = 0.$$

Koska yhtälön (4.107) on oltava voimassa kaikille $\boldsymbol{\rho}$, jotka ovat kohtisuorassa \mathbf{e}_z vastaan, täytyy vektorin

$$\bar{g}_r^{-1} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{e}_z d)$$

olla yhdensuuntainen \mathbf{e}_z :n kanssa. Näin ollen on olemassa skalaari τ siten, että voidaan kirjoittaa

$$(4.108) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{e}_z d + \tau \bar{g}_r \cdot \mathbf{e}_z.$$

Sijoitetaan tämä yhtälö yhtälöön (4.106), jolloin saadaan yhtälö τ :lle. Saadaan toisen asteen yhtälö, jolla on kaksi juurta. Toinen juuri on $\tau = 0$,

mikä vastaa tilannetta, että kuvapistelähde sijoitetaan alkuperäisen lähteen kohdalle. Tämä ei ole kuitenkaan probleemimme kannalta mielenkiintoinen ratkaisu. Sen sijaan yhtälön toinen juuri antaa

$$(4.109) \quad \tau = -\frac{2d}{\bar{g}_r : \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}.$$

Yhtälön (4.109) avulla saadaan lopulta kuvavirtalähteen sijainniksi

$$(4.110) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{e}_z d - \frac{2d\bar{g}_r \cdot \mathbf{e}_z}{\bar{g}_r : \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}.$$

Kuvalähdepisteen paikkavektorin \mathbf{r}_i z -komponentti toteuttaa

$$(4.111) \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_i = -d,$$

joka on voimassa kaikille johtavuusdyadeille \bar{g}_r . Sijoittamalla (4.111) yhtälöön (4.105) saadaan kuvalähdevirrälle

$$(4.112) \quad I_i = I.$$

Probleemille on siis löydettävissä kuvalähderatkaisu dyadiformalismin avulla. Vaikka tarkastelumme taustalla olikin oletus uniaksiaalisesta aineesta, on edellä esitetty dyadiformalismin käyttö voimassa myös biaksiaalisen anisotropian tapauksessa.

Sähkönjohtavuustensorin muoto kaateellisen anisotropian omaavassa puoliavaruudessa

Geofysiikan sovelluksissa uniaksiaalisen sähkönjohtavuuden pitkittäinen johtavuus muodostaa usein jonkin kulman maanpinnan kanssa. Kyseessä on siis 'kaateellinen' anisotropia. Koska probleemi ratkaistaan kuitenkin maanpintaan sidotussa oikeakätisessä koordinaatistossa, on tarpeen koordinaatiston kierrolla selvittää, minkälaiset uniaksiaalisen väliaineen sähkönjohtavuustensorin komponentit tulevat olemaan kierron jälkeen. Olkoon maanpinta oikeakätisen (x, y, z) - eli (x_1, x_2, x_3) -koordinaatiston tasolla $z = 0 = x_3$. Yhtyköön tämän koordinaatiston y - eli x_2 -akseli uniaksiaalisen sähkönjohtavuuden koordinaatiston (α, β, γ) β -akselin kanssa. Kierretään oikeakätistä (x_1, x_2, x_3) koordinaatistoa x_2 -akselin ympäri myötäpäivään kulman ψ verran siten, että kierretyn koordinaatiston x_1 -akselia vastaava akseli tulee yhdensuuntaiseksi sähkönjohtavuuden pitkittäisen komponentin suunnan $g_{r_{\parallel}}$ eli α -akselin kanssa. Koordinaatiston kierron suuntakosineista koostuva muunnosmatriisi on siten

$$(4.113) \quad R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Koska virrantiheyden, sähkökentän ja niitä yhdistävän Ohmin lain tulee pysyä invarianttina koordinaatiston kierrossa, saadaan sähkönjohtavuustensoriksi

(4.114)

$$\bar{\bar{g}}_r = R^{-1} \begin{pmatrix} g_{r\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & g_{r\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & g_{r\perp} \end{pmatrix} R =$$

$$\begin{pmatrix} g_{r\parallel} \cos^2 \psi + g_{r\perp} \sin^2 \psi & 0 & g_{r\parallel} \sin \psi \cos \psi - g_{r\perp} \sin \psi \cos \psi \\ 0 & g_{r\parallel} & 0 \\ g_{r\parallel} \sin \psi \cos \psi - g_{r\perp} \sin \psi \cos \psi & 0 & g_{r\parallel} \sin^2 \psi + g_{r\perp} \cos^2 \psi \end{pmatrix}.$$

Koska kysymyksessä on ortogonaalinen kannanvaihtomatriisi R , on sen käänteismatriisi $R^{-1} = R^T$, missä T tarkoittaa transpoosia. Johtavuustensori (4.114) voidaan esittää dyadien avulla muodossa

(4.115)
$$\bar{\bar{g}}_r = a\bar{\bar{I}} + b\mathbf{v}\mathbf{v},$$

missä \mathbf{v} on uniaksaalisuuden akselin suuntaan osoittava yksikkövektori sekä a ja b johtavuuksista riippuvat kertoimet. Merkitään akselin suunnaksi

(4.116)
$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \cos \psi - \mathbf{e}_x \sin \psi = -\mathbf{e}_1 \sin \psi + \mathbf{e}_3 \cos \psi.$$

Summa $a + b$ kuvaa johtavuutta suunnassa \mathbf{v} eli johtavuutta $g_{r\perp}$ ja a johtavuutta tätä vastaan kohtisuorassa suunnassa eli $g_{r\parallel}$. Toisin sanoen

(4.117)
$$a + b = g_{r\perp} \quad a = g_{r\parallel},$$

joista seuraa

(4.118)
$$b = g_{r\perp} - g_{r\parallel}.$$

Näin ollen kaateellisen anisotrooppisen aineen sähkönjohtavuus dyadi-muodossa on

(4.119)
$$\bar{\bar{g}}_r = g_{r\parallel} \bar{\bar{I}} + (g_{r\perp} - g_{r\parallel}) \mathbf{v}\mathbf{v}.$$

On helposti todettavissa, että yhtälöt (4.114) ja (4.119) tarkoittavat samaa kaateellista anisotrooppista, uniaksaalista, sähkönjohtavuutta.

Loppuhuomautuksia anisotrooppisesta sähköjohtavuudesta

Anisotrooppisen väliaineen fysiikka on monessa suhteessa poikkeava isotrooppiseen tilanteeseen verrattuna. Yksi varsin merkittävä piirre on se, että sähkökentän divergenssi $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. Isotrooppisessa ja homogeenisessä tapauksessa sähkökentän divergenssi on nolla kaikkialla paitsi lähdealueessa. Anisotrooppiseen aineeseen muodostuu puolestaan pistemäisen virtalähteen vaikutuksesta avaruusvarausjakauma, vaikka aine olisikin muutoin homogeenistä.

Anisotrooppisten potentiaaliprobleemien ratkaiseminen on muutoinkin huomattavasti vaativampi tehtävä kuin vastaavan isotrooppisen tilanteen.

Todettakoon vielä lopuksi, että neliömuodon (4.80) tärkeä ominaisuus on, että se voidaan saattaa koordinaatiston kierrolla ns. pääakselimuotoon

$$(4.120) \quad g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 = 1,$$

missä pääakselijohtavuuksia on merkitty g_1 , g_2 ja g_3 . Nämä toisiaan vastaan kohtisuorassa olevat pääakselijohtavuudet voidaan määrittää johtavuustensoria vastaavasta neliömuodosta vaatimalla, että neliömuotoa kuvaavan ellipsoidin normaali on yhdensuuntainen ellipsoidin pinnalla olevan pisteen radiusvektorin kanssa. Tällöin on voimassa yhdensuuntaisuuden perusteella tensorimerkinnöin

$$(4.121) \quad g_{r_{ij}} x_j = \lambda x_i,$$

missä x_i tarkoittaa nyt radiusvektoria ellipsoidin keskipisteestä ellipsoidin pinnalle ja λ on vakio. Yhtälö (4.121) esittää kolmea homogeenista lineaarista yhtälöä muuttujina x_i . Ehto, että yhtälöillä on muu kuin triviaaliratkaisu $x_i = 0$ on, että kertoimista muodostuva determinantti on nolla. Matemaattisesti tämä tarkoittaa edelleen, että symmetristä johtavuustensoria tai -matriisia vastaavan determinantin pääälävistäjäarvoista vähennetään luku λ ja merkitään determinantti yhtäsuureksi kuin nolla. Yhtälömuodossa asia voidaan ilmaista

$$(4.122) \quad F(\lambda) = \begin{vmatrix} g_{r_{11}} - \lambda & g_{r_{12}} & g_{r_{31}} \\ g_{r_{12}} & g_{r_{22}} - \lambda & g_{r_{23}} \\ g_{r_{31}} & g_{r_{23}} & g_{r_{33}} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka voidaan lyhyemmin kirjoittaa muotoon

$$(4.123) \quad F(\lambda) = |g_{r_{ij}} - \lambda \delta_{ij}| = 0,$$

missä δ_{ij} on Kroneckerin δ -tensori (2.177). Tätä kuutiollista yhtälöä λ :n suhteen kutsutaan *sekulaariyhtälöksi*. Sillä on kolme juurta, jotka vastaavat pääakselijohtavuuksia g_{r_1} , g_{r_2} ja g_{r_3} . Näiden avulla saadaan muoto (4.120). Pääakselijohtavuuksien suunnat ovat ns. pääakselisuunnat.

Pääakselisähkönjohtavuudet voidaan saattaa yhtymään ortogonaalisen koordinaatiston akselisuuntien kanssa, jolloin sähkönjohtavuutta kuvaa tensori tai matriisi, jonka pääälävistäjällä ovat mainitut johtavuudet. On myös tapauksia, joissa pääakselisuuntien muodostamisella ei ole merkitystä aineen anisotrooppisen rakenteen monimutkaisuuden takia. Pääakselijohtavuuksien suuntien sitominen koordinaatiston akseleihin ei siis toisin sanoen vähennä tarvittavien tensorikomponenttien lukumäärää. Jäljelle jää maksimissaan kuusi toisistaan riippumatonta symmetrisen tensorin alkioita. Eli johtavuustensoriin jää joka tapauksessa myös muita kuin pääälävistäjällä olevia arvoja. Esimerkkinä tällaisesta johtavuudesta on trikliinisen kiteen sähkönjohtavuus tai toisiinsa nähden ei-suorissa kulmissa olevista rakoparvista koostuvan rakoilleen kallion sähkönjohtavuus.

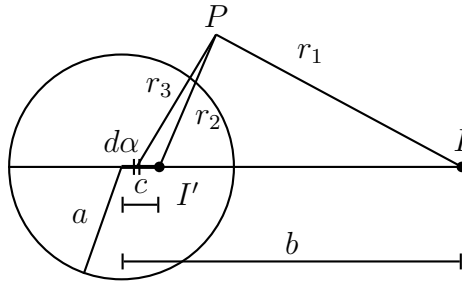
Geofysikaalisessa kirjallisuudessa suositaan matriiseihin ja tensoreihin pohjautuvaa anisotropian esitystapaa. Tästä syystä edellä olevassa esityksessä on käytetty näitä rinnan dyadiesityksen kanssa. Onkin hyödyllistä oppia käyttämään näitä rinnakkain ja lomittain, koska, kuten edellä oleva tarkastelu osoittaa, dyadiformalismilla voidaan ratkaista suhteellisen vaativa anisotrooppinen potentiaaliprobleemi jopa täysin yleiselle anisotropialle. Anisotropian esittämisessä on taas matriisi- tai tensorimuoto havainnollisempi.

4.6.5 Täydellinen eristepallo ($g = 0$) pistemäisen virtalähteen kentässä

Siirrymme seuraavaksi jälleen tarkastelemaan isotrooppista probleemia. Kohdassa 3.3.11 sivulla 128 tarkasteltiin dielektristä eristepalloa pistevarauksen kentässä ja todettiin, että yleisessä tapauksessa probleemille ei ole löytynyt yrityksistä huolimatta kuvalähdetratkaisua. Vastaavalla johdepalloprobleemille on olemassa kohdassa 3.3.8 esitetty Kelvinin inversioratkaisu. On olemassa kuitenkin erikoistapauksia, joille kuvalähdetratkaisu on löydettävissä myös eristepallon tapauksessa. Yksi tällainen on täydellistä sähköistä eristettä (sähkönjohtavuus $g = 0$) eli ns. täydellistä magneettista johdetta (PMC eli Perfect Magnetic Conductor) vastaava probleemi.

Olkoon pallon säde a . Sijoitetaan pallon keskipiste origoon ja pistemäinen virtalähde I z -akselille etäisyydelle b origosta kuvan 4.4 mukaisesti. Käytetään hyväksi pallokoordinaatistoa, joten on tarkoituksenmukaista sijoittaa virtalähde z -akselille. Toki virtalähteelle voitaisiin valita mikä tahansa muukin sijainti, mutta esitystekniikan yksinkertaistamiseksi tehtäköön mainittu valinta. Pallon ulkopuolisen avaruuden sähkönjohtavuus olkoon g_0 . Eristepallon pinnalla on oltava voimassa reunaehto

$$(4.124) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0$$



Kuva 4.4: Täydellinen eristepallo pistemäisen virtalähteen kentässä. Ratkaisu kuvalähdeperiaatteella.

eli sähkövirtaa ei pääse kulkeutumaan pallon sisälle. Kaukana pallosta potentiaalin on lähestyttävä nollaa kuten $1/r$. Olkoon yleinen laskentapiste $P = (x, y, z)$.

Menemättä kuvalähderatkaisun konstruoinnin yksityiskohtiin annettakoon lopputulos, jonka mukaan pallon ulkopuolella potentiaali voidaan laskea korvaamalla pallo tietyillä kahdella kuvalähteellä. Toinen näistä on pistevirtalähde

$$(4.125) \quad I' = I \frac{a}{b},$$

joka sijoitetaan Kelvinin pisteeseen

$$(4.126) \quad c = \frac{a^2}{b},$$

kuten vastaavassa täydellisesti johtavan johdepallon inversioratkaisussa (3.128). Kelvinin inversiossa q tulee nyt vain korvata I :llä, q' I' :lla ja ϵ_0 g_0 :lla.

Tämä ei kuitenkaan yksin riitä toteuttamaan reunaehtoa (4.124). Lisäksi tarvitaan viivavirtalähde, jonka voimakkuus pituusyksikköä kohden on $-I/a$ ja joka yhdistää Kelvinin pisteen pallon keskipisteeseen. Näiden kuvalähteiden avulla potentiaaliksi pallon ulkopuolella voidaan kirjoittaa

$$(4.127) \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi g_0} \left(\frac{I}{r_1} + \frac{I'}{r_2} - \int_0^{a^2/b} \frac{I}{a} \frac{1}{r_3} d\alpha \right),$$

missä α on integrointimuuttuja ja

$$(4.128) \quad \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2} = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a^2/b)^2} = \sqrt{r^2 + (a^2/b)^2 - 2r(a^2/b) \cos \theta}, \\ r_3 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \alpha)^2} = \sqrt{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos \theta}. \end{aligned}$$

Edellä on merkitty laskentapisteen etäisyyttä origosta $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ja pallokoordinaatiston polaari- eli kolatitudikulmaa θ :lla, jolloin $z = r \cos \theta$.

Historiallisesti on mielenkiintoista, että tämä ratkaisu löydettiin jo runsas sata vuotta sitten analogisessa hydrodynaamisessa probleemissa, jossa pyörteetön, kokoonpuristumaton ja kitkaton virtaus menee kiinteän pallon ohitse. Ratkaisu jäi sittemmin unohduksiin, kunnes 1990-luvulla se löydettiin uudelleen.

Lukija voi vakuuttua ratkaisun oikeellisuudesta tarkistamalla, että ratkaisu toteuttaa reunaehdon (4.124). Potentiaalin $1/r$ -muotoinen käyttäytyminen on ilmeinen.

4.6.6 Loppuhuomautus virtausstatiikan potentiaaliprobleemeista

Olemme huomanneet, että virtausstaattiset potentiaaliprobleemit ovat täysin analogisia sähköstatiikan probleemien kanssa. Siten kaikki menetelmät, joita sähköstaattisten probleemien ratkaisemiseksi on olemassa soveltuvat sellaisinaan, vain merkintätapoja muuttaen, virtausstaattisten probleemien ratkaisemiseen.

Sovelletussa geofysiikassa sähköiset virtausstaattiset probleemit esiintyvät galvaanisten anomalioitten laskennassa. Virtausstaattisina probleemeina lasketaan myös indusoidun polarisaation anomaliat, koska menetelmässä käytettävä syöttövirran taajuus on niin alhainen, ettei induktiota vielä mainittavasti esiinny.

Galvaanisten mittausten avulla voidaan selvittää myös maankamaran sähkönjohtavuuden anisotropiaa. Tästä syystä anisotrooppiset probleemit liittyvät geofysiikassa usein galvaanisiin menetelmiin. Probleemien ratkaiseminen on kuitenkin huomattavasti vaikeampi tehtävä kuin vastaavien isotrooppisten probleemien ja siksi niitä ei ole kovin runsaasti esitetty alan oppikirjoissa. Tässä kirjassa esitetty ratkaisu on pätevä yleiselle sähkönjohtavuuden anisotropialle. Dyadilaskennan käyttö helpottaa tehtävän ratkaisun löytymistä huomattavasti.

Sähköstatiikan ja virtausstatiikan perustana ovat Coulombin laki ja varauksen säilymlaki eli jatkuvuusyhtälö. Näin ollen kaikki sähköstatiikkaan

ja virtausstatiikkaan liittyvät tarkastelut ovat itse asiassa näiden lakien seurauksia.

Luku 5

Magnetostatiikka

Edellisessä luvussa tarkastelimme sähkövirtoja ja niiden sähköisiä vuorovaikutuksia eli varausten synnyttämään sähkökenttään liittyviä ilmiöitä. Sähkövirtaan liittyy kuitenkin aina myös toinen vuorovaikutus eli *magneettinen* vuorovaikutus. Tarkastelemme seuraavaksi ajasta riippumatonta tilannetta eli *magnetostatiikkaa* kahdesta näkökulmasta. Toinen liittyy makroskooppisten sähkövirtojen aikaansaamaan magneettikenttään ja toinen magnetoituneen aineen aikaansaamaan magneettikenttään, joka syntyy aineen atomaaristen virtojen vaikutuksesta. Geofysiikassa tarvitaan näitä molempia tarkasteluja. Sovelletun geofysiikan magneettisissa menetelmissä mitataan magnetoituneesta aineesta aiheutuvia kenttiä. Ns. magnetometrisessä vastusmenetelmässä puolestaan mitataan maahan elektrodien kautta syötetyn virran aikaansaamaa magneettikenttää. Myös globaaligeofysiikassa makroskooppisten virtojen synnyttämien magneettikenttien tarkastelu on keskeisellä sijalla.

5.1 Magnetostatiikan kenttäyhtälöt tyhjiössä

5.1.1 Magneettinen voimavaikutus

Sähköstatiikassa totesimme, että sähköinen vuorovaikutus ilmenee nimenomaan voimavaikutuksena kahden varauksen välillä. Tämä voimavaikutus eli vuorovaikutus kahden varauksen välillä esitettiin Coulombin lain muodossa. Myös magneettinen vuorovaikutus ilmenee voimavaikutuksena, kuten vaikapa kompassineulan kääntyminen Maan magneettikentässä osoittaa.

Historiallisesti on maininnan arvoista, että Coulomb tutki sähköstaattisen voimalain lisäksi myös magneettista voimavaikutusta kahden magneettineulan pään välillä ja totesi, että päiden välillä vaikuttaa samanlainen käänteistä neliölakia noudattava voima kuin sähkövaraustenkin tapauksessa. Myöhempi

fysiikka on kuitenkin paljolti unohtanut tämän lain, luultavasti siitä syystä, että laki edellyttää erillisen magneettisen varauksen olemassaoloa. Magneettinen varaus on matemaattisena oliona käyttökelpoinen ja johtaa fysiikan kanssa matemaattisesti sopusoinnussa oleviin tuloksiin, joskaan täysin fysikaalinen olio se ei ole. Kokeellisesti on nimittäin todettu, että magneettiset lähteet ovat aina dipoleja. Yksittäistä magneettista lähdettä ei ole fysikaalisesti olemassa. Siksi Coulombin magneettista voimavaikutuslakia ei pidetä fysikaalisesti täysin korrektina.

Lorentzin voima

Sähkövirtojen aikaansaaman magneettisen vuorovaikutuksen havaitsi kokeellisesti Ørstedt¹ vuonna 1820. Vuorovaikutuksen havaitseminen ei tokikaan ollut mikään helppo tehtävä, koska myöskään sähkövirran käsitettä ei tuohon aikaan vielä täysin ymmärretty. Joka tapauksessa Ørstedtin havainto osoitti, että sähkö ja magnetismi kuuluvat erottamattomasti toisiinsa.

Koska varausten liikkeeseen eli sähkövirtaan liittyy aina voimavaikutus, on tarpeen määritellä kokeellisten havaintojen pohjalta sähkömagneettisessa kentässä liikkuvaan varaukseen kohdistuva voima. Tämä voima \mathbf{F} , yksikkönä N, tunnetaan *Lorentzin*² voimana, joka ilmaistaan yhtälöllä

$$(5.1) \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

jossa \mathbf{v} on varauksen q nopeus ja \mathbf{B} *magneettivuon tiheys*, yksikkönä $\text{Ns}/(\text{Cm}) = \text{Vs}/\text{m}^2 = \text{T}$ (tesla)³.

Lorentzin voimassa on kaksi termiä, joista ensimmäinen liittyy sähkökentän voimavaikutukseen ja joka on suunnaltaan sama tai vastakkainen (riippuu varauksen etumerkistä) kuin sähkökenttä. Puhtaasti sähköstaattisessa tilanteessa on vain tämä termi mukana. Toinen voimatermi kuvaa magneettivuon tiheyskentässä \mathbf{B} liikkuvaan varaukseen kohdistuvaa voimaa. Sen suunta on kohtisuorassa magneettivuon tiheyskenttää ja nopeutta vastaan. On huomattava, että tämä on kokeellinen havainto. Lorentzin voima kytkee sähkömagneettisen vuorovaikutuksen mekaniikkaan. Lorentzin voima (5.1) pätee esitetyssä muodossa myös ajasta riippuvassa tapauksessa.

¹Hans Christian Ørstedt (1777–1851), tansk. fyysikko.

²Hendrik Anton Lorentz (1853–1928), alankomaal. fyysikko.

³Nikola Tesla (1856–1943), kroatialais-amerikkalainen sähköinsinööri.

Virtajakaumaan kohdistuva voima ja momentti

Oletetaan, että avaruudessa on liikkuvia varauksia eli sähkövirtaa, jonka virrantiheys on

$$(5.2) \quad \mathbf{J} = \rho \mathbf{v},$$

missä ρ on avaruusvaraustiheys. Tällöin tilavuuden dV kautta virtaavaan varaukseen kohdistuu magneettinen Lorentzin voima

$$(5.3) \quad d\mathbf{F} = \rho dV \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} dV \times \mathbf{B},$$

josta integroimalla saadaan kokonaisvoima

$$(5.4) \quad \mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV.$$

Edellä emme vielä problematisoi sitä, miten magneettivuon tiheyskenttä \mathbf{B} on syntynyt emmekä liioin sitä, missä ja minkälaista varausten virta eli sähkövirta on, toisin sanoen onko se konduktiivista vai konvektiivista virtaa, tapahtuuko se väliaineessa vai tyhjiössä. Palaamme tarkemmin magneettikentän syntymekanismiin hieman myöhemmin. Tässä vaiheessa riittää käsitys, että sähkövirrat eli liikkuvat varaukset ovat sekä makro- että mikrotasolla syynä magneettiseen vuorovaikutukseen.

Sähkövirrat voivat jakautua avaruuteen eri tavoin. Edellä käsitellyn tilavuuteen jakautuvan virran lisäksi virta voi jakautua *viivavirraksi* I , yksikkönä A , kuten johtimessa kulkeva virta, jolloin voidaan kirjoittaa

$$(5.5) \quad I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dV,$$

missä $d\mathbf{l}$ on differentiaalinen vektoriaalinen johdinalkio, jonka suunta on virrantiheyden \mathbf{J} suunta. Jos johdin muodostaa umpinaisen silmukan C , on silmukkaan kohdistuva voima

$$(5.6) \quad \mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Virta voi jakautua myös jollakin pinnalla olevaksi *pintavirraksi* \mathbf{K} , yksikkönä A/m , jolloin voidaan kirjoittaa

$$(5.7) \quad \mathbf{K} dS = \mathbf{J} dV,$$

missä dS on differentiaalinen pinta-ala-alkio.

Voimavaikutukset voidaan kaikissa tapauksissa laskea yhtälöstä (5.4) sijoittamalla siihen tarvittava jakauma.

Edellä oletimme, että magneettivuon tiheyskenttä \mathbf{B} on täysin mielivaltainen, joskin ajasta riippumaton. Tarkastelemme seuraavaksi tapausta, jossa magneettivuon tiheyskenttä \mathbf{B} on homogeeninen eli suunnaltaan ja suuruudeltaan vakio. Tällöin umpinaiseen johtimeen kohdistuva voima on yhtälön (5.6) mukaan

$$(5.8) \quad \mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} \text{ on homogeeninen.}$$

(vektoriopillinen laskuharjoitustehtävä).

Määritämme seuraavaksi umpinaiseen johtimeen kohdistuvan momentin $\boldsymbol{\tau}$, yksikkö Nm. Johdinalkioon vaikuttava momentti on määritelmänsä mukaan

$$(5.9) \quad d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}),$$

missä \mathbf{r} on alkion $d\mathbf{l}$ paikkavektori, ja momentti on laskettu origon suhteen. Integroimalla saadaan

$$(5.10) \quad \boldsymbol{\tau} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Lyhyt laskelma osoittaa, että tämän momentin arvo ei riipu momenttipisteen valinnasta (harjoitustehtävä). Jos edelleen oletamme, että \mathbf{B} on homogeeninen, voidaan yhtälöä (5.10) sieventää. Kehitetään integrandia vektorikolmitulon kehityskaavaa (2.26) apuna käyttäen muotoon

$$(5.11) \quad \boldsymbol{\tau} = I \oint_C [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) d\mathbf{l} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l})\mathbf{B}].$$

Muunnetaan seuraavaksi viivaintegraalit pintaintegraaleiksi soveltamalla yleistä Stokesin lausetta (2.103)

$$(5.12) \quad \oint_L d\mathbf{l} \star \mathbf{U} = \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \star \mathbf{U},$$

jossa \mathbf{U} on mielivaltainen skalaari-, vektori- tai dyadiarvoinen funktio ja missä \star tarkoittaa joko tyhjää, pistettä tai ristiä siten, että lauseen esittämät kertolaskut ovat mielekkäitä ja ylipäätään määriteltyjä. Aiemmin esittämämme

Stokesin lause (2.102) on yleisen Stokesin lauseen (5.12) erikoistapaus, kun \mathbf{U} on vektori ja \star tarkoittaa pistetuloa.

Saamme siten edelleen (harjoitustehtävä), kun \mathbf{B} on vakiovektori,

$$(5.13) \quad \boldsymbol{\tau} = I \left[\int_S (d\mathbf{S} \times \nabla \mathbf{r}) \cdot \mathbf{B} - \int_S d\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) \mathbf{B} \right].$$

Kun otetaan huomioon, että $\nabla \mathbf{r}$ on yksikködyadi ja että $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, sievenee yhtälö (5.13) muotoon

$$(5.14) \quad \boldsymbol{\tau} = I \left(\int_S d\mathbf{S} \right) \times \mathbf{B} = I \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

missä \mathbf{A} on käyrään C rajoittuvan pinnan *pinta-alavektori*.

Suure $I \mathbf{A}$ osoittautuu hyvin tärkeäksi magneettisessa kenttäteoriassa ja sitä kutsutaan *magneettiseksi dipolimomentiksi* ja merkitään symbolilla \mathbf{m} (yksikkönä $[\text{Am}^2]$)

$$(5.15) \quad \mathbf{m} = I \mathbf{A}.$$

Yleisen Stokesin lauseen (5.12) avulla on edelleen helposti osoitettavissa, että pinta-alavektorille pätee

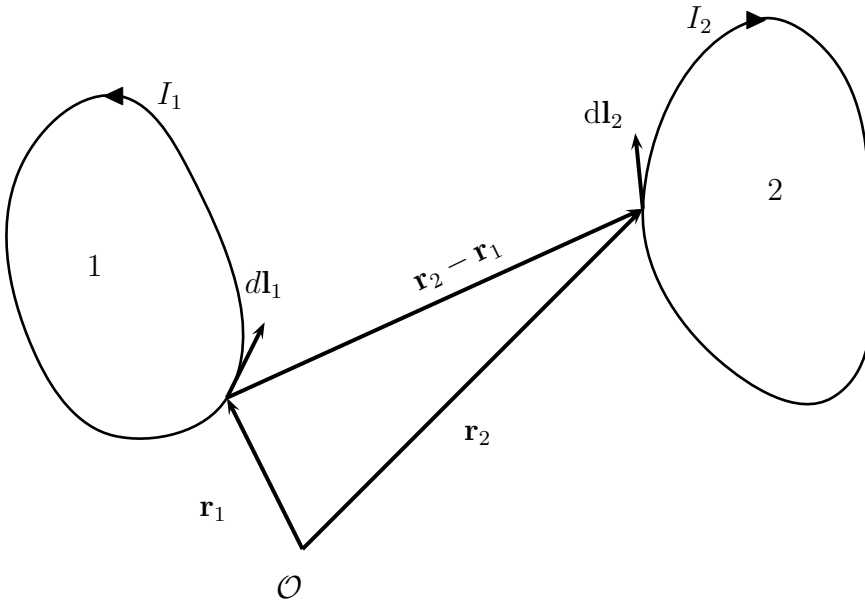
$$(5.16) \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}.$$

Tämän avulla voidaan magneettinen dipolimomentti kirjoittaa muotoon

$$(5.17) \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}.$$

Jos tarkastellaan tilavuuteen jakautunutta virtaa, voidaan tämä edelleen kirjoittaa muunnoksen (5.5) avulla muotoon

$$(5.18) \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV.$$



Kuva 5.1: Ampèren voimalain merkinnät.

5.1.2 Umpinaisten virtasilrukoiden välinen magneettinen voima – Ampèren voimalaki

Olemme edellä jo todenneet, että magneettinen vuorovaikutus syntyy sähkövirroista. Sähköstaattista kahden varauksen välistä Coulombin lakia vastaakin fysikaalisesti magnetostatiikassa kahden virtasilrukan välinen voimalaki. Tämä laki tunnetaan *Ampèren voimalain* nimellä. Se on kirjoitettavissa kuvan 5.1 merkinnöin

$$(5.19) \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 \times [d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Laki kuvaa virtasilrukkaan 2 kohdistuvaa voimaa, jonka aikaansaa virtasilrukassa 1 kulkeva virta eli virtasilrukan 1 magneettivuon tiheyskenttä. Jos silrukoiden virrat ovat samansuuntaisia, on silrukoiden välinen voima vetovoimaa. Vastaavasti jos virrat ovat vastakkaisuuntaisia, silrukoiden välinen voima on poistovoimaa. Lain muoto on huomattavasti Coulombin lakia monimutkaisempi ristitulojen takia.

Kerroin määräytyy yksikköjärjestelmästä. SI-yksikköjärjestelmässä se on määritelmän mukaan

$$(5.20) \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N/A}^2,$$

missä μ_0 on tyhjiön magneettinen permeabiliteetti (yksikkönä $\text{N/A}^2 = \text{Tm/A} = \text{Vs/(Am)} = \Omega\text{s/m} = \text{H/m}$ ($\text{H} = \text{henry}^4$)) eli *magneettivakio*. Magneettivakion arvo on siis $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$.

Ampèren voimalaki (5.19) voidaan vektorikolmitulon kehityskaavaa (2.26) ja yleistettyä Stokesin lausetta (5.12) apuna käyttäen saattaa vaihtoehtoiseen muotoon

$$(5.21) \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3},$$

josta nähdään selvästi, että $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$.

5.1.3 Stationaaristen sähkövirtojen aikaansaama magneettikenttä – Biot-Savartin laki

Selvitettyämme kahden virtasilmukan välisen magneettisen voiman (5.19) voidaan sen avulla määrittää magneettivuon tiheys. Yhtälö (5.6) kuvaa umpinaiseen virtasilmukkaan kohdistuvan kokonaisvoiman. Kun tätä yhtälöä verrataan yhtälöön (5.19), voidaan päätellä, että magneettivuon tiheydelle pätee, kun laskentapistettä \mathbf{r}_2 merkitään \mathbf{r} :llä ja lähdepistettä \mathbf{r}_1 \mathbf{r}' :lla

$$(5.22) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Tätä yhtälöä kutsutaan yleisesti Biotin ja Savartin laiksi tai lyhyemmin *Biot-Savartin laiksi*.⁵ Sen avulla voidaan laskea tunnetusta virrasta sen aikaansaama magneettivuon tiheyskenttä. Virrantiheyden avulla ilmaistuna Biot-Savartin laki voidaan esittää muodossa

$$(5.23) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

On painotettava sitä, että Biot-Savartin laki (5.23) on *kokeellinen laki*, kuten itse asiassa Lorentzin voimakin. Biot-Savartin laki on voimassa

⁴Joseph Henry (1797–1878), amerik. fyysikko.

⁵Jean-Baptiste Biot (1774–1862), ransk. fyysikko. Hänen mukaansa on nimetty myös biotiitti-mineraali. Félix Savart (1791–1841), ransk. lääkäri ja fyysikko.

yleisesti kaikille virtajakaumille. Ampèren voimalakia (5.19) ja siitä johdettua Biot-Savartin lakia (5.22) voidaan pitää Coulombin lain ja sähkökentän määrittelyn vastineina magnetostatiikassa. Voitaisiin siis ajatella, että toinen virtasilmukka olisi ikään kuin testivirtasilmukka, johon kohdistuvan voiman avulla magneettivuon tiheyskenttä määritellään, aivan kuten tehdään sähköstatiikassa, jossa sähkökenttä määritellään testivarauskohtaan kohdistuvan voimavaikutuksen avulla. Magneettivuon tiheys määritelläänkin usein juuri epäsuorasti Lorentzin voimausekkeen magneettisen voiman avulla. Historiallisesti on huomattava, että aluksi esittämämme Lorentzin voima (5.1) on jonkin verran myöhempää perua kuin Biot-Savartin laki. Sähkömagnetismissa eri lakien nimeäminen myös vaihtelee eri maissa jonkin verran. Lait ovat useimmiten saaneet nykyisin esitettävät muodot vasta myöhemmin.

Huomautus. Olemme edellä käyttäneet termiä magneettikenttä varsin yleisessä merkityksessä. Tarkastelumme kohteena on ollut koko ajan kuitenkin magneettivuon tiheyskenttä. Tämä terminologinen seikka esiintyy myös käytännössä. Geofysiikassa magneettikentästä puhuttaessa tarkoitetaan useimmiten juuri magneettivuon tiheyttä. ■

5.1.4 Magneettivuon tiheyskentän differentiaaliyhtälöt

Voimme seuraavaksi muodostaa Biot-Savartin lain pohjalta magneettivuon tiheyden kenttäyhtälöt eli divergenssi- ja roottoriyhtälön.

Magneettivuon tiheyskentän divergenssi

Magneettivuon tiheyden divergenssiksi saadaan yhtälöstä (5.23), kun kenttäpisteinä on piste \mathbf{r}

$$(5.24) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'.$$

Kun integraalin alla käytetään vektori-identiteettiä (2.115) eli $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$ ja kun tehdään samastukset $\mathbf{F} = \mathbf{J}$ ja $\mathbf{G} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$, saadaan

$$(5.25) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = 0,$$

sillä

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla \times \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \equiv 0.$$

Toisin sanoen yleisessä kenttäpisteessä \mathbf{r} on voimassa

$$(5.26) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.}$$

Tämä yhtälö on yksi sähkömagnetismin perusyhtälöistä. Fysikaalisesti se tarkoittaa, että magneettisia varauksia tai erillisiä magneettisia napoja ei ole olemassa, koska divergenssi kuvaa skalaarilähdetiheyttä. Todelliset fysikaaliset magneettiset lähteet ovat aina siten dipoleja.

Magneettivuon tiheyskentän roottori

Muodostetaan Biot-Savartin lain avulla seuraavaksi magneettivuon tiheyden roottori kenttäpisteessä \mathbf{r} käyttäen vektori-identiteettiä (2.117)

$$(5.27) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) - \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'$$

Edellisen termin lauseke

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

voidaan merkitä samaksi kuin

$$4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

sillä

$$4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\nabla \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

kuten jo yhtälössä (3.31) on menetelty. Yhtälön (5.27) jälkimmäinen termi häviää, kuten seuraava tarkastelu osoittaa. Nablalla operoiminen voidaan kohdistaa myös \mathbf{r}' :een, sillä on voimassa

$$(5.28) \quad \nabla \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = +\nabla' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3},$$

missä merkintä ∇' tarkoittaa nablalla operoimista ('nablaamista') pilkutetun muuttujan suhteen.

Huomataan edelleen, että yhtälön (5.27) integraalin alla olevan lausekkeen jälkimmäinen termi on osa lausekkeesta

$$(5.29) \quad \nabla' \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) = \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}.$$

Koska tarkastelemme stationaarista tilannetta, jolloin jatkuvuusyhtälöstä (4.9) seuraa, että $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, yhtälön (5.27) integraalin alla oleva jälkimmäinen termi on siten sama kuin

$$-\nabla' \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right).$$

Tässä on kyseessä dyadin divergenssi, jonka tilavuusintegraali voidaan muuntaa dyadimuotoisen Gaussin lauseen eli divergenssiteoreeman avulla pintaintegraaliksi

$$(5.30) \quad - \int_V \nabla' \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right) dV' = - \oint_S d\mathbf{S}' \cdot \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \right).$$

Kun Gaussin pinta valitaan siten, että sen sisäpuolelle jäävät kaikki virrat (virrantiheydet) $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, on edellä oleva pintaintegraali nolla, koska pinnalla S on silloin $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$.

Näin ollen saadaan magneettivuon tiheyden roottoriksi

$$(5.31) \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}),$$

koska yhtälön (5.27) ensimmäinen termi antaa tilavuusintegroinnin jälkeen Diracin δ -funktion ominaisuuden perusteella $\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$. Näin ollen magnetostaatiikassa ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$) pätee kenttäyhtälö

$$(5.32) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}},$$

jota kutsutaan *Ampèren piirilain eli kiertämälain* differentiaalimuodoksi.

Stokesin lauseen (2.102) mukaan

$$(5.33) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

jolloin yhtälön (5.32) perusteella integroimalla

$$(5.34) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I_{tot}.$$

Tämä on Ampèren piirilain integraalimuoto.

Ampèren piirilaki lausuu, että magneettivuon tiheyden viivaintegraali umpinaista käyrää pitkin on sama kuin μ_0 kertaa tähän umpinaiseen käyrään rajoittuvan pinnan läpi menevä kokonaisvirta I_{tot} . Tällä lailla on josain mielessä magnetostaatiikassa samanlainen asema kuin sähköstaatiikassa

käytetyllä Gaussin lailla. Lakia voidaan käyttää hyväksi joidenkin symmetristen virtajakaumien magneettivuon tiheyskenttien määrittämiseen, kuten tuonnempana esitetään.

Huomautus. Ampèren nimi esiintyy sähkömagneettisessa kenttäteoriassa monissa kohdin ja hänen mukaansa on nimetty eri lakeja. Erityisesti on huomattava, että Ampèren voimalaki on eri laki kuin Ampèren piirilaki, ja siten ei riitä useinkaan puhua vain Ampèren laista, jos sekaantumisen vaaraa on. ■

5.1.5 Magneettinen vektoripotentiaali

Edellä päädyimme tulokseen, että aina pätee $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ eli magneettivuon tiheys on lähteetön kenttä. Vektorianalyysistä tiedetään, että lähteetön kenttä voidaan aina lausua vektoripotentiaalin roottorina, koska roottorin divergenssi häviää identtisesti. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$(5.35) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

missä vektoria \mathbf{A} kutsutaan *magneettiseksi vektoripotentiaaliksi*, yksikkönä $\text{Ns/C} = \text{Tm}$.

Sijoitetaan seuraavaksi (5.35) yhtälöön (5.32). Tällöin saadaan

$$(5.36) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J},$$

mikä edelleen voidaan saattaa kehityskaavan (2.111) avulla muotoon

$$(5.37) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

Tässä voimme asettaa vektoripotentiaalille lisäehdon $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ilman, että \mathbf{A} :n tärkein ominaisuus eli että sen roottori on sama kuin magneettivuon tiheys, siitä mitenkään muuttuisi. Näin ollen saamme \mathbf{A} :lle differentiaaliyhtälön

$$(5.38) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

Tämän vektoriaalisen Poissonin yhtälön yleinen ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$(5.39) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

missä lähdealuetta on merkitty pilkutetulla muuttujalla.

Huomautettakoon, että tulos (5.39) on saatavissa vektoriopillisesti myös suoraan Biot-Savartin laista. Voimme nimittäin kirjoittaa yhtälön (5.23) integrandin muotoon

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ja lisäksi käyttää vektori-identiteettiä (2.116). Näiden avulla saamme Biot-Savartin lain mukaiselle magneettivuon tiheydelle

$$(5.40) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

jossa roottorin voi vielä siirtää integraalimerkin eteen, koska nablalla operoiminen kohdistuu kenttäpisteeseen \mathbf{r} , joka ei ole integrointimuuttujana. Näin ollen

$$(5.41) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right].$$

Edellä saadusta \mathbf{B} :n lausekkeesta voidaankin sitten päätellä vektoripotentiaalin lauseke (5.39), koska $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

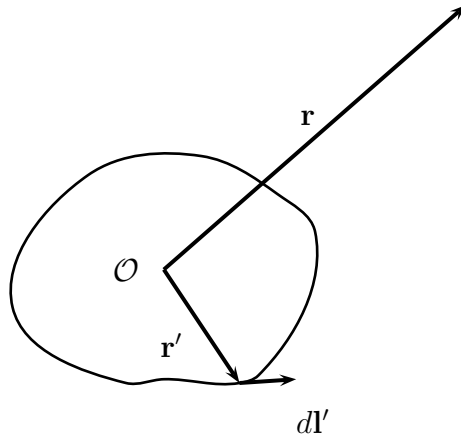
Koska vektoripotentiaali on luonteeltaan vektori, sillä ei ole samanlaista laskentatyötä helpottavaa vaikutusta kuin sähköstatiikan skalaarisella potentiaalilla. Varsinaisesti sen käytöstä hyödytäänkin sähködynamiikan puolella. Magnetostatiikassa sillä on merkitystä eräiden tulosten johtamisessa, kuten seuraavassa tulemme jo huomaamaan.

5.1.6 Mielivaltaisen virtasilmukan kenttä kaukana silmukasta

Tarkastelemme seuraavaksi mielivaltaisen umpinaisen virtasilmukan tai piirin magneettivuon tiheyskenttää kaukana lähdealueesta. Tämä tarkastelu tehdään edellä saadun vektoripotentiaalin avulla.

Olkoon kuvan 5.2 mukainen mielivaltainen virtasilmukka siten, että origo sijaitsee virtasilmukan sisällä. Tämä valinta on tarpeellinen ja se yksinkertaistaa merkintätapoja. Merkitään kenttäpistettä ja lähdepistettä totuttuun tapaan tunnuksilla \mathbf{r} ja \mathbf{r}' . Tehdään edellä saatuun vektoripotentiaalin lausekkeeseen (5.39) sijoitus $\mathbf{J}dV' \rightarrow I d\mathbf{l}'$. Tällöin vektoripotentiaali on siis

$$(5.42) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$



Kuva 5.2: Mielivaltaisen virtasilmukan kenttä kaukana.

Seuraavaksi kehitetään nimittäjää sarjaksi. Sitä varten se kirjoitetaan muotoon

$$(5.43) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{-1/2}$$

ja kehitetään binomiteoreeman (2.213) avulla sarjaksi r'/r :n suhteen:

$$(5.44) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right].$$

Sarjasta on otettu mukaan vain r'/r :n lineaariseen eli ensimmäistä astetta olevaan termiin saakka ulottuva kehitemä. Sijoittamalla tämä vektoripotentiaaliin (5.42) saadaan

$$(5.45) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint d\mathbf{l}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \right\}.$$

Ensimmäinen integraali häviää, koska kyseessä on umpinainen silmukka (harjoitustehtävä). Toinen termi voidaan muuntaa yleisen Stokesin lauseen (5.12) avulla muotoon

$$(5.46) \quad \oint d\mathbf{l}' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \int d\mathbf{S}' \times \nabla' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \int d\mathbf{S}' \times \mathbf{r}.$$

Tällöin vektoripotentiaaliksi saadaan

$$(5.47) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d\mathbf{S}' \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left(I \int d\mathbf{S}' \right) \times \mathbf{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

missä \mathbf{m} on virtasilmukan magneettinen momentti yhtälön (5.15) mukaisesti, koska integraali $\int d\mathbf{S}'$ on pinta-alavektori. Tämä vektoripotentialin lauseke on siis voimassa, kun $r' \ll r$, mikä tarkoittaa, että origon on oltava lähellä virtasilmukkaa.

Kun nyt olemme saaneet vektoripotentialin, voimme määrittää magneettivuon tiheyden muodostamalla tästä roottorin kenttäpisteessä \mathbf{r}

$$(5.48) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right]. \end{aligned}$$

Sieventämällä tämä dyadeja hyväksikäyttäen ja huomaamalla, että toinen termi on nolla, saadaan

$$(5.49) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} \right].$$

Tämä lauseke voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(5.50) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \right),$$

kuten helposti nablalla operoimalla on todettavissa.

Lopputulokseksi saamme origossa sijaitsevan magneettisen dipolin, jonka dipolimomentti on \mathbf{m} , kentän. Jos tätä vertaa vastaavaan sähköisen dipolin kenttälausekkeeseen (3.43), huomaamme niiden olevan muodoltaan samat.

Magneettisen dipoliin kohdistuva voima ja momentti

Magneettivuon tiheyskentässä \mathbf{B} olevaan magneettiseen dipoliin kohdistuva voima voidaan määrittää yhtälön (5.6) avulla, kun siihen sovelletaan yleistä Stokesin lausetta (5.12). Tällöin saadaan, kun merkitään $d\mathbf{m} = I d\mathbf{S}$,

$$(5.51) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \int_S (I d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \int_S (d\mathbf{m} \times \nabla) \times \mathbf{B} \\ &= \int_S [\nabla(d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - d\mathbf{m}(\nabla \cdot \mathbf{B})] = \int_S \nabla(d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Edellä sovellettiin muodollisesti vektorikolmitulon kehityskaavaa ja käytettiin hyväksi tietoa, että $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Lisäksi integroinnin ja nablalla operoimisen saattoi vaihtaa keskenään, koska ne kohdistuvat eri muuttujiin. Tässä integrointi siis ajatellaan tehtäväksi differentiaalisen virtasilmukan yli.

Vastaavasti yhtälöstä (5.10) voidaan johtaa magneettiseen dipoliin kohdistuvaksi momentiksi

$$(5.52) \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

5.1.7 Magneettinen skalaaripotentialiaali

Edellä saimme magneettivuon tiheyttä koskevaksi yhdeksi kenttäyhtälöksi $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Jos virrantiheys \mathbf{J} on nolla, seuraa tästä, että magneettivuon tiheyskenttä on pyörteetön eli $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Pyörteettömällä kentällä on puolestaan olemassa skalaaripotentialiaali. Näin ollen *virrattomassa* alueessa voidaan kirjoittaa

$$(5.53) \quad \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi^*,$$

missä ϕ^* on magneettinen skalaaripotentialiaali, yksikkönä A.

Edellä saimme myös toiseksi kenttäyhtälöksi $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Sijoitetaan tähän lauseke (5.53), jolloin päädytään Laplaceen yhtälöön

$$(5.54) \quad \nabla^2 \phi^* = 0.$$

Magneettisen skalaaripotentialin avulla voidaan, analogisesti sähköisen dipolin potentialin (3.47) kanssa, kirjoittaa pisteessä \mathbf{r}' olevan magneettisen dipolin magneettivuon tiheyskentän lauseke muotoon

$$(5.55) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right),$$

missä magneettinen skalaaripotentialiaali on

$$(5.56) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Tämä on siis mielivaltaisen virtasilmukan magneettinen skalaaripotentialiaali kaukana silmukasta virrattomassa alueessa tai vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että silmukan pinta-ala kutistetaan nolllaksi ja pidetään tulo $\mathbf{m} = I \mathbf{A}$ vakiona. (Huomaa, että vektori \mathbf{A} tarkoittaa tässä pinta-alavektoria, ei siis magneettista vektoripotentialia.)

Tällä tuloksella on käyttöä, kun tarkastelemme magnetoituneen aineen aikaansaamaa magneettivuon tiheyskenttää.

5.2 Magnetostatiikan kenttäyhtälöt väliaineessa

Edellä oletimme, että virtajakaumat sijaitsevat tyhjiössä. Seuraavaksi siirrymme tarkastelemaan aineen magneettisia ominaisuuksia, aineen vaikutusta magneettikenttään ja magnetostatiikan kenttäyhtälöitä erilaisten aineiden ja rajapintojen tapauksessa.

Olemme jo aiemmin todenneet, että kaikki magneettiset vuorovaikutukset syntyvät sähkövirroista. Näin on myös aineen magneettisten ominaisuuksien kohdalla, sillä aineen voidaan kuvitella muodostuvan atomaarisista virtasilmuksista eli elektronisista virtapiireistä atomydinten ympärillä. Näin ollen aineessa voi olla kahdenlaisia sähkövirtoja eli makroskooppisia virtoja, jotka ovat varausten liikettä kulkeutumisen mielessä sekä mikroskooppisia, atomeihin sidottuja, atomaarisia virtoja.

Historiallisesti on huomattava, että aineen magnetismin tutkimus on itse asiassa hyvin vanhaa. Se alkoi huomattavasti aiemmin ennen kuin sähkövirtojen luonnetta edes ymmärrettiin ja tajuttiin, että sähkövirrat aikaansaavat magnetismin. Merkittävä uranuurtaja magnetismin tutkimuksessa oli englantilainen William Gilbert⁶, jonka teos 'De Magnete' vuodelta 1600 kuvailee yrityksiä magnetismin olemuksen ymmärtämiseksi. Siinä käsitellään myös Maan magneettikenttään eli geomagnetismiin liittyviä kysymyksiä.

Viittasimme jo aiemmin siihen, että Coulomb esitti magneettisen voimain, joka on muodoltaan samanlainen kuin vastaava sähköstaattinen laki. Itse asiassa magnetoituneen aineen, jossa ei ole makroskooppisia virtoja, kenttäteoria voitaisiin matemaattisesti kehittää Coulombin magneettisen voimain pohjalta, jolloin päädyttäisiin sähköstatiikan kanssa täysin analogiseen esitykseen. Koska Coulombin magneettinen voimalaki edellyttää magneettisen varauksen olemassaolon tunnustamista, tämä laki ei ole puritaanisten fyysikoiden suosiossa, ja siksi se on haluttu unohtaa. Emme itsekään sitä ala soveltaa, vaan lähdemme liikkeelle nykyäsityksestä, jonka mukaan aineen kaikki magneettiset ominaisuudet ovat selitettävissä atomaaristen ns. magneetti- eli magnetoitumisvirtojen avulla. Tulemme huomaamaan, että myös näin saatavat kenttäyhtälöt ovat analogisia sähköstatiikassa esitettyjen yhtälöiden kanssa.

5.2.1 Magnetoituneen aineen aikaansaama magneettikenttä

Ennen kuin voimme tarkemmin määrittää magnetoituneen aineen aikaansaaman magneettikentän, määrittelimme aineen magnetoitumista makroskooppiselta kannalta kuvaavan vektorin.

Olemme kohdassa 5.1.6 todenneet, että mielivaltaisen virtasilmukan eli piirin magneettivuon tiheyskenttä kaukana piiristä on sama kuin magneettisen dipolin kenttä. Näin ollen atomaaristen virtojen magneettivuon tiheyskenttä makroskooppisessa mittakaavassa on magneettisten dipolien kenttä.

⁶William Gilbert (1544–1603), engl. lääkäri (kuningatar Elisabet I:n hovilääkäri) ja fyysikko.

Jos lähdemme käsityksestä, että aineen atomaariset virrat aikaansaavat aineen kaikki magneettiset ominaisuudet, voimme määritellä aineen magneettisia ominaisuuksia makroskooppisesti luonnehtivan vektorin, joka kuvaa magneettisten dipolimomenttien tiheyttä. Aineen voidaan siis ajatella koostuvan magneettisista dipoleista, ja voimme siten kirjoittaa

$$(5.57) \quad \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta V} = \frac{d\mathbf{m}}{dV},$$

missä raja-arvoprosessi on muodostettava 'fysiikan hengessä', jotta tilavuudessa ΔV on koko ajan riittävästi atomaarisia dipolimomentteja $\Delta \mathbf{m}$. Suuretta \mathbf{M} kutsutaan aineen *magnetoitumaksi*, yksikkönä A/m.

Huomaamme, että tämä makroskooppinen lähestymistapa on täysin analoginen sähköiselle polarisaatiolle (3.56).

Oletamme aluksi, että aineessa ei ole makroskooppista sähkövirtaa, vaan kaikki magnetismi aiheutuu atomaarisista virroista. Tällöin voidaan ainekapaleen, jonka tilavuus on V ja magnetoituma \mathbf{M} , magneettiseksi vektoripotentialiksi laskentapisteessä \mathbf{r} kirjoittaa yhtälön (5.47) perusteella

$$(5.58) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV',$$

jossa siis \mathbf{r}' on lähdepisteen tunnus. Tämä voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(5.59) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV',$$

missä ∇' kohdistuu lähdepisteeseen \mathbf{r}' .

Käyttäen vektori-identiteettiä (2.116) saadaan vektoripotentialiksi

$$(5.60) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \int_V \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \right].$$

Jälkimmäinen tilavuusintegraali voidaan muuntaa Gaussin lauseen perusteella (kun sitä sovelletaan nyt roottori-muotoiseen yleisen Gaussin lauseen mukaiseen lausekkeeseen (2.96)) pintaintegraaliksi, jolloin saadaan

$$(5.61) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{S}' \right].$$

Jos vertaamme tätä vektoripotentialia yleiseen lausekkeeseen (5.39), voimme päätellä, että termien $\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ ja $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$, missä \mathbf{n} on pinnan S ulkonormaaliyksikkövektori, täytyy dimensioiltaan vastata virtajakaumia. Näitä virtoja kutsutaankin *magnetoitumisvirroiksi*. Tilavuusmagnetoitumisvirtaa (yksikkönä A/m^2) merkitään yleisesti

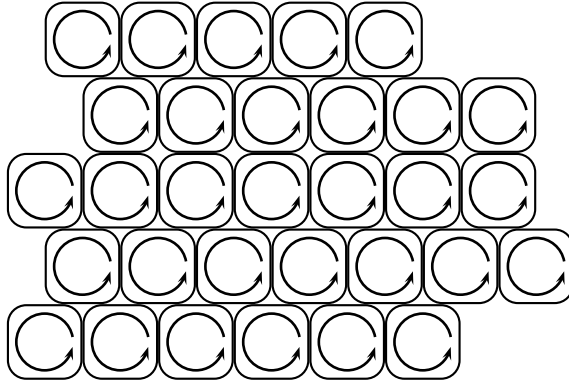
$$(5.62) \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

ja pintamagnetoitumisvirtaa (yksikkönä A/m)

$$(5.63) \quad \mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n},$$

missä alaindeksi M viittaa juuri termiin magnetoitumisvirta.

Magnetoitumisvirrat ovat siis aineessa olevia sidottuja virtoja. Ne eivät osallistu varausten kuljettamiseen eivätkä siten ole samoja kuin makroskooppiset kuljetusvirrat tai johtumis- eli konduktiovirrat. Mielikuvan siitä, että magnetoituneessa aineessa voi ajatella olevan magnetoitumisvirtoja saa kuvasta 5.3. Jos magnetoituminen on homogeenista eli \mathbf{M} on vakio, \mathbf{J}_M on



Kuva 5.3: Homogeeninen magnetoituma \mathbf{M} aineessa atomaaristen virtasil-
mukoiden synnyttämänä.

kaavan (5.62) mukaan nolla ja magnetoitumisvirtaa on ainoastaan kappaleen pinnalla. Kuvasta huomataankin, että homogeenisen magnetoituman tapauksessa magnetoitumisvirta kappaleen sisällä on nolla, sillä vierekkäisten virtasil-
mukoiden virrat kumoavat toisensa ja jäljelle jää vain pinnalla oleva magnetoitumisvirta.

Edellinen tarkastelu koskee tilannetta, jossa aineessa ei ole makroskooppista virtaa. Jos kappaleessa on sidottujen magnetoitumisvirtojen lisäksi makroskooppinen vapaa virta $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, voidaan kokonaisvektoripotentiali määrittää laskemalla sen osuus (5.39) vektoriaalisesti yhtälöön (5.61) mukaan. Näin

ollen kokonaisvektoripotentiali on

$$(5.64) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{S}' \right].$$

Muodostamme seuraavaksi kenttäyhtälön $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ yleisessä laskentapisteessä \mathbf{r} . Koska $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, saadaan

$$(5.65) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Kun valitaan $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, voidaan kirjoittaa edelleen

$$(5.66) \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\nabla^2 \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \mu_0 \int_V [\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \\ &= \mu_0 [\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})]. \end{aligned}$$

On huomattava, että yhtälön (5.64) pintaintegraalitermi häviää, kun integroimispinta ulotetaan ”matemaattisen epsilonin” päähän kappaleen pinnasta, jolloin pintavirtojen osuuden voidaan ajatella sisältyvän tilavuusintegraaliin. Käytännössä integroimistilavuus säilyy koko ajan samana, joten sitä merkitään V :llä. Koska nablalla operoiminen kohdistuu kenttäpisteeseen \mathbf{r} , voidaan käyttää hyväksi yhtälöä $\nabla^2(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Edellä saimme tuloksen, että \mathbf{B} -kentän roottorissa ovat mukana sekä ’vapaat’ makroskooppiset virrat \mathbf{J} että ’sidotut’ magnetoitumisvirrat \mathbf{J}_M . Toisin sanoen \mathbf{B} -kentän pyörre muodostuu *totaalivirroista*, $\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_M$ kerrottuna magneettivakiolla μ_0 .

Seuraavaksi palautetaan mieliin sähköstatiikassa tehty valinta. Sähköstatiikassa otimme käyttöön keinotekoiselta tuntuvan kentän, nimeltään sähkövuon tiheys \mathbf{D} (3.66), joka määriteltiin siten, että sen lähteinä ovat vain vapaat, ulkoiset varaukset. Toisin sanoen sen divergenssi antoi vapaiden lähteiden avaruusvaraustiheyden.

Haluamme seuraavaksi määritellä myös magnetostatiikassa sellaisen uuden vektorikentän siten, että sen pyörrekenttänä eli roottorina ovat vapaat makroskooppiset virrat. Jos yhdistämme yhtälön (5.66) lopullisessa muodossa $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \nabla \times \mathbf{M})$ roottoritermit, saadaan

$$(5.67) \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}.$$

Kun nyt sulkeissa oleva lauseke *määritellään* uudeksi vektorikentäksi \mathbf{H}

$$(5.68) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M},$$

päädytään toivomaamme tulokseen eli että tämän kentän roottori on sama kuin vapaa makroskooppinen virrantiheys

$$(5.69) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Vektorikenttää \mathbf{H} kutsutaan *magneettikentän voimakkuudeksi*, yksikkönä A/m. Sillä on siis magnetostatiikassa samanlainen asema kuin sähkövuon tiheydellä sähköstatiikassa.

Magnetoituneen aineen kenttä skalaaripotentialin avulla

Edellä määrittelimme magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} siten, että sen roottorina on vapaa makroskooppinen virrantiheys \mathbf{J} . Geofysiikan magneettisten anomalioiden laskeminen tehdään useimmiten otaksumalla, että magneettivuon tiheyskenttä muodostuu ainoastaan magnetoitumasta \mathbf{M} sekä Maan magneettikentästä, jonka vaikutuksesta magnetoituma on muodostunut. Toisin sanoen useimmiten makroskooppinen virta $\mathbf{J} = 0$. Tällöin yhtälön (5.69) mukaan $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, mikä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{H} = -\nabla\phi^*$. ϕ^* tarkoittaa jo aiemmin esillä ollut magneettista skalaaripotentialia.

Koska magnetoituneen aineen voidaan kuvitella koostuvan magneettisista dipoleista, joiden potentialiaali on (5.56), voidaan näiden aikaansaama magneettivuon tiheyskenttä määrittää analogisesti sähköisestä polarisaatiosta \mathbf{P} aiheutuvan sähkökentän kanssa, sillä sähköinen polarisaatiohan mielletään juuri sähköisten dipolien jakaumaksi aineessa. Magneettiseksi skalaaripotentialiksi voidaan yhtälön (5.56) perusteella ja analogisesti yhtälön (3.58) kanssa kirjoittaa

$$(5.70) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Edelleen sama proseduuri, jota käytettiin yhtälön (3.60) muodostamisessa, soveltuu myös magnetostatiikan probleemiin. Korvataan yhtälössä (3.60) sähköinen polarisaatio magnetoitumalla \mathbf{M} ja kerroin $1/(4\pi\epsilon_0)$ kertoimella $1/(4\pi)$, jolloin magneettiseksi skalaaripotentialiksi voidaan suoraan kirjoittaa

$$(5.71) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Merkitään

$$(5.72) \quad \rho_M(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

ja

$$(5.73) \quad \sigma_M(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}.$$

Näitä kutsutaan *magneettiseksi napatiheydeksi* (ρ_M), yksikkönä A/m² ja vastaavasti *magneettisen napavoimakkuuden pintatiheydeksi* (σ_M), yksikkönä A/m. Ne vastaavat magneettisia varauksia. Luonteeltaan ne ovat tosin fiktiivisiä, mutta laskennallisesti käyttökelpoisia. Huomaamme edelleen, että \mathbf{H} :n määrittely-yhtälön (5.68) mukaan saadaan \mathbf{H} :n divergenssiksi eli skalaarilähdetiheydeksi

$$(5.74) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} = \rho_M,$$

koska $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Tästä voidaan päätellä, että jos magnetoituma on homogeeninen, magneettisen skalaaripotentialin lähteinä ovat ainoastaan magneettiset pintavaraukset eli magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys.

Magneettiseksi skalaaripotentialiksi voidaan kirjoittaa

$$(5.75) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS',$$

jonka avulla saadaan $\mathbf{H} = -\nabla\phi^*$. Edelleen magneettivuon tiheyskentäksi saadaan yhtälön (5.68) mukaisesti

$$(5.76) \quad \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla\phi^* + \mu_0 \mathbf{M}.$$

Jos tarkastelupiste on magnetoituneen alueen ulkopuolella, on $\mathbf{M} = 0$.

Näin ollen magnetostaattinen magnetoituneen aineen probleemi on täysin analoginen sähköstaattisen dielektrisen probleemin kanssa.

Magneettivarausten kokonaismäärä magnetoituneessa aineessa on nolla eli

$$(5.77) \quad Q_M = \int_V (-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')) dV' + \oint_S \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS' = 0,$$

kuten Gaussin lauseen (2.95) avulla on nähtävissä. Vastaavanlainen tuloshan pätee myös polarisaatiovarauksille: (3.64).

Kuten edellä oleva tarkastelu osoittaa, on täysin makuasia, miten suhtautua magneettisiin varauksiin. Magneettisen varauksen -käsite tulee joka tapauksessa magnetostaattisessa kenttäteoriassa esiin. Jos olisimme lähteneet

liikkeelle magneettisesta Coulombin laista, olisimme päätyneet suoraan edellä esitettyihin magnetoituneen aineen yhtälöihin täysin analogisesti vastaavan dielektrisen polarisaatioprobleemin kanssa. Virtoihin pohjautuva magnetismin tarkastelu on kuitenkin fysikaalisempi. Tällöin lähtökohtana on Ampèren voimalaki (5.19), jonka on todettu pitävän paikkansa kaikenlaisille tasavirroille. Itse asiassa Ampère itsekin otaksui aineen magnetismin aiheutuvan atomaarisista virroista.

Todettakoon vielä lopuksi, että virrattoman magnetoituneen aineen magneettivuon tiheyden lausekkeeseen (5.76) päädytään tietenkin myös vektoripotentialista (5.58) muodostamalla sen roottori. Lukija olisikin ehkä halunnut lähteä soveltamaan heti vektoripotentialia magneettivuon tiheyden laskemiseen, koska aina $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Valitsimme kuitenkin magneettisen skalaaripotentialin tien ja käytimme polarisoituneen aineen ja magnetoituneen aineen välistä analogiaa. Lukijan tehtäväksi jätetäänkin magneettivuon tiheyden (5.76) määrittäminen vektoripotentialin avulla.

Virrallisen magnetoituneen aineen magneettikenttä

Edellä tehdyssä tarkastelussa lähdettiin siitä, että magnetoituneessa aineessa ei ole makroskooppista sähkövirtaa. Jos aineessa on myös makroskooppinen virta, voidaan tämän kontribuutio magneettivuon tiheyskenttään laskea Biot-Savartin lailla (5.23) ja lisätä se superpositioperiaatteella vektoripotentialista magneettivuon tiheyden lausekkeeseen (5.76). Toisin sanoen kokonaismagneettivuon tiheydeksi voidaan kirjoittaa

$$(5.78) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' - \mu_0 \nabla \phi^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}),$$

missä

$$(5.79) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'.$$

Lopulliseksi magneettivuon tiheyden laskukaavaksi saadaan siten

$$(5.80) \quad \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \rho_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \sigma_M \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \\ &+ \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Tässä integrointialueiden on ulotuttava siten, että kaikki virrat kuuluvat niihin sekä kaikki magnetoituneiden aineiden tilavuudet ja pinnat. On huomattava, että laskentakaava (5.80) on enemmänkin symbolinen, koska sen käyttö edellyttää, että tunnemme magnetoituman \mathbf{M} sekä virrantiheyden \mathbf{J} . Käytännössä usein tunnetaankin \mathbf{J} , mutta magnetoituma riippuu magneettivuon tiheydestä \mathbf{B} , toisin sanoen $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$.

Lisäksi on huomattava, että yhtälö (5.80) saatiin soveltamalla ajatusmallia, jossa aluksi ei ole makroskooppista virtaa ja lasketaan vain magnetoituneen aineen magneettivuon tiheyskenttä. Tämän jälkeen aineeseen päästetään virta, jonka virrantiheys on \mathbf{J} ja lasketaan sen aikaansaama osuus magneettivuon tiheyskenttään Biot-Savartin lain mukaisesti. Lopuksi nämä magneettivuon tiheyskentät superponoidaan vektoriopillisesti. Tällöin siis oletetaan, että virrantiheys \mathbf{J} ei vaikuta millään lailla magnetoitumaan \mathbf{M} ja sitä kautta magneettisiin varausjakautumiin. Magneettivuon tiheyden yhtälöt (5.78) ja (5.80) toteuttavat magnetostatiikan kenttäyhtälöt $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ja $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot}$, missä \mathbf{J}_{tot} sisältää kokonaisvirran eli makroskooppisen virran ja magnetoitumisvirran, joten käyttämämme superponoiva lähestystapa on oikein.

5.2.2 Magnetostatiikan konstitutiiviset yhtälöt

Edellä jo todettiin, että magnetoituma riippuu magneettivuon tiheydestä, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B})$. Useimmiten asia esitetään kuitenkin siten, että magnetoituma \mathbf{M} riippuu magneettikentän voimakkuudesta \mathbf{H} eli $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ ja magneettivuon tiheys \mathbf{B} riippuu puolestaan magneettikentän voimakkuudesta eli $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$.

Rajoitamme tarkastelumme *LIIH*-väliaineisiin, joille voidaan kirjoittaa

$$(5.81) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

missä laaduton kerroin χ_m on *magneettinen susceptibiliteetti*. Yleisesti magneettinen susceptibiliteetti on toisen kertaluvun tensori tai dyadi $\overline{\overline{\chi}}_m$. Esimerkiksi anisotrooppisten kiteiden magnetoituma ei ole siten samansuuntainen kuin magneettikentän voimakkuus.

Aineiden magneettisten ominaisuuksien tutkimus kuuluu materiaalfysiikan ja erityisesti kiinteän olomuodon fysiikan piiriin. Aineiden magneettiset ominaisuudet tulevat itse asiassa tarkasti ymmärretyiksi vasta kvanttifysiikan avulla. Kenttäteoriamme kannalta emme kuitenkaan ole kiinnostuneita aineiden sisäisestä rakenteesta, vaan siitä, miten väliaine vaikuttaa makroskooppisesti kenttiin. Materiaalfysiikalisissa tutkimuksissa on selvinnyt, että tietyille materiaaleille kerroin χ_m voi saada pieniä positiivisia arvoja, jolloin

materiaalin sanotaan olevan *paramagneettinen* tai se voi saada pieniä negatiivisia arvoja, jolloin materiaalin sanotaan olevan *diamagneettinen*. Lisäksi kerroin χ_m riippuu usein voimakkaasti lämpötilasta. Kuitenkin aina ilmaisulla 'pieni' tarkoitetaan, että

$$|\chi_m| \ll 1.$$

Kirjallisuudessa käytetään myös käsitteitä *ominais- eli massasuskeptibiliteetti* $\chi_{m, \text{mass}}$ ja *molaarinen suskeptibiliteetti* $\chi_{m, \text{molar}}$. Nämä määritellään seuraavasti:

$$(5.82) \quad \chi_{m, \text{mass}} = \frac{\chi_m}{d},$$

$$(5.83) \quad \chi_{m, \text{molar}} = \frac{A\chi_m}{d},$$

missä d on aineen massatiheys, yksikkönä kg/m^3 ja A atomi- tai molekyyli-paino.

Lineaarinen relaatio (5.81) johtaa myös lineaariseen relaatioon \mathbf{B} :n ja \mathbf{H} :n välille yhtälön (5.68) mukaisesti:

$$(5.84) \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H},$$

missä kerroin

$$(5.85) \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

on *magneettinen permeabiliteetti*. Luonnollisesti myös permeabiliteetti on yleisesti toisen kertaluvun tensori.

Usein käytetään laadutonta suhteellista permeabiliteettia

$$(5.86) \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m.$$

Paramagneettiset ja diamagneettiset aineet ovat vain heikosti magneettisia ja siksi ne eivät ole geofysiikan sovellusten kannalta kovin mielenkiintoisia. Niiden permeabiliteetti $\mu \approx \mu_0$.

Kolmannen ryhmän aineiden joukossa muodostavat *ferromagneettiset* aineet, joille $\mu \gg \mu_0$. Ferromagnetismi jaetaan usein vielä varsinaiseen ferromagnetismiin, *antiferromagnetismiin* ja *ferrimagnetismiin*. Varsinaisia ferromagneettisia aineita ovat puhtaat metallit rauta (Fe), nikkeli (Ni) ja koboltti (Co). Antiferromagneettisista mineraaleista tärkein on hematitiitti. Geofysiikan kannalta tärkeimmät magnetoitumaa aiheuttavat aineet kuuluvat

ferrimagneettisiin aineisiin. Tärkeimmät ferrimagneettiset mineraalit ovat magnetiitti, titanomagnetiitti, ilmeniitti ja magneettikiisu. Ferrimagneettisten mineraalien susceptibiliteetti voi vaihdella hyvin laajoissa rajoissa välillä $10^{-2} - 100$.

Ferromagneettisille aineille on tyypillistä myös epälineaarisuus, jossa $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Tämä ilmenee ns. hysteresis-silmukkana \mathbf{B} :n ja \mathbf{H} :n välillä.

Ferromagneettisilla aineilla on geofysiikan kannalta yksi hyvin merkittävä ominaisuus ja se koskee niiden lämpötilakäyttäytymistä. Lämpötilan noustessa yli ns. Curie⁷-pisteen niiden magnetoituminen häviää kokonaan ja ne muuttuvat paramagneettisiksi. Magnetiitille Curie-piste on n. 585 °C, raudalle n. 770 °C ja hematitille n. 675 °C. Käytännössä magnetoitumisen häviämisestä seuraa, että Maan magneetikentän kallioperään synnyttämä magnetoituma ulottuu maan pinnalta vain n. 25-40 km:n syvyyteen, jossa maan geoterminen lämpötila kohoaa yli Curie-lämpötilan.

Taulukossa 5.1 on esitetty joidenkin tavallisimpien geologisten materiaalien magneettisen susceptibiliteetin arvoja. Todettakoon, että geofysiikan sovelluksissa käytetään magneettisten ominaisuuksien karakterisoinnissa tavallisesti magneettista susceptibiliteettia eikä permeabiliteettia. Kysymys on tietenkin makuasiasta, koska suureiden välillä vallitsee yksikäsitteinen relatio $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$. Taulukon arvot ovat *SI*-järjestelmän mukaisia laaduttomia lukuja.

Emme perehdy aineiden magneettisiin ominaisuuksiin tämän tarkemmin. Toteamme kuitenkin, että myös geologisten materiaalien magneettisten ominaisuuksien tutkimus on laajaa ja se muodostaa keskeisen alueen *petrofysiikassa*, joka on geofysiikan materiaalifysiikkaa.

Tulkoon vielä mainituksi, että ferromagneettisilla materiaaleilla on usein myös pysyvä ns. remanenttimagnetoituma, vaikka ulkoista kenttää ei olisi-kaan. Remanenttimagnetoitumaan on tallentunut geologisen materiaalin aiemmin kokemaa magnetoitumista, jota selvitetään *paleomagneettisten* mittausten avulla. Nämä mittaukset puolestaan tuottavat tietoa esimerkiksi laattatektonisten tapahtumien selvittämiseksi. Remanentin magnetoituman (\mathbf{M}_r) tapauksessa väliaine yhtälö (5.81) saa muodon

$$(5.87) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} + \mathbf{M}_r.$$

5.2.3 Kenttävektoreiden rajapintaehdot

Määritämme seuraavaksi magnetostatiikan kenttävektoreiden rajapintakäyttäytymisen kahden permeabiliteetiltään erilaisen aineen rajapinnan läpi mentäessä soveltamalla Gaussin ja Stokesin lauseita kuvan 5.4 tilanteisiin. Mag-

⁷Pierre Curie (1859–1906), ransk. fyysikko.

Taulukko 5.1: Geologisten materiaalien magneettisen susceptibiliteetin arvoja $\chi_m \cdot 10^5$ [SI].

(Huomaa eksponentin etumerkki. Tämän merkinnän mukaisesti taulukon luvut on kerrottava siis luvulla 10^{-5} SI-järjestelmän mukaisen susceptibiliteetti-arvon saamiseksi.)

Materiaali	Susceptibiliteetti
jää	-1
biotitti	12 – 220
kvartsi	-1
magneettikiisu	850 – 10^5
kromiitti	625 – 10^5
magnetiitti	6500 – $1,2 \cdot 10^6$
grafiitti	-1 – -50
graniitti	2 – 4500
gabro	0 – 7000
gneissi	0 – 300
hiekkakivi	3 – 70
kvartsiitti	490
peridotiitti	12500

neettivuon tiheyden \mathbf{B} rajapintaehto saadaan, kun sovelletaan Gaussin lausetta differentiaaliseen 'pillerirasiaan', joka ulottuu rajapinnan molemmiin puolin ja jonka korkeuden annetaan lähestyä nollaa. Magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} rajapintaehto saadaan, kun sovelletaan Stokesin lausetta differentiaaliseen polkuun $ABCD$, joka kulkee molempien aineiden kautta ja jonka osien AD ja BC annetaan lähestyä nollaa.

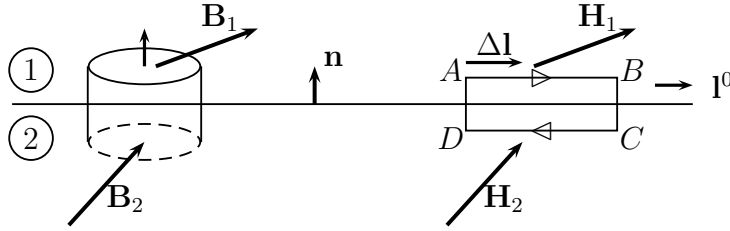
Olkkoon rajapinnalla makroskooppinen pintavirta \mathbf{K} yksikkönä A/m eli virta pinnan pituusyksikköä kohden ja \mathbf{l}^0 olkkoon $\Delta\mathbf{l}$:n suuntainen yksikkövektori. Magneettivuon tiheyden \mathbf{B} :n rajapintaehdoksi saadaan yhtälöstä $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$(5.88) \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

eli

$$(5.89) \quad B_{1n} = B_{2n}.$$

Magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on siis aina jatkuva aineiden rajapinnoilla. Tämä tulos pätee aina riippumatta aineiden luonteesta.



Kuva 5.4: Magneettivuon tiheyden \mathbf{B} ja magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} rajapintaehdojen johtaminen.

Magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} :n rajapintaehdoksi saadaan Stokesin lauseen (2.102) eli tässä tapauksessa \mathbf{H} :lle pätevän Ampèren kiertämälain integraalimuodon

$$(5.90) \quad \oint_{ABCD} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}^0) dS = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}^0) \Delta S$$

perusteella

$$(5.91) \quad \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l}^0 |\Delta \mathbf{l}| - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l}^0 |\Delta \mathbf{l}| = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}^0) |\Delta \mathbf{l}|.$$

Jakamalla puolittain $|\Delta \mathbf{l}|$:llä saadaan

$$(5.92) \quad (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{l}^0 = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l}^0) = \mathbf{K} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}^0,$$

joka voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(5.93) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}.$$

Tähän päästään muodostamalla puolittain (5.92):n ristitulo \mathbf{n} -vektorin kanssa ja käyttämällä vektorikolmitulon kehityskaavaa. Lisäksi termi $\mathbf{J} \Delta S$ korvautuu luonnollisesti termillä $\mathbf{K} |\Delta \mathbf{l}|$ yhtälössä (5.90).

Yhtälö (5.93) tarkoittaa, että magneettikentän voimakkuuden tangenti-aalikomponentti on pintavirran verran epäjatkuva.

Lineaarisen ja isotrooppisen väliaineen tapauksessa magneettivuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto (5.89) saa muodon

$$(5.94) \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Virrattomassa tilanteessa ($\mathbf{K} = 0$) magneettikentän voimakkuuden rajapintaehto (5.93) saa muodon

$$(5.95) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2.$$

Toisin sanoen magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentti on tällöin jatkuva.

Koska virrattomassa tilanteessa magneettikentän voimakkuus on pyörteetön ja se voidaan siten lausua skalaaripotentialin avulla, $\mathbf{H} = -\nabla\phi^*$, saadaan magneettiselle skalaaripotentialille jatkuvuusehto (analogisesti sähköpotentialin kanssa)

$$(5.96) \quad \phi_1^* = \phi_2^*.$$

Edelleen rajapintaehto (5.94) voidaan tällöin esittää myös muodossa

$$(5.97) \quad \mu_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \phi_2^*}{\partial n}.$$

Huomautus. Todettakoon, että magneettisen skalaaripotentialin jatkuvuusehto takaa magneettikentän energian äärellisenä pysymisen aivan kuten sähköstaattisessa tilanteessa sähköpotentialin on oltava jatkuva. Magneettikentän energiatiheys, yksikkönä J/m^3 , isotrooppisen aineen tapauksessa on

$$(5.98) \quad u_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \blacksquare$$

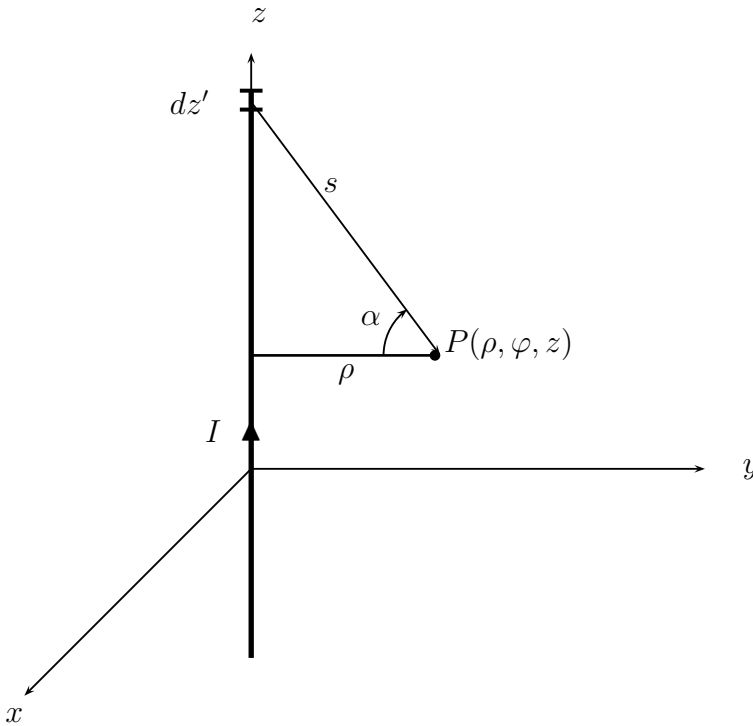
5.3 Magnetostaattisten probleemien ratkaiseminen

Olemme muodostaneet edellä tarvittavat teoreettiset työkalut kenttäprobleemien ratkaisemiseksi. Tarkastelemmekin seuraavassa magnetostaattisten kenttäprobleemien ratkaisemista kahdessa tilanteessa. Ensimmäisessä tilanteessa tunnetaan makroskooppiset kulkeutumisvirrat, jolloin magneettivuon tiheys voidaan laskea Biot-Savartin lain (5.23) avulla. Myös Ampèren kiertämälain (5.34) avulla voidaan ratkaista eräitä aksiaalisymmetrisiä problemeja. Erikoissovelluksena makroskooppisten virtojen aikaansaamasta kentästä esitetään geofysiikassa paljon käytetyn Helmholtzin kelasysteemin kentän laskenta.

Toinen tilanne on magnetoituvan ja magnetoituneen pallon probleemit, jotka palautuvat fysikaalisen reuna-arvotekävän ratkaisemiseen. Lopuksi tarkastellaan lyhyesti geomagneettista kenttää ja magneettisten anomalioiden laskennan yleisiä periaatteita.

5.3.1 Äärettömän pitkän suoran viivajohdinten kenttä

Tarkastellaan äärettömän pitkää suoraa viivajohdinta, jossa kulkee virta I . Sijoitetaan johdin sylinterikoordinaatiston z -akselille. Kenttäpisteen P etäisyys johtimesta on silloin sylinterikoordinaatiston muuttuja ρ kuvan 5.5 mukaisesti. Tällöin Biot-Savartin lain (5.22) mukaan voidaan magneettivuon



Kuva 5.5: Äärettömän pitkän viivavirtajohtimen magneettivuon tiheyden määrittäminen sylinterikoordinaatistossa. Johdin sijaitsee z -akselilla.

tiheydelle kirjoittaa

$$(5.99) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{e}_z \times \mathbf{s}}{s^3} dz',$$

missä on sovellettu askelia $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{s}$, $d\mathbf{l}' \rightarrow \mathbf{e}_z dz'$. Siirrytään seuraavaksi kulmamuuttujaan α , jolloin kuvan mukaan

$$dz' = \frac{s}{\cos \alpha} d\alpha$$

ja

$$s = \frac{\rho}{\cos \alpha}.$$

Näiden avulla magneettivuon tiheydelle saadaan edelleen, kun huomioidaan, että $\mathbf{e}_z \times \mathbf{s}/s = \cos \alpha \mathbf{e}_\varphi$,

$$(5.100) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \mathbf{e}_\varphi \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi.$$

Magneettivuon tiheyden suunta on siis sama kuin niiden ympyröiden tangentin suunta, joiden keskipisteenä on virtajohdin ja joiden taso on kohtisuorassa virtajohdinta vastaan. Sylinterikoordinaatistossa ilmaistuna tämä suunta on sama kuin yksikkövektorilla \mathbf{e}_φ , kun virran suunta on positiivisen z -akselin suuntaan.

Edellä käsitelty yksinkertainen kenttäprobleemi osoittaa, että magneetikenttien tarkastelussa kentän suunnan selvittäminen vektoriopin sääntöjen mukaan on tärkeää. Magnetostatiikassa virtojen aikaansaaman magneettikentän suuntaongelmat ovat aina monimutkaisempia kuin sähköstatiikassa varauksista aiheutuvan sähkökentän suuntakysymykset.

On huomattava, että äärettömän pitkä virtajohdin tarkoittaisi äärettömän suurta kentän energiaa, mikä on fysikaalisesti mahdotonta. Siksi äärettömän pitkä virtajohdin onkin vain matemaattinen olio.

Pitkän suoran viivajohtimen kenttä Ampèren kiertämälain avulla

Äärettömän pitkän virtajohtimen kenttä saadaan huomattavan paljon edellä esitettyä yksinkertaisemmin soveltamalla Ampèren kiertämälakia. Kentän suunta voidaan nimittäin päätellä oikeakätisen ruuvin kiertosäännön perusteella. Kun oikean käden peukalo asetetaan virran suuntaan, osoittavat muut sormet \mathbf{B} :n suuntaan. Lisäksi \mathbf{B} :n itseisarvo on vakio vakioetäisyydellä johdimesta eli ρ -säteisellä ympyräviivalla. Näin ollen Ampèren kiertämälain mukaan voidaan kirjoittaa, kun umpinaiseksi poluksi C valitaan johdinkeskinen ympyrä, joka on kohtisuorassa johdinta vastaan,

$$(5.101) \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Koska $|\mathbf{B}|$ on vakio B_φ , saadaan edelleen

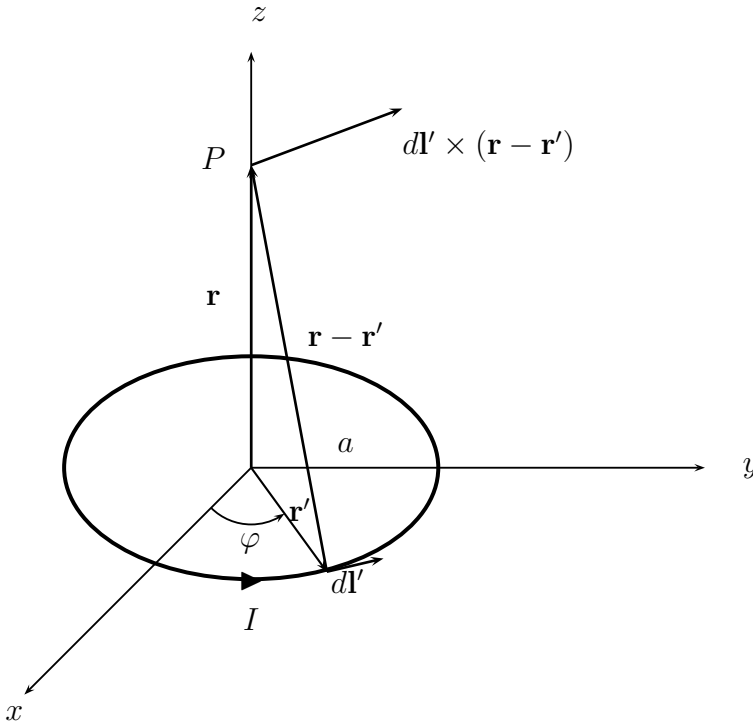
$$(5.102) \quad 2\pi \rho B_\varphi = \mu_0 I,$$

mistä saadaankin, kun käytetään vektorimerkintöjä,

$$(5.103) \quad \mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{e}_\varphi.$$

5.3.2 Ympyrävirtasilmukan kenttä

Toinen käytännönkin kannalta tärkeä kenttä on ympyränmuotoisen virtasilmukan kenttä. Tarkastelemme ympyrävirtasilmukan kenttää sen akselilla olevassa pisteessä, jossa ratkaisu löydetään suhteellisen helposti. Asetetaan sylinterikoordinaatisto kuvan (5.6) mukaisesti. Olkoon P laskentapiste silmukan akselilla etäisyydellä z silmukasta, $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$.



Kuva 5.6: Ympyrävirtasilmukan magneettikenttä akselipisteessä.

Tällöin saadaan kuvan 5.6 merkinnöin ($\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}'$ eli $x' = a \cos \varphi$ ja $y' = a \sin \varphi$),

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{l}' &= dx' \mathbf{e}_x + dy' \mathbf{e}_y = a d\varphi (-\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_y \cos \varphi) = a d\varphi \mathbf{e}_\varphi, \\
 \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= -x' \mathbf{e}_x - y' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = \\
 &= -a \mathbf{e}_x \cos \varphi - a \mathbf{e}_y \sin \varphi + z \mathbf{e}_z = -a \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z, \\
 d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ 0 & a d\varphi & 0 \\ -a & 0 & z \end{vmatrix} = za d\varphi \mathbf{e}_\rho + a^2 d\varphi \mathbf{e}_z, \\
 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{a^2 + z^2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.104}$$

Täten Biot-Savartin lain (5.22) mukaan

$$(5.105) \quad \mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_x z a \cos \varphi + \mathbf{e}_y z a \sin \varphi + \mathbf{e}_z a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi.$$

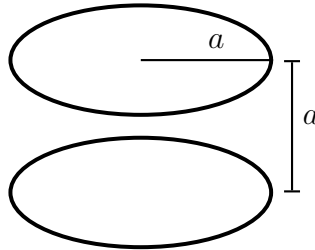
Integroimalla saadaan

$$(5.106) \quad \mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Kentän suunta on siis akselipisteessä akselin suunnassa. Edellä kirjoitettiin integrointia varten \mathbf{e}_ρ :n paikalle sen esitys karteesisessa koordinaatistossa eli $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi$, jotta selvästi nähdään, että integrointi \mathbf{e}_ρ :n suuntaisen komponentin osalta antaa nollan, kuten jo symmetriankin perusteella on pääteltävissä.

Helmholtzin kelat

Helmholtzin kelat (kuva 5.7) muodostuvat kahdesta identtisestä yhdensuuntaisesta ympyräkelasta, joilla on lisäksi yhteinen kelojen keskipisteiden kautta kulkeva akseli ja jotka ovat kelan säteen etäisyydellä toisistaan. Jos keloissa on N kierrosta johdinlankaa, on kelojen kokonaismagneettivuon tiheys laskettavissa kaavasta (5.106) kertomalla se N :llä, koska kukin kierros aiheuttaa kaavan (5.106) mukaisen magneettivuon tiheyden. Keloissa virta kulkee samaan suuntaan.



Kuva 5.7: Helmholtzin kelat.

Täten keloja yhdistävän akselin keskipisteessä magneettivuon tiheys on kaavan (5.106) mukaan

$$(5.107) \quad \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{N\mu_0 I}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + (a/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (a/2)^2)^{3/2}} \right] \mathbf{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Helmholtzin keloilla on tärkeä merkitys esimerkiksi kalibroitaessa magnetometreja. On osoitettavissa, että magneettivuon tiheyskenttä keloja yhdistävän akselin keskipisteen lähistöllä on varsin homogeeninen. Helmholtzin keloilla voidaan myös kompensoida Maan magneettikenttä asettamalla sen akseli kentän suuntaan ja syöttämällä keloihin sopivan suuruinen ja suuntainen tasavirta.

5.3.3 Magnetoituva (permeaabeli) pallo homogeenisessa magneettikentässä

Tarkastelemme tilannetta, jossa alun perin homogeeniseen magneettikenttään \mathbf{B}_0 tuodaan a -säteinen pallo, jonka magneettinen permeabiliteetti on μ . Pallo on permeabiliteetiltaan lineaarinen, isotrooppinen ja homogeeninen. Ympäröivän aineen permeabiliteetti on μ_0 . Tehtävänä on määrittää magneettivuon tiheyskenttä pallon ulko- ja sisäpuolella.

Tämä probleemi on mitä ilmeisimmin varsin analoginen vastaavan sähköisen dielektrisen pallon probleemin kanssa, joka on esitetty kohdassa 3.3.10.

Koska kyseisessä tilanteessa ei ole makroskooppista virtaa, magneettikentän voimakkuus \mathbf{H} on yhtälön (5.69) mukaisesti pyörteetön: $\nabla \times \mathbf{H} = 0$. Koska kyseessä on LIH-aine, sen konstitutiivinen yhtälö on $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Näin ollen myös magneettivuon tiheyskenttä on pyörteetön, jolloin se voidaan esittää skalaaripotentialin ϕ^* avulla

$$(5.108) \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = -\mu \nabla \phi^*,$$

missä $\mathbf{H} = -\nabla \phi^*$. Koska $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ aina, seuraa tästä, että skalaaripotentiali ϕ^* toteuttaa Laplacen yhtälön, $\nabla^2 \phi^* = 0$.

Sijoitamme pallokoordinaatiston origon pallon keskipisteeseen ja asetamme z -akselin suunnan yhtymään homogeenisen kentän \mathbf{B}_0 suuntaan. Merkitsemme pallon ulkopuolista aluetta indeksillä 1 ja pallon sisäpuolista aluetta indeksillä 2.

Pallon pinnalla ($r = a$) on oltava voimassa rajapintaehdot (5.96) ja (5.89)

$$(5.109) \quad \phi_1^* = \phi_2^*$$

ja

$$(5.110) \quad B_{1r} = B_{2r} \quad \Rightarrow \quad \mu_0 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial r} = \mu \frac{\partial \phi_2^*}{\partial r}.$$

Reunaehtona on, että kaukana pallosta magneettivuon tiheyden on lähestyttävä arvoa \mathbf{B}_0 .

Probleemin ratkaisu etenee tästä siten, että ratkaistaan Laplacen yhtälö pallokoordinaatistossa muuttujien separoinnilla, käytetään hyväksi rajapintaehtoja, kentän säännöllisyysvaatimusta origossa sekä kentän äärettömyyskäyttäytymistä. Asetelma on täten aivan sama kuin kohdassa 3.3.10.

Näin ollen probleemeissa saavutetaan täydellinen vastaavuus dielektrisen probleemin kanssa. Magneettikentän voimakkuudelle voidaan siten suoraan kirjoittaa yhtälöiden (3.155) ja (3.156) perusteella ratkaisut, kun niiden merkintöjä muutetaan siten, että

$$(5.111) \quad \begin{aligned} \epsilon_0 &\rightarrow \mu_0, \\ \epsilon &\rightarrow \mu, \\ \mathbf{E}_0 &\rightarrow \mathbf{H}_0, \end{aligned}$$

$$(5.112) \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} a^3 H_0 \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (r \geq a),$$

$$(5.113) \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0 \quad (r \leq a).$$

Koska olemme kiinnostuneita kuitenkin magneettivuon tiheydestä \mathbf{B} , käytämme hyväksi konstitutiivista yhtälöä $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1$ eli $\mathbf{H}_1 = (1/\mu_0) \mathbf{B}_1$ ja vastaavasti $\mathbf{H}_2 = (1/\mu) \mathbf{B}_2$ ja $\mathbf{H}_0 = (1/\mu_0) \mathbf{B}_0$, jolloin pallon ulkopuoliseksi kentäksi saadaan yhtälön (5.112) perusteella

$$(5.114) \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 - \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} a^3 \mathbf{B}_0 \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \quad (r \geq a)$$

ja pallon sisäpuoliseksi kentäksi saadaan yhtälön (5.113) perusteella

$$(5.115) \quad \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{B}_0 \quad (r \leq a).$$

Olemme saaneet siis probleemin ratkaisun puhtaasti dielektrisen pallon analogiaan tukeutuen. Tämä on esimerkki tilanteesta, jossa jonkin toisen probleemin olemassa olevaa ratkaisua voidaan käyttää sellaisenaan, vain merkintätapoja vaihtaen, jonkin toisen fysikaalisesti erilaisen probleemin ratkaisuun. Tämä perustuu tietenkin siihen, että probleemit ovat matemaattiselta rakenteeltaan identtiset eli samat.

Huomataan, että myös magnetostaattisessa tapauksessa magneettivuon tiheyskentän itseisarvo pallon sisällä on pienempi kuin alkuperäisen homogeneisen kentän itseisarvo. Pallon sisälle muodostuukin alkuperäisen kentän

suunnan suhteen vastakkaisuuntainen kenttä. Tämä kenttä on ns. *demagneetoiva* kenttä.

Ulkoisen kentän synnyttämäksi pallon magnetoitumaksi \mathbf{M} saadaan edelleen yhtälön (5.68) mukaan

$$(5.116) \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_2 - \mathbf{H}_2 = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{H}_0 = \frac{3}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mathbf{B}_0.$$

Demagnetointikerroin (tai oikeammin demagnetoitumakerroin) L_m määritellään yhtälön (3.159) kanssa analogisella yhtälöllä

$$(5.117) \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 - L_m \mathbf{M}.$$

Sijoittamalla tähän (5.113) ja (5.116) saadaan pallon demagnetointikertoimeksi

$$(5.118) \quad L_m = \frac{1}{3}.$$

Näin ollen magneettikentän voimakkuus pallon sisällä on

$$(5.119) \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{M}.$$

Edellä saatu ratkaisu on tarkka. Siinä ei ole tehty mitään approksimaatioita. Vastaisen varalle kiinnitettäköön lukijan huomiota siihen, että jos magnetoituman ajatellaan muodostuvan yksinkertaisesti ulkoisen kentän voimakkuuden \mathbf{H}_0 tai ulkoisen magneettivuon tiheyden \mathbf{B}_0 vaikutuksesta,

$$(5.120) \quad \mathbf{M} \cong \chi_m \mathbf{H}_0 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H}_0 = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0^2} \mathbf{B}_0,$$

toisin sanoen jättämällä demagnetoituminen huomioon ottamatta, päädytään approksimatiiviseen tulokseen, joka on sitä lähempänä oikeaa tulosta, mitä lähempänä μ/μ_0 on ykköstä.

5.3.4 Homogeenisesti magnetoituneen pallon magneettikenttä

Tarkastelemme seuraavaksi magnetoituneen aineen magneettikentän määrittämistä pallon tapauksessa. Kysymyksessä on siis alun perin jo magnetoitunut pallo ja mielenkiintomme kohdistuu magnetoituman synnyttämän magneettikentän laskemiseen. Olkoon pallokoordinaatiston origo a -säteisen pallon keskipisteessä. Olkoon pallon tunnettu homogeeninen magnetoituma \mathbf{M} .

Pallo sijaitsee muutoin magneettikentättömässä tyhjiötä vastaavassa avaruudessa, jonka permeabiliteetti on μ_0 . Asetetaan pallo siten, että z -akseli eli pallokoordinaatiston polaariakseli yhtyy magnetoituman suuntaan.

Kohdassa 5.2.1 sivulla 188 käsiteltiin magnetoituneen aineen kenttä skaalaripotentialin avulla. Todettiin, että magnetoituneen aineen probleemi on analoginen vastaavan polarisoituneen aineen probleemien kanssa.

Homogeenisen magnetoituman tapauksessa, jollainen on nyt tarkasteltavana, ei synny magneettisia tilavuusvarauksia eli magneettinen napatiheys ρ_M on yhtälön (5.72) mukaan nolla. Pallon pinnalle asettuu magneettinen pintavarausjakauma eli magneettisen napavoimakkuuden pintatiheys, joka on yhtälön (5.73) mukaan

$$(5.121) \quad \sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_r = M \cos \theta,$$

missä θ on pallokoordinaatiston polaarikulma. Näin ollen magneettinen skaalaripotentiali on yhtälön (5.71) mukaan

$$(5.122) \quad \phi^* = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS',$$

missä S on pallon pinta. Integrointi tulee siis tehdä pallon pinnan yli. Tämä ei kuitenkaan ole aivan yksinkertainen tehtävä. Integrointia varten lauseke $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ kannattaa kehittää ns. palloharmoniseksi sarjaksi. Emme kuitenkaan lähde etenemään tätä tietä, sillä probleemi voidaan ratkaista myös Laplaceen yhtälön avulla fysikaalisena reuna-arvotehtävänä. Merkitään pallon ulkopuolista avaruutta alaindeksillä 1 ja pallon sisäpuolta indeksillä 2.

Probleemi on symmetrinen atsimuuttikulman φ suhteen. Laplaceen yhtälön yleinen ratkaisu saadaan muuttujien separoinnilla. Tämä on tehty jo aiemmin sähköstatiikan puolella kohdassa 3.3.10, jossa päädyttiin yhtälöihin (3.147) eli

$$(5.123) \quad \phi_1^*(r, \theta) = A_1 r \cos \theta + C_1 r^{-2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

ja (3.148) eli

$$(5.124) \quad \phi_2^*(r, \theta) = A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \quad (r \leq a).$$

Tehtävä on nyt määrittää kertoimet A_1 , C_1 , A_2 ja C_2 siten, että ratkaisu on kaikkialla säännöllinen ja että reunaehdot ja rajapintaehdot toteutuvat. Koska potentiaalin on hävittävä äärettömyydessä eli ns. äärettömyysreunaehdon on oltava voimassa, valitaan kerroin $A_1 = 0$. Lisäksi säännöllisyysvaatimus pallon sisäpuolella saadaan toteutumaan, kun valitaan $C_2 = 0$. Jäljelle

jää kaksi tuntematonta kerrointa C_1 ja A_2 , jotka voidaan määrittää kahden pallon pinnalla $r = a$ voimassa olevan rajapintaehdon avulla. Rajapintaehdot ovat potentiaalin jatkuvuus

$$(5.125) \quad \phi_1^* = \phi_2^*$$

ja magneettivuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuus. Kun käytetään hyväksi \mathbf{H} :n määrittely-yhtälöstä (5.68) saatavaa yhtälöä

$$(5.126) \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(-\nabla\phi^* + \mathbf{M}),$$

voidaan magneettivuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuus esittää muodossa

$$(5.127) \quad -\mu_0 \frac{\partial\phi_1^*}{\partial r} = \mu_0 \left(-\frac{\partial\phi_2^*}{\partial r} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_r \right).$$

eli

$$(5.128) \quad \frac{\partial\phi_1^*}{\partial r} = \frac{\partial\phi_2^*}{\partial r} - M \cos \theta.$$

Näin ollen saadaan yhtälöryhmä

$$(5.129) \quad \begin{aligned} C_1 a^{-3} - A_2 &= 0 \\ 2C_1 a^{-3} + A_2 - M &= 0, \end{aligned}$$

jonka ratkaisu on

$$(5.130) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{3} M a^3 \\ A_2 &= \frac{1}{3} M. \end{aligned}$$

Pallon ulkopuoliseksi potentiaaliksi (5.123) saadaan siten

$$(5.131) \quad \phi_1^*(r, \theta) = \frac{1}{3} M \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

ja vastaavasti pallon sisäpuolella

$$(5.132) \quad \phi_2^*(r, \theta) = \frac{1}{3} M r \cos \theta.$$

Magneettikentän voimakkuudeksi saadaan edelleen ($\mathbf{H} = -\nabla\phi^*$) pallon ulkopuolella

$$(5.133) \quad \mathbf{H}_1(r, \theta) = \frac{1}{3} M \frac{a^3}{r^3} [2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta]$$

ja pallon sisäpuolella

$$(5.134) \quad \mathbf{H}_2(r, \theta) = -\frac{1}{3}\mathbf{M}.$$

Huomataan, että pallon ulkopuolinen potentiaali (5.131) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(5.135) \quad \phi_1^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

missä \mathbf{m} on magneettinen dipolimomentti voimakkuudeltaan

$$(5.136) \quad \mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{M}.$$

Magneetikentän voimakkuus (5.133) voidaan kirjoittaa magneettisen dipolin avulla muotoon

$$(5.137) \quad \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right).$$

Magneettivuon tiheys pallon ulkopuolella on vastaavasti

$$(5.138) \quad \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \right).$$

Toisin sanoen homogeenisesti magnetoituneen pallon potentiaali, magneetikentän voimakkuus ja magneettivuon tiheys ovat pallon ulkopuolella samat kuin pallon keskipisteessä eli origossa sijaitsevan pistemäisen magneettisen dipolin, jonka momentti on yhtälön (5.136) mukainen.

Edelleen huomaamme, että pallon sisällä magneetikentän voimakkuus on vakio ja suunnaltaan vastakkainen magnetoituman suunnalle ja myös magneettivuon tiheydelle, sillä

$$(5.139) \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0 (\mathbf{H}_2 + \mathbf{M}) = \mu_0 \left(-\frac{1}{3}\mathbf{M} + \mathbf{M} \right) = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M}.$$

Pallon sisällä on siis myös tässä tapauksessa demagnetoiva kenttä \mathbf{H}_2 .

Tulkoon vielä lopuksi mainituksi, että periaatteessa kolmas tapa ratkaista magnetoituneen aineen probleemi on käyttää vektoripotentialia. Homogeenisesti magnetoituneen pallon tapauksessa tilavuusmagnetoitumisvirta on nolla yhtälön (5.62) mukaan ja pallon pinnalla on pintamagnetoitumisvirta \mathbf{K}_M yhtälön (5.63) mukaisesti

$$(5.140) \quad \mathbf{K}_M = \mathbf{M} \times \mathbf{n} = M\mathbf{k} \times \mathbf{e}_r = M\mathbf{e}_\theta.$$

Vektoripotentiaalin yhtälö on tällöin yhtälön (5.61) mukaan

$$(5.141) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS',$$

missä S on pallon pinta.

Kuten huomataan, vektoripotentiaalin käyttö ei tuo mitään helpotusta probleemin ratkaisemiseksi ja on siten hyödytön, koska kyseessä on vektorikenttä, jonka määrittäminen integroimalla on ainakin kolme kertaa työläämpää (kolme komponenttia!) kuin skalaaripotentiaalin määrittäminen. Lisäksi siitä pitäisi ottaa vielä roottori, jotta päästään magneettivuon tiheyteen.

5.3.5 Magneettisten anomalioiden laskenta

Magnetostatiikan yksi tärkeä sovellusalue geofysiikassa on magneettisten anomalioiden laskenta. Edellä ratkaistut palloprobleemit ovat jo esimerkkejä vastaavista anomalian laskentatehtävistä. Magneettiset anomaliat syntyvät Maan nykyisen magneettikentän vuorovaikutuksesta magneetoituvan eli permeabelin geologisen aineen kanssa. Lisäksi geologisella aineella tai muodostumalla voi olla sen aiemmin kokemien magneetoitumisten seurauksena jokin pysyvä eli remanenttimagneetoituma, \mathbf{M}_r . Yhdessä nämä synnyttävät Maan magneettikentän $\mu_0\mathbf{H}_0$ kanssa magneettisen anomalian. Toisin sanoen kokonaiskenttä voidaan ilmaista muodossa

$$(5.142) \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_{tot}),$$

missä LIH-väliaineelle

$$\mathbf{M}_{tot} = \chi_m \mathbf{H} + \mathbf{M}_r.$$

Useimmiten oletetaan, että remanenttimagneetoituma on vakio ja että siihen ei vaikuta Maan nykyinen magneettikenttä. Todettakoon, että magneettisten anomalioiden tarkasteluissa aineen magneettisena ominaisuutena käytetään useimmiten aineen susceptibiliteettia eikä permeabiliteettia. Susceptibiliteetin arvot ovat laaduttomia. Kuitenkin SI-yksikköjärjestelmässä halutaan selvyuden parantamiseksi susceptibiliteettiarvoja ilmaistaessa kirjoittaa susceptibiliteettiarvon perään kirjaimet SI.

Geomagneettinen kenttä

Maan magneettikenttä eli geomagneettinen kenttä aiheutuu useista tekijöistä. Sen pääosa eli pääkenttä syntyy suurimmaksi osaksi maapallon ytimen sähkövirroista, jotka aikaansaavat dipolarisen kentän, ns. keskeisdipolin kentän. Lisäksi on joitakin pienempiä virtakeskittymiä, jotka sijaitsevat yli 2900

km:n syvyydessä. Yhdessä nämä muodostavat n. 99,9 % havaitusta Maan magneettikentästä.

Sisäsyntyisten tekijöiden lisäksi osa kentästä aiheutuu ulkoisista tekijöistä, kuten Auringon ja Kuun vuorovaikutuksesta ionosfääriin kanssa sekä reontulista. Ulkoisen kentän osuus on n. 0,1 % geomagneettisesta kokonaiskentästä.

Maan kuorikerros aiheuttaa varsinaiset poikkeamat eli anomaliat pääkenttään. Kuorikerroksen pysyvä magnetoituma, mikä aiheutuu pääasiassa ferrimagneettisista mineraaleista, aikaansaa n. 0,01 % geomagneettisesta kentästä. Anomaliaita esiintyy eri mittakaavoissa. Ns. alueelliset anomaliat eli regionaalianomaliat ovat peräisin kuoren alaosista. Niiden karakteristinen mitta on jopa tuhansia kilometrejä. Kuten jo aiemmin konstitutiivisten yhtälöiden tarkastelun yhteydessä sivulla 193 on todettu, Maan kuorikerroksen osuus magneettikenttään rajoittuu vain n. 25–40 km:n paksuiseen pintaosaan, koska syvemmällä ferromagneettisten aineiden magnetoituma häviää Curie-lämpötilan tultua ylitetyksi. Alueellisten anomalioiden lisäksi kentässä on paljon eri laajuisia paikallisia anomaliaita, jotka ovat sovelletun geofysiikan mielenkiinnon kohteena.

Maan magneettikenttä muuttuu myös ajan funktiona ja siinä on eri jaksoisia komponentteja. Geologisessa aikaskaalassa muutokset ovat hyvinkin nopeita, sillä kentän suunta voi kääntyä useita kertoja 1 Ma:n aikana.

Kuten edellä jo todettiin, pääkentän keskeisdipoli approksimoi Maan magneettikenttää globaaliskaalassa jo varsin hyvin. On arvioitu, että n. 80 % kentästä voidaan selittää yhdellä keskeisdipolilla. Dipolin kenttä on voimakkain navoilla ja pienin magneettisella päiväntasaajalla napojen puolivälissä, kuten magneettisen dipolin lausekkeestakin voidaan jo päätellä.

Geomagnetismissä on tavallista ilmaista magneettivuon tiheyskenttä notesloissa, $nT = 10^{-9}$ T. Totaalikentän arvo päiväntasaajalla on n. 25.000 nT ja navoilla n. 70.000 nT. Suomessa totaalikenttä vaihtelee välillä 50.200–52.600 nT. Totaalikenttä on Suomessa hyvin pysty. Siksi totaalikenttäänomaliat ja vertikaalikomponenttianomaliat eivät poikkea toisistaan kovin paljon. Totaalikentän suunnan ja sen vaakakomponentin välistä kulmaa kutsutaan inkliinaatioksi. Deklinaatio kuvaa totaalikentän vaakakomponentin ja maantieteellisen pohjoisnavan välistä kulmaa.

Geomagneettinen kenttä on magnetoivana kenttänä itse asiassa varsin heikko. Koska pääkenttä on laaja-alainen, paikallisia anomaliaita laskettaessa oletetaan useimmiten, että magnetoiva primaarikenttä on homogeeninen. Magnetoitavaksi primaarikentän arvoksi voidaan valita esimerkiksi kansainvälisesti hyväksytyyn normaalikentän, ns. IGRF-kentän arvo. IGRF-lyhenne tulee sanoista *International Geomagnetic Reference Field*. IGRF-kenttä päivitetään viiden vuoden välein, koska geomagneettinen kenttä muuttuu ajan

funktiona. IGRF-kenttä perustuu Maan magneettikentän palloharmoniseen kehitelmään, jonka kertoimet määritetään sovittamalla siihen havaittuja kentän arvoja.

Magneettisten anomalioiden laskennassa tehtävät oletukset

Magneettisten anomalioiden laskemiseksi tehdään usein eräitä yksinkertaisia oletuksia geomagneettisen kentän luonteesta ja geologisten materiaalien magneettisista ominaisuuksista.

Yksi varsin yleinen oletus on se, että magnetoitunut geologinen muodostuma eli kappale sijaitsee tyhjiötä vastaavassa väliaineessa. Toisin sanoen kappaletta ei tarvitse upottaa magneettiseen puoliavaruuteen eli ottaa huomioon maankamaran ja ilman välinen rajapinta. Magneettisella puoliavaruudella ei ole samanlaista merkitystä geofysiikan kannalta kuin johtavalla puoliavaruudella sähköisessä virtausstatiikassa galvaanisten anomalioiden laskennassa. Magneettisen puoliavaruuden eli maankamaran ja ilman rajapinnan huomiotta jättämistä voidaan perustella myös sillä, että viimeistään Curie-lämpötilaa vastaavassa syvyydessä on toinen rajapinta, joka vastaa maan ja ei-magnetoituneen aineen eli tyhjiön rajapintaa. Koska primaarimagneettikenttä ulottuu lähes muuttumattomana Curie-lämpötilaa vastaavalle syvyydelle asti, tulisi tarkassa mallinnuksessa ottaa myös tämä rajapinta huomioon.

Voimakkaasti epälineaarisia väliaineita lukuunottamatta magnetoituma on suoraan verrannollinen magneettikentän voimakkuuteen, verrannollisuuskertoimena on aineen susceptibiliteetti. Alhaisen susceptibiliteetin omaavan aineen tapauksessa voidaan olettaa, että demagnetointiefekti on vähäinen ja magnetoitumalle pätee siten

$$(5.143) \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_0,$$

missä \mathbf{H}_0 tarkoittaa nyt geomagneettisen kentän primaarimagneettikentän voimakkuutta. Tämä oletus on sikäli merkittävä, että sen ansiosta magneettisten anomalioiden laskenta palautuu integrointitehtäväksi tunnetun magnetoituman yli yhtälön (5.71) mukaisesti

$$(5.144) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Anomaliaa vastaava magneettivuon tiheys saadaan edelleen lasketuksi kaavasta

$$(5.145) \quad \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi^*,$$

johon voidaan lisätä vielä primaarikenttä $\mu_0 \mathbf{H}_0$ yhtälön (5.142) mukaisesti. On huomattava, että jos kappaleella on lisäksi remanenttimagnetoituma \mathbf{M}_r , voidaan sen osuus laskea vektoriaalisesti edellä olevaan magnetoitumaan, toisin sanoen yhtälön (5.144) \mathbf{M} :n paikalle sijoitetaan $\mathbf{M}_{tot} = \chi_m \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_r$. Remanenttimagnetoituma oletetaan yleensä homogeeniseksi. Jos maan nykykentän aikaansaama magnetoituma $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_0$ on myös homogeeninen, mikä tarkoittaa, että susceptibiliteetti on vakio, yhtälön (5.144) tilavuusintegraali on nolla ja jäljelle jää pintaintegrointi. Useiden tavallisimpien kappaleiden magneettikenttien anomaliat saadaan näin kaavamuodossa lasketuksi ilman, että ratkaistaan fysikaalinen reuna-arvotettava. Tällä on ollut huomattava merkitys anomalioiden mallitulkinnan kehittämisessä.

Demagnetointikerroin riippuu kappaleen muodosta. Yleisesti se on tensori, jolloin sillä on suuntariippuvuus. Voidaan osoittaa, että demagnetoituminen on homogeenista vain toisen asteen pinnan omaaville kappaleille. Muutoin demagnetoituminen on epähomogeenista. Usein käytetään magnetoituman \mathbf{M} laskemisessa demagnetointikertoimen määrittelevästä yhtälöstä (5.117) saatavaa tehollista susceptibiliteettia

$$(5.146) \quad \chi_{m,\text{eff}} = \frac{\chi_m}{1 + L_m \chi_m},$$

missä L_m on demagnetointikerroin, todellisen susceptibiliteetin χ_m sijaan. Tehollisen susceptibiliteetin lauseke (5.146) saadaan yhtälöstä (5.117), kun siihen merkitään $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_2$ ja ratkaisemalla \mathbf{H}_2 :n suhteen. Kun tämä kerrotaan todellisella susceptibiliteetillä χ_m , saadaan magnetoitumaksi

$$(5.147) \quad \mathbf{M} = \frac{\chi_m}{1 + L_m \chi_m} \mathbf{H}_0,$$

josta tehollinen susceptibiliteetti (5.146) voidaan päätellä. Tehollista susceptibiliteettia voidaan käyttää, jos tunnetaan kappaleen demagnetointikerroin. Demagnetoitumalla on käytännön merkitystä tosin vain korkean susceptibiliteetin tapauksessa. Tämä nähdään vertaamalla yhtälöitä (5.143) ja (5.147) keskenään. Useiden geologisten materiaalien susceptibiliteetin arvot ovat pienempiä kuin 0,01 SI. Tällöin esimerkiksi pallon tapauksessa ($L_m = 1/3$) yhtälöiden (5.143) ja (5.147) avulla saatava ero magnetoituman arvoon on mitätön. Suuremmilla susceptibiliteetin arvoilla demagnetoituma alkaa vaikuttaa. Demagnetointikertoimen avulla laskettua magnetoitumaa (5.147) voidaan käyttää, kun susceptibiliteetti on $0,01 < \chi_m < 1$ SI. Toisaalta kovin korkeilla susceptibiliteetin arvoilla joudutaan epälineaarisiin ilmiöihin, jolloin yhtälö (5.143) ei muutoinkaan ole enää voimassa.

Edelleen on huomattava, että alhaisen susceptibiliteetin tapauksessa useiden vierekkäisten kappaleiden anomaliat lasketaan ottamatta huomioon kap-

paleiden välistä vuorovaikutusta. Toisin sanoen kunkin kappaleen kenttä lasketaan erikseen ikään kuin muita kappaleita ei olisi. On huomattava, että tarkasti ottaen tässä tilanteessa superpositioperiaate ei ole voimassa, koska kappaleilla on keskinäinen vuorovaikutus, jonka seurauksena magneettisten varausten jakaumat kappaleiden pinnoilla muuttuvat, ja siten niillä on vaikutusta magneettikenttään. Kappaleiden keskinäinen vuorovaikutus on sitä suurempi, mitä korkeampi niiden susceptibiliteetti on.

Magneettisten anomalioiden kvalitatiivisen tulkinnan kannalta on hyödyllistä ajatella kappaleen pinnalle magneettinen pintavarausjakauma. Kohtaan, jossa primaarikenttä menee kappaleeseen, syntyy negatiivinen jakauma ja kohtaan, jossa kenttä tulee ulos kappaleesta, syntyy positiivinen jakauma, kun kappaleen ulkonormaalin suunta on positiivinen suunta. Kenttä suuntautuu positiivisesta varauksesta pois päin kohti negatiivista varausta. Geomagnetismissa on sovittu, että alaspäin osoittavaa kentän vertikaalikomponenttia pidetään positiivisena, kuten pohjoisella pallonpuoliskolla on yleensä tilanne, ja ylöspäin osoittavaa negatiivisena, kuten eteläisellä pallonpuoliskolla on yleensä tilanne. Tästä seuraa, että varausten synnyttämien kenttien etumerkit tuleekin mieltää toisin päin. Joka tapauksessa tällä tavoin esimerkiksi kaateellisen kappaleen anomalian muotoa voidaan jo päätellä, kun tunnetaan geomagneettisen primaarikentän suunta.

Magneettisten anomalioiden muotoon vaikuttaa ratkaisevasti siis primaarikentän suunta. Tämä tarkoittaa, että maapallon eri osissa samallekin kappaleelle saadaan täysin erilaisia magneettisia anomaliaita. Magneettisten mitausten kvalitatiivisessakin tulkinnassa on siten syytä ymmärtää magneettisten anomalioiden syntymekanismit. Emme kuitenkaan tarkastele lähemmin magneettisten anomalioiden tulkintaa ja mallintamista.

5.3.6 Loppuhuomautus magnetostatiikasta

Magnetostatiikan kokeellinen perusta on tiivistettävissä nykytieteen merkinnöin kahden virtapiirin välistä voimaa kuvaavaan Ampèren lakiin (5.19). Tämä laki tuo esiin sen, että magneettinen vuorovaikutus syntyy sähkövirroista. Magnetoituneen aineen osalta voitaisiin vaihtoehtoisesti käyttää suoraan magneettisia varauksia (q_1^* ja q_2^* , yksikkönä Am) ja formuloida niiden välillä vaikuttavalle voimalle sähköistä Coulombin lakia (3.5) täysin vastaava magneettinen Coulombin laki

$$(5.148) \quad \mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1^* q_2^*}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^0.$$

Tämä laki johtaa virtoihin pohjautuvan voimalain kanssa matemaattisesti täysin ekvivalenttiin formalismiin. Koska kuitenkin magneettisia varauksia

fysikaalisina olioina ei ole olemassa samassa mielessä kuin sähkövarauksia, ei magneettista Coulombin lakia pidetä fysikaalisesti korrektina. (Todettakoon, että itse asiassa kirjoittaessamme virtausstatiikan puolella $\nabla \cdot \mathbf{J} = i$ syyllistytimme epäfysikaaliseen merkintään, koska virrantiheyskentän lähteet ovat todellisuudessa virtadipoleja eikä yksittäisiä tilavuusvirtalähteitä i , kuten merkintätapamme väittää. Tämä merkintätapa ei kuitenkaan synnytä yhtä poleemista väittelyä kuin yhtälö (5.148)).

Toisen tärkeän kokeellisen perustan luo magneettikentässä olevaan virtajakaumaan kohdistuva voima, joka saadaan yleisemmästä sähkömagneettisesta kentässä liikkuvaan varaukseen kohdistuvasta voimalaista, ns. Lorentzin voimasta (5.1). Biotin ja Savartin laki (5.23) voidaan sen jälkeen formuloida Lorentzin magneettisen voiman ja Ampèren voimalain pohjalta.

Itse asiassa kaikki, mitä näiden lakien jälkeen seuraa, on matematiikan soveltamista alkaen kenttien differentiaaliyhtälöiden formuloinnista. Kuten olemme useissa kohdin nähneet, vektorianalyysi yhdistettynä dyadialgebraan tarjoaa voimallisen työkalun magnetostaattisten tehtävien formuloinniseksi ja ratkaisemiseksi. Jos kaikki tarkastelut olisi tehty komponenttimuodossa, esityksestämme olisi tullut pitkä eikä kovin havainnollinen.

On vielä huomattava, että otimme käyttöön magneettikentän voimakkuudeksi kutsutun vektorikentän \mathbf{H} määrittelemällä sen kahden muun kentän, \mathbf{B} ja \mathbf{M} , avulla yhtälöllä (5.68). Magneettikentän voimakkuudella on magnetostatiikassa analoginen asema sähköstatiikassa esitetyn sähkövuon tiheyden \mathbf{D} kanssa. Molemmat ovat siis määritelmän kautta muodostettavia kenttiä.

Aineen magnetoituminen \mathbf{M} mielletään makroskooppisessa kenttäteoriasa atomaarisista magneettisista dipoleista aiheutuvaksi. Tämä fenomenologinen malli on osoittautunut yleisesti toimivaksi. Varsinaista kokeellista aspektia ei tähän vielä liity. Vasta konstitutiivisten yhtälöiden avulla siirretään tarkka tieto aineesta kenttäyhtälöihin. Tämän jälkeen onkin sitten koko magneettikenttien 'laskentakoneisto' valmis.

Geofysiikassa magnetostaattiselle kenttäteorialle on suora sovellus magneettisten anomalioiden laskennassa. Geofysiikassa magnetostatiikkaa käytetään myös yhdistettynä virtausstatiikkaan, kun lasketaan magnetometrisiä vastusanomaliaita.

Myös kovalähdeperiaatetta voidaan soveltaa magnetostaattisten rajapintaprobleemojen ratkaisuun. Kovalähteinä voivat olla magneettiset varaukset tai virrat. Koska magneettinen puoliavaruus ei geofysiikassa ole keskeinen rakenne, emme esittele siihen liittyviä magnetostaattisia problemeja tarkemmin. Todettakoon, että analogia sähköiselle puolelle on ilmeinen.

Äärettömän hyvälle eli täydelliselle magneettiselle johteelle pätee $\mu = \infty$. Tämä vastaa sähköstatiikassa tilannetta, jossa $\epsilon = 0$. Täydelliselle magneettiselle eristeelle pätee $\mu = 0$, mikä vastaa sähköstatiikassa tilannetta $\epsilon = \infty$.

Virtausstatiikassa tämä vastaa edelleen tilannetta, jossa sähkönjohtavuus $g = \infty$. Näin huomaamme, että sähköstatiikan, sähköisen virtausstatiikan ja magnetostatiikan välillä vallitsee voimakas analogia. Huomattakoon, että usein termiä 'täydellinen magneettinen johde' eli 'Perfect Magnetic Conductor, PMC' käytetäänkin tarkoittaessa täydellistä sähkön eristettä $g = 0$. Tätä termiä hän käytimme jo sähköisen virtausstatiikan puolella, silloin tosin tarkemmin perustelematta.

Luku 6

Sähködynamiikka

Tähänastiset tarkastelut ovat muutamaa poikkeusta lukuunottamatta koskeneet staattisia tai stationaarisia varaus- ja virtajakautumia. Sähköstatiikka perustuu Coulombin lakiin ja magnetostatiikka Ampèren voimalakiin. Virtausstatiikan perusyhtälönä on puolestaan varauksen säilymislaki eli jatkuvuusyhtälö. Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan kenttien ja niiden lähteiden muuttumista ajan funktiona ja siitä seuraavia ilmiöitä eli sähködynamiikkaa. Tällöin uutena statiikassa esiintymättömänä ilmiönä tulee mukaan *sähkömagneettinen induktio* ja sen käänteisilmiö, jota voidaan kutsua magnetosähköiseksi induktioksi. Nämä ilmiöt kytkevät toisiinsa sähkökentän ja magneettikentän. Ajasta riippuvassa tilanteessa on koko ajan sekä sähköinen että magneettinen vuorovaikutus. Näiden ilmiöiden luonnehdinnan jälkeen voidaan sitten esittää sähkömagnetismin yhtenäinen kenttäteoria, ns. Maxwellin¹ yhtälöt, joiden avulla kaikki makroskooppiset sähkömagneettiset ilmiöt, sekä staattiset että dynaamiset, ovat selitettävissä sekä matemaattisesti kuvattavissa ja laskettavissa.

Sähködynamiikan edellyttämä matematiikka on paljolti samaa kuin jo staattistenkin kenttien tapauksessa. Kompleksilukujen käyttöönotto osoittautuu tehokkaaksi keinoksi ns. harmonisen aikariippuvuuden käsittelyssä. Sähködynamiikan kenttäprobleemit ovat kuitenkin matemaattisesti ja laskennallisesti huomattavasti työläämpiä ja hankalampia kuin staattiset, ja siksi niiden ratkaiseminen joudutaankin useimmiten tekemään approksimatiivisesti. Sen takia tässä perusteita korostavassa esityksessä ei esitetä kovin monia ongelmaratkaisuja, vaan pyritään esittämään ja perustelemaan ne yhtälöt, joihin ratkaisut pohjautuvat.

¹James Clerk Maxwell (1831–1879), skotlantilainen fyysikko ja matemaatikko.

6.1 Sähkömagneettinen induktio

Määrittelemme ensin magneettivuon Φ magneettivuon tiheyden pintaintegraalina yhtälön (2.73) mukaisesti

$$(6.1) \quad \Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Magneettivuon yksikkönä on weber, (Wb)².

Faradayn³ ja muiden tekemien laajojen kokeiden pohjalta havaittiin, että magneettikentässä olevaan silmukkaan indusoituu sähkömotorinen voima eli lähdejännite, kun silmukan läpi menevä magneettivuo muuttuu. Vuon muuttuminen voi tapahtua useista syistä. Esimerkiksi silmukan pinta-ala voi muuttua tai magneettivuon tiheyskenttä voi ajan suhteen muuttua silmukassa. Riippumatta siitä, miten vuon muuttuminen tapahtuu, sähkömotorisen voiman suuruus on

$$(6.2) \quad U = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Tämä on siis kokeellinen havainto ja se tunnetaan *Faradayn sähkömagneettisena induktiolakina*.

Umpinaisen piirin C sähkömotorinen voima määritellään sähkökentän \mathbf{E} avulla (vrt. yhtälö (3.25))

$$(6.3) \quad U = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Näin ollen yhtälö (6.2) voidaan esittää yhtälöiden (6.3) ja (6.1) avulla muodossa

$$(6.4) \quad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Jos oletamme, että umpinainen piiri on jäykkä eli että se ei muutu ajan funktiona, voidaan aikaderivaatta siirtää integraalimerkin alle ja muuttaa se samalla osittaisderivoinniksi ajan suhteen, koska \mathbf{B} -kenttä voi olla nyt sekä paikan että ajan funktio. Edelleen sähkökentän viivaintegraaliin umpinaisen piirin ympäri voidaan käyttää Stokesin lausetta (2.102). Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(6.5) \quad \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

²Wilhelm Eduard Weber (1804–1891), saks. fyysikko.

³Michael Faraday (1791–1867), engl. kemisti ja fyysikko.

Jotta tämä on voimassa kaikille ajan suhteen muuttumattomille kiinteille pinnoille S , täytyy olla

$$(6.6) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.}$$

Tämä on *Faradayn induktiolain* differentiaalimuoto. Se on siis sähköstatiikan yhtälön $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ laajennus sähködynamiikkaan.

Miinus-merkki Faradayn laissa selittyy ns. *Lenzin*⁴ lailla, joka sanoo, että induktiopiiriin indusoituvan jännitteen (virran) suunta on sellainen, että se pyrkii vastustamaan syytä eli vuon muutosta, joka sen aiheuttaa.

Saamamme tulos (6.6) on osoittautunut paikkansa pitäväksi kaikissa vuon muutoksissa. Se on yksi Maxwellin sähkömagneettisen kenttäteorian keskeisistä yhtälöistä, joten laitamme sen laatikon sisälle.

Erityisesti on huomattava, että vaikka induktiolain kokeellisessa tarkastelussa käytetään johdinsilmukkaa tms., induktioliö esiintyy myös tyhjiössä sekä aineessa. Sähkömagneettisen induktion vaikutuksesta johtavaan aineeseen syntyy kiertäviä induktiovirtoja, joita kutsutaan *pyörrevirroiksi*. Pyörrevirtoja syntyy aina sellaisiin kohtiin, joissa magneettikenttä muuttuu. Pyörrevirtojen suunta noudattaa Lenzin lakia. Geofysiikan sähkömagneettiset induktiiviset menetelmät perustuvat juuri pyörrevirtojen synnyttämiseen maankamaraan. Pyörrevirrat synnyttävät puolestaan ns. sekundaarisen magneettikentän, jonka avulla voidaan saada tietoa johtavan maankamaraan sähköjohtavuusrakenteesta.

Myös Maan magneettikentän eritaajuiset ajalliset muutokset synnyttävät pyörrevirtoja maankamaraan.

6.2 Maxwellin yhtälöt

Tähänastinen sähkömagneettinen kenttäteoriamme ei ole vielä aivan täydellinen. Faradayn lain mukaan aina, kun magneettivuon tiheys muuttuu, se synnyttää sähkökentän pyörteen. Nyt voidaan esittää kysymys toisin päin eli mitä tapahtuu, jos sähkökenttä muuttuu. Syntyykö tällöin magneettikentän pyörre eli tapahtuuko *magnetosähköinen induktio*? Tämä kysymys on ollut sähkömagneettisen teorian kehittymisen kannalta yksi merkittävimmistä ja sen ratkaiseminen aluksi puhtaasti teoreettisena kysymyksenä oli merkitsevä mm. valon sähkömagneettisen luonteen täydellistä ymmärtämistä. Tämän kysymyksen ratkaisi James Maxwell. Lisäksi se merkitsi sähkömagnetismin sovelluksille keskeistä kulmakiveä. Mutta palataan itse probleemiin.

⁴Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804–1865), balt.-saks. fyysikko.

Ampèren piirilain mukaan magnetostatiikassa pätee yhtälö

$$(6.7) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Miten tämä yhtälö muuttuu, jos kentät ovat myös ajan funktioita? Koska varauksen säilymislain eli jatkuvuusyhtälön (4.9)

$$(6.8) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

on oltava aina ja kaikkialla voimassa kaikenlaisille varauksille ja virroille, eivät kenttäyhtälöt saa tietenkään olla ristiriidassa varauksen säilymislain kanssa. Huomaamme, että jos muodostamme yhtälöstä (6.7) puolittain divergenssin, saamme $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0$ ja päädymme siten virtausstatiikan perusyhtälöön $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, joka ei ole kuitenkaan voimassa sähködynamiiikassa. Näin ollen Ampèren piirilakiin on lisättävä jokin termi, jotta varauksen säilymislaki on voimassa.

Sähköstatiikassa määrittelimme sähkövuon tiheyden siten, että sen divergenssi eli skalaarilähteenä on vapaa avaruusvaraus ρ

$$(6.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

Tämän yhtälön avulla varauksen säilymislaki (6.8) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(6.10) \quad \nabla \cdot \left[\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] = 0.$$

Tästä näemme, että jos lisäämme yhtälön (6.7) oikealle puolelle termin $\partial \mathbf{D} / \partial t$, saamme tuloksen, joka on sopusoinnussa, ainakin matemaattisesti, varauksen säilymislain kanssa. Näin ollen Ampèren piirilakia on sähködynamiiikassa täydennettävä muotoon

$$(6.11) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}},$$

jota kutsutaan *Ampère-Maxwellin laiksi*.

Maxwellin suuri oivallus oli siis lisätä Ampèren piirilakiin lisätermi, joka on luonteeltaan tietynlaista sähkövirtaa, yksikkönä A/m^2 , nimeltään *siirrosvirta* tai oikeammin siirrosvirrantiheys. Tämä lisätermi ei ole mikään vähäpätöinen oivallus, kuten tulemme huomaamaan. Yhtälön (6.11) oikealla puolella on todellisten varausten liikkeestä aiheutuva virrantiheys \mathbf{J} lisättyinä siirrosvirrantiheydellä $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Siirrosvirta on mielenkiintoinen jo siitä syystä, että se voi esiintyä myös tyhjiössä eli aineettomassa tilassa. Kysymyksessä on siis

nimenomaan sähkökentän muuttumisesta johtuva magneettikentän pyörre. Siirrosvirtaa kutsutaan myös nimellä *kentänmuutosvirta*.

Voimme seuraavaksi koota sähkömagneetiikan perusyhtälöt yhteen. Vaikka kullakin yhtälöllä on oma historiansa, niiden yhdessä muodostamaa yhtälöjoukkoa on tapana kutsua *Maxwellin yhtälöiksi*. Ne esitettiin ensimmäisen kerran 1860-luvulla, tosin aika lailla eri muodossa kuin nykyään:

$$(6.12) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$(6.13) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$(6.14) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t),$$

$$(6.15) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Maxwellin oma osuus näihin yhtälöihin 'rajoittui' siirrosvirtatermiin, jonka kokeellinen varmentaminen jäi Heinrich Hertzin⁵ tehtäväksi parikymmentä vuotta myöhemmin yhtälöiden esittämisestä. Sähkövuon tiheyden divergenssiyhtälö (6.14) ja magneettivuon tiheyskentän divergenssiyhtälö (6.15) ovat voimassa sellaisenaan myös ajasta riippumattomissa tapauksissa. Sen sijaan sähkökentän ja magneettikentän voimakkuuden roottoriyhtälöt (6.12) ja vastaavasti (6.13) saavat dynamiikassa lisätermejä. Maxwellin yhtälöitä täydennetään usein Lorentzin voiman yhtälöllä, joka kirjoitetaan voiman tiheytenä $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, yksikkönä N/m³

$$(6.16) \quad \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

ja sanotaan, että kaikki makroskooppiset sähkömagneettiset ilmiöt ovat selitettävissä ja laskettavissa näiden yhtälöiden avulla. Maxwellin yhtälöiden avulla voidaan ratkaista siten kaikki geofysiikankin sähkömagneettiset ongelmat. Huomaamme heti, että, jos Maxwellin yhtälöissä aikaderivaatat merkitään nolliksi, päädyimme staattisen tilanteen kenttäyhtälöihin. On huomattava, että jatkuvuusyhtälöä (6.8) ei tarvitse mainita erillisenä yhtälönä, koska se sisältyy jo Maxwellin yhtälöihin, kuten siirrosvirtatermin tarkastelussa ilmeni.

⁵Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), saks. fyysikko.

Maxwellin yhtälöiden esittämä kenttäteoria on valmis teoria. Se on ollut sitä jo toista sataa vuotta, mutta kuitenkin yhtälöiden ratkaiseminen on edelleen laajan ja moninaisen tutkimuksen kohteena eri sovellusaloilla. Maxwellin yhtälöihin kätkeytyy valtava määrä erilaisia sähkömagneettisia ilmiöitä, joita esiintyy erityyppisten aineiden yhteydessä.

Maxwellin yhtälöitä voitaisiin pitää aksiomina ja lähteä muodostamaan esitystä siltä pohjalta. Koska ne yhtälöinä ovat vasta-alkajalle oudon näköisiä ja niiden kokeellinen perusta saattaisi jäädä epäselväksi, olemme tässä esityksessä lähteneet kokeellisista vuorovaikutuksista, joiden pohjalta kenttäteoria on formuloitu. Periaatteessa olisimme siis voineet aloittaa sähköstatiikankin esityksen suoraan Maxwellin yhtälöistä.

Gaussin lauseen ja Stokesin lauseen avulla Maxwellin yhtälöt voidaan esittää myös integraalimuodossa:

$$(6.17) \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$(6.18) \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S},$$

$$(6.19) \quad \oint_{S_c} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV,$$

$$(6.20) \quad \oint_{S_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

joissa L tarkoittaa umpinaista käyrää, joka on levossa valitussa inertiaalijärjestelmässä, S käyrään rajoittuvaa pintaa ja V umpinaisen pinnan S_c rajoittamaa tilavuutta. Lisäksi $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$, missä \mathbf{n} on pinnan normaaliyksikkövektori.

Huomattakoon vielä, että sähkömagneettisen kentän lähteinä ovat ajasta ja paikasta riippuvat varaukset $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ja virrat $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, jotka esiintyvät Maxwellin yhtälöissä.

Huomautus. Maxwellin yhtälöt voidaan esittää erilaisissa muodoissa ja koonpanoissa. Edellä oleva esitys on tavanomaisin. Niissä ovat mukana määrittelyn kautta muodostetut vektorikentät $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ja $\mathbf{H} = (1/\mu_0) \mathbf{B} - \mathbf{M}$. Kenttien lähteinä ovat tällöin todelliset varaukset ja virrat. ■

6.2.1 Sähkömagneettiset potentiaalit

Staattisessa kenttäteoriassa kenttäprobleemien formuloinnissa saatettiin käyttää potentiaalifunktioita. Sähköstatiikassa tällainen potentiaali oli skalaarinen potentiaali $\phi(\mathbf{r})$ ja magnetostatiikassa vektoripotentiaali $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Myös dynaamisessa kenttäteoriassa voidaan kenttäprobleemien ratkaisuja etsiä sopivien potentiaalifunktioiden avulla. Selvitetään seuraavaksi, minkälaisia potentiaalifunktioita voidaan tällöin formuloida.

Koska $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ myös dynaamisessa tapauksessa, voidaan kirjoittaa edelleen

$$(6.21) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Sijoitetaan tämä Maxwellin I yhtälöön (6.12), jolloin voidaan kirjoittaa, kun aika- ja paikkaderivoinnin järjestystä vaihdetaan

$$(6.22) \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Koska suluissa oleva lauseke on pyörteetön, se voidaan lausua skalaaripotentiaalin ϕ negatiivisena gradienttina, jolloin saadaan

$$(6.23) \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Dynaamisessa tapauksessa luonnollisesti sekä ϕ että \mathbf{A} ovat paikan ja ajan funktioita.

Yhtälöt (6.21) ja (6.23) ilmaisevat sähkömagneettisen kentän potentiaalien avulla.

Huomautus. Sähkömagneetiikassa voidaan määritellä eri tilanteissa muitakin potentiaalifunktioita kuin edellä mainitut. Edellä saamamme potentiaalifunktiot ϕ ja \mathbf{A} ovat kuitenkin aina määriteltävissä. ■

6.2.2 Harmoninen aikariippuvuus

Edellä saimme kootuksi Maxwellin yhtälöt, jotka kuvaavat sähkö- ja magneettikentän paikan ja ajan funktiona sekä niiden keskinäisen vuorovaikutuksen. Seuraavaksi tarkastelemme lähemmin niissä olevaa aikariippuvuutta ja sen esittämistä kompleksisessä muodossa ns. harmonisena sinimuotoisena aikariippuvuutena. Kuten tunnettua, yleinen ajasta riippuva signaali voidaan esittää sinimuotoisista signaaleista muodostuvana, ns. Fourierin⁶ sarjana, jos signaali on jaksollinen eli periodinen tai Fourierin integraalina, jos signaali

⁶Joseph Fourier (1763–1830), ransk. matemaatikko.

on jaksoton eli ei-periodinen. Näin ollen sinimuotoisen signaalin käsittely ei ole mitenkään yleistä aikariippuvuutta rajoittava valinta.

Osoittautuu, että aikariippuvuus kannattaa lisäksi esittää kompleksisena

$$(6.24) \quad \hat{f}(\mathbf{r}, t) = \hat{f}(\mathbf{r})e^{j\omega t},$$

missä $\hat{f}(\mathbf{r}, t)$ on ns. *aikaharmoninen* funktio, j imaginaariyksikkö ($j^2 = -1$), $\omega = 2\pi f$ kulmataajuus (1/s) (f on taajuus, yksikkönä 1/s=Hz) ja $\hat{f}(\mathbf{r})$ ajasta riippumaton kompleksifunktio

$$(6.25) \quad \hat{f}(\mathbf{r}) = f_r(\mathbf{r}) + jf_i(\mathbf{r}),$$

missä $f_r(\mathbf{r})$ on funktion $\hat{f}(\mathbf{r})$ reaaliosa ja $f_i(\mathbf{r})$ sen imaginaariosa. Kompleksianalyysistä tiedetään, että Eulerin kaavan mukaan

$$(6.26) \quad e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Kompleksiesityksestä päästään reaaliesitykseen kertomalla kompleksiesitys eksponenttifunktiolla ja ottamalla reaaliosa

$$(6.27) \quad F(\mathbf{r}, t) = \Re\{\hat{f}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}.$$

On huomattava, että aikariippuvuus voidaan yhtä hyvin esittää myös negatiivisen eksponentin avulla, $e^{-i\omega t}$. Siksi onkin tärkeää aina tarkistaa, kumpaa etumerkkiä käytetään. Probleemin sisällä ei etumerkkiä tule kuitenkaan vaihtaa. Geofysikaalisessa kirjallisuudessa esiintyvät molemmat tavat. Tässä esityksessä käytämme siis aikariippuvuudelle lauseketta $e^{j\omega t}$.

6.2.3 Aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt

Aikariippuvuuden esittämisestä kompleksisena on se etu, että derivoinnit ajan suhteen muuttuvat kertomiseksi kompleksiluvulla $j\omega$

$$(6.28) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

$$(6.29) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2.$$

Maxwellin yhtälöt (6.12)-(6.15) saadaan muunnoksella (6.28) siten muotoon

$$(6.30) \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$(6.31) \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$$(6.32) \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

$$(6.33) \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

Huomaamme, että funktiot riippuvat ainoastaan paikasta \mathbf{r} , koska yhteinen aikariippuvuus $e^{j\omega t}$ voidaan jakaa niistä pois.

Jatkuvuusyhtälö (6.8) on aikaharmonisessa tapauksessa

$$(6.34) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega\rho.$$

Huomautus 1. Aikaharmoninen riippuvuus tuo yhtälöihin kompleksiluvut ja näin joudutaan kompleksivektoreihin. Näitä kompleksivektoreita merkitään tavallisella vektorimerkinnällä eli lihavoinnilla. Jos jostakin syystä halutaan korostaa, että kyseessä on nimenomaan kompleksinen vektori, laiteaan 'hattu' vektorisymbolin päälle, esimerkiksi $\hat{\mathbf{E}}$. ■

Huomautus 2. Kompleksivektoreille pätevät käytännössä samat laskusääntöt kuin reaalivektoreille. On kuitenkin huomattava, että joissakin laskusääntöissä on sääntöä mukautettava kompleksikonjugaatilla, esimerkiksi $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*}$, missä \star tarkoittaa kompleksikonjugointia. ■

6.2.4 Sähködynamiikan konstitutiiviset yhtälöt

Kuten aiemmin jo staattisten kenttien tarkastelun yhteydessä on todettu, tieto väliaineesta siirretään kenttäyhtälöihin konstitutiivisten yhtälöiden eli väliaineiyhtälöiden tai rakenneyhtälöiden avulla. Rajoitumme tässä esityksessä yksinkertaiseen lineaariseen, isotrooppiseen ja homogeeniseen tai ainakin paloittain homogeeniseen levossa olevaan väliaineeseen eli *LIH*-aineeseen. Tällöin sähködynamiikan konstitutiiviset yhtälöt ovat

$$(6.35) \quad \mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E},$$

$$(6.36) \quad \mathbf{J} = g\mathbf{E},$$

$$(6.37) \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

Käytettäessä harmonista aikariippuvuutta, myös materiaaliominaisuuksille ϵ , g ja μ tulee yleisesti taajuusriippuvuus ja ne ovat luonteeltaan kompleksisia. Esimerkiksi sähkönjohtavuus g korvautuu kompleksisella sähkönjohtavuudella

$$(6.38) \quad g \rightarrow g + j\omega\epsilon.$$

Tämä nähdään yhtälöstä (6.31), kun siihen kirjoitetaan $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ja $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$. Vaihtoehtoisesti permittiivisyys ϵ voidaan korvata kompleksisella permittiivisyydellä, jonka imaginaariosa vastaa sähkönjohtavuutta

$$(6.39) \quad \epsilon \rightarrow \epsilon - j \frac{g}{\omega}.$$

Näiden yksinkertaisten konstitutiivisten yhtälöiden tapauksessa Maxwellin aikaharmonisiksi yhtälöiksi riittävät seuraavat kaksi yhtälöä:

$$(6.40) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H},$$

$$(6.41) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}.$$

Näihin yhtälöihin sisältyy jo yhtälö $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, kuten nähdään, jos yhtälöstä (6.30) otetaan divergenssi. Vastaavasti, jos yhtälöstä (6.31) otetaan divergenssi ja käytetään hyväksi aikaharmonista varauksen säilymlakia (6.34), saadaan yhtälö $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Näin ollen aikaharmonisuudesta on etua *yksinkertaisen väliaineen* tapauksessa myös siinä, että tarvittavien kenttäyhtälöiden määrä vähenee neljästä kahteen.

6.3 Sähkömagneettiset aalto- ja diffuusioyhtälöt

Sähköstatiikassa ja magnetostatiikassa tarkastelimme kenttiä ensin tyhjiössä ja sitten väliaineessa. Sähködynamiikassa emme tee jakoa tyhjiöön ja väliaineeseen, koska oletamme, että väliaineemme on levossa ja konstitutiivisten yhtälöiden (6.35)-(6.37) mukaista yksinkertaista ainetta, jolloin tyhjiötä vastaavat yhtälöt saadaan erikoistapauksena, kun $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ ja $g = 0$.

6.3.1 Sähkö- ja magneettikentän differentiaaliyhtälöt

Maxwellin yhtälöistä saadaan suoraan sähkömagneettisen kentän käyttäytymistä kuvaavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt. Jos Maxwellin II yhtälöstä (6.13) otetaan roottori puolittain

$$(6.42) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ja sijoitetaan tähän konstitutiivisten yhtälöiden (6.35) ja (6.36) esittämät relaatiot, saadaan

$$(6.43) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = g \nabla \times \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}.$$

Oletamme, että kenttä \mathbf{E} on matemaattisessa mielessä ”säännöllisesti käyttäytyvä”, jolloin aika- ja paikkaderivoinnin voi vaihtaa. Tämän jälkeen termi $\nabla \times \mathbf{E}$ voidaan eliminoida käyttäen Maxwellin I yhtälöä (6.12)

$$(6.44) \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2},$$

missä on käytetty konstitutiivista yhtälöä (6.37) $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Kehittämällä vasemman puoleista roottorilauseketta edelleen saadaan

$$(6.45) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = -g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Kun huomioidaan Maxwellin IV yhtälö (6.15) sekä konstitutiivinen yhtälö (6.37), päädytään lopulta yhtälöön

$$(6.46) \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Tässä yhtälössä ei ole lähde-termiä, toisin sanoen se on johdettu olettamalla, että lähdevirtoja ei ole tarkasteltavassa alueessa.

Sähkökentälle \mathbf{E} voidaan johtaa muodoltaan aivan samanlainen yhtälö samalla periaatteella lähtien Maxwellin I yhtälöstä (6.12) ja tarkastelemalla varauksetonta tilannetta ($\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$)

$$(6.47) \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - g\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Yhtälöt (6.46) ja (6.47) ovat vektoryhtälöitä, jotka kuvaavat *vaimenevaa värähtelyä eli vaimenevaa aaltoliikettä* johtavassa ($g \neq 0$) väliaineessa, kun väliaineessa ei ole ulkoisia lähteitä. Huomaamme, että sähkönjohtavuus g aiheuttaa aaltoliikkeen vaimenemisen. Ainetta, jolla on sähkönjohtavuutta, kutsutaan myös häviölliseksi aineeksi.

Jos väliaine on sähköäjohtamaton ($g = 0$), esimerkiksi tyhjiötä vastaava eriste, päädytään yhtälön (6.46) mukaan vaimenemattoman *aaltoliikkeen* yhtälöön

$$(6.48) \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

ja vastaavasti sähkökentälle yhtälön (6.47) mukaan

$$(6.49) \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Nämä ovat yleisen aaltoliikeopin mukaan aaltoyhtälöitä, joissa esiintyvä kerroin on aaltorintaman etenemisnopeuden eli vaihenopeuden itseisarvon neliön käänteisluku eli

$$(6.50) \quad \frac{1}{v^2} = \epsilon\mu.$$

Tästä saadaan aaltoliikkeen nopeudelle lauseke

$$(6.51) \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Jos tähän yhtälöön sijoitetaan tyhjiön permittiivisyyden ja permeabiliteetin arvot eli sähkövakio ja magneettivakio, saadaan aaltoliikkeen nopeudeksi

$$(6.52) \quad v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

eli valon tyhjiönopeus.

Maxwellin yhtälöt siis ennustavat sähkömagneettisen aaltoliikkeen. Edelleen tämän aaltoliikkeen nopeus tyhjiössä on sama kuin valonnopeus. On siis huomattava, että sähkömagneettiset kentät etenevät avaruudessa aaltoliikkeenä.

6.3.2 Sähkömagneettisten potentiaalien differentiaaliyhtälöt

Selvitämme seuraavaksi ne differentiaaliyhtälöt, jotka sähkömagneettisten potentiaalien ϕ ja \mathbf{A} on toteutettava.

Olemme jo aiemmin päätyneet tulokseen, että sähkömagneettisen kentän laskenta voidaan esittää potentiaalifunktioiden avulla seuraavasti

$$(6.53) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$(6.54) \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Ottamalla näissä huomioon yhteydet $\mathbf{H} = (1/\mu)\mathbf{B}$ ja $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ja sijoittamalla tulokset Maxwellin II yhtälöön (6.13) saadaan

$$(6.55) \quad \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{J}.$$

Kehittämällä vasenta roottorilauseketta ja kertomalla yhtälö puolittain μ :llä saadaan edelleen

$$(6.56) \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \epsilon\mu \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu \mathbf{J}.$$

Toistaiseksi ainoastaan \mathbf{A} :n roottori on määritelty (6.53), joten \mathbf{A} :n divergensi voidaan määritellä tarkoituksenmukaisesti. Jos vektoripotentiaalin divergenssiksi valitaan

$$(6.57) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

sievenee yhtälö (6.56) huomattavasti. Tällöin siitä tulee

$$(6.58) \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J},$$

joka on etsimämme vektoripotentiaalin differentiaaliyhtälö.

Kun yhtälö (6.54) sijoitetaan Maxwellin III yhtälöön (6.14) ja käytetään rakenneyhtälöä $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, saadaan

$$(6.59) \quad -\epsilon \left[\nabla \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \rho.$$

Kun tässä yhtälössä vaihdetaan divergenssin ja aikaderivaatan järjestys ja käytetään ehtoa (6.57), saadaan

$$(6.60) \quad \nabla^2 \phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Tämä on etsimämme skalaaripotentiaalin differentiaaliyhtälö.

Yhtälöt (6.58) ja (6.60) ovat epähomogeenisia aaltoyhtälöitä, joiden oikealla puolella ovat sähkömagneettisen kentän lähteet, virrat \mathbf{J} ja varaukset ρ .

Geofysiikan sähkömagneettisissa menetelmissä osa virroista ja varauksista ovat tunnettuja. Niitä voidaan kutsua primaarilähteiksi, jotka aikaansaavat primaarikentät. Näin ollen *johtavassa väliaineessa* kokonaisvirta \mathbf{J} aiheutuu kahdenlaisista lähteistä. Toinen osa koostuu ulkoisista tunnetuista lähteistä \mathbf{J}_0 ja toinen johtavassa väliaineessa olevista induktio- eli pyörrevirroista $g\mathbf{E}$. Jälkimmäisen osuus kokonaisvirtaan on yhtälön (6.54) mukaisesti

$$(6.61) \quad g \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Yhtälön (6.56) oikealle puolelle on siten kirjoitettava termin $\mu\mathbf{J}$ tilalle

$$(6.62) \quad \mu\mathbf{J}_0 + \mu g \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right).$$

Tällöin ehtoa (6.57) tulee vastaamaan ehto

$$(6.63) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mu g\phi = 0.$$

Potentiaalien yhtälöiksi tulee johtavan väliaineen tapauksessa

$$(6.64) \quad \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mu\mathbf{J}_0$$

ja

$$(6.65) \quad \nabla^2\phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \mu g \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{\epsilon},$$

missä ρ_0 tarkoittaa tunnetun sähkökentän \mathbf{E}_0 ($= \mathbf{J}_0/g$) skalaarilähteitä $\rho_0 = \epsilon\nabla \cdot \mathbf{E}_0$.

Ehtoa (6.57) tai (6.63) kutsutaan *Lorenzin*⁷ ehdoksi tai mitaksi.

6.3.3 Aikaharmonisten kenttien differentiaaliyhtälöt

Sovelletaan seuraavaksi yhtälöihin (6.46) ja (6.47) harmonista aikariippuvuutta. Tällöin saadaan

$$(6.66) \quad \nabla^2\mathbf{H} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{H} - j\omega g\mu\mathbf{H} = 0$$

ja vastaavasti

$$(6.67) \quad \nabla^2\mathbf{E} + \omega^2\epsilon\mu\mathbf{E} - j\omega g\mu\mathbf{E} = 0.$$

Jos merkitään

$$(6.68) \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu - j\omega g\mu,$$

yhtälöt (6.66) ja (6.67) saavat muodot

$$(6.69) \quad \nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0$$

⁷Ludvig Valentin Lorenz (1829–1891), tansk. fyysikko ja matemaatikko. Kirjallisuudessa varsin usein näkee kirjoitettavan Lorentzin ehto (eli nimessä on t-kirjain mukana). Tällöin Lorenzin nimi on saatettu sekoittaa hollantilaiseen fyysikkoon Hendrik Anton Lorentziin, jonka mukaan Lorentzin voima on nimetty. Myös Ludvig Lorenzin nimi esiintyy joskus t:llä kirjoitettuna: Lorentz.

ja vastaavasti

$$(6.70) \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0.$$

Näitä yhtälöitä kutsutaan homogeenisiksi *Helmholtzin yhtälöiksi*. Kompleksista kerrointa $k = k_r - jk_i$ kutsutaan *aaltoluvuksi*. Sen yksikkö on 1/m. Sen reaalisaa

$$(6.71) \quad k_r = \omega \left[\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right) \right]^{1/2}$$

kutsutaan *etenemiskertoimeksi* ja sen imaginaariosaa

$$(6.72) \quad k_i = \omega \left[\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right) \right]^{1/2}.$$

vaimenemiskertoimeksi. Nämä lausekkeet ovat muodostettavissa kompleksilukujen algebralla varsin helposti.

Huomautus. Joissakin kirjoissa kerrointa k kutsutaan etenemiskertoimeksi, sen reaalisaa k_r vaihekertoimeksi ja imaginaariosaa k_i vaimenemiskertoimeksi. ■

Sähkömagneettisten potentiaalien yhtälöt (6.58) ja (6.60) saavat aikaharmonisessa tapauksessa muodot

$$(6.73) \quad \nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \epsilon \mu \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

ja vastaavasti

$$(6.74) \quad \nabla^2 \phi + \omega^2 \epsilon \mu \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Johtavassa väliaineessa potentiaaleja (6.64) ja (6.65) vastaavat seuraavat aikaharmoniset yhtälöt

$$(6.75) \quad \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_0$$

ja vastaavasti

$$(6.76) \quad \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon},$$

missä \mathbf{J}_0 ja ρ_0 tarkoittavat tunnettuja lähteitä. Niiden ulkopuolella yhtälöt (6.75) ja (6.76) ovat homogeenisia Helmholtzin yhtälöitä.

6.3.4 Hitaasti muuttuvat kentät

Sovelletun geofysiikan induktiivisia menetelmiä silmällä pitäen on syytä tarkastella erikseen ns. hitaasti muuttuvia kenttiä eli kenttiä, joiden taajuus on 'alhainen'. Koska taajuuden f , valonnopeuden c ja aallonpituuden λ välillä on tyhjiössä voimassa relaatio

$$(6.77) \quad \lambda = \frac{c}{f},$$

voidaan päätellä, että alhainen taajuus tarkoittaa suurta aallonpituutta.

Geofysiikan sähkömagneettisissa induktiivisissa menetelmissä taajuudet ovat alhaisia, jolloin niihin liittyvä aallonpituus on hyvin suuri, moninkertaisesti suurempi kuin se alue, jossa mittaukset tehdään. Tällöin myös kentän vaihe on alueessa kaikkialla käytännöllisesti katsoen sama. Kentän aaltominaisuutta ei siis käytetä mitenkään hyväksi, vaan ainoastaan kentän kykyä indusoida pyörrevirtoja maahan.

Kenttäteorian valossa edellä lausuttu tulee ymmärrettäväksi, jos tarkastellaan yhtälön (6.66) kahden jälkimmäisen termin keskinäistä suuruutta. Tämä tarkoittaa suhteen $g/(\omega\epsilon)$ suuruuden arviointia. Jos

$$(6.78) \quad \frac{g}{\omega\epsilon} \gg 1,$$

johtavuustermi dominoi ja siirrosvirta on merkityksetön johtumisvirtaan verrattuna

$$(6.79) \quad |\mathbf{J}| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right|.$$

Tällöin vaimenevan aaltoyhtälön (6.46) korvaa *diffuusioyhtälö*

$$(6.80) \quad \nabla^2 \mathbf{H} - g\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Tämän muotoista yhtälöä noudattavat mm. massan diffuusio sekä lämmönjohtuminen aineessa. Siksi sitä kutsutaan diffuusioyhtälöksi. Jos puolestaan suhde

$$(6.81) \quad \frac{g}{\omega\epsilon} \ll 1,$$

pätee aaltoyhtälö (6.48). Jos lasketaan suhteen arvo jollekin tyypilliselle geomateriaalille käyttäen taulukkojen (3.1) ja (4.1) arvoja, ja taajuutena on vaikkapa korkeintaan 100 kHz, voidaan todeta, että johtavuustermi on hyvin dominoiva ja siten kenttä käyttäytyy diffuusioyhtälön mukaisesti. Tämä on siis tilanne geofysiikan induktiivisissa menetelmissä.

Diffuusioyhtälön (6.80) aikaharmoninen muoto on

$$(6.82) \quad \nabla^2 \mathbf{H} - j\omega g \mu \mathbf{H} = 0.$$

Kun merkitään aaltolukua

$$(6.83) \quad k^2 = -j\omega g \mu,$$

saadaan

$$(6.84) \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0.$$

Huomaamme, että riippumatta siitä, toteuttaako kenttämme aaltoyhtälön, diffuusioyhtälön tai vaimenevan aallon yhtälön, saadaan kaikissa tapauksissa aikaharmonisessa tilanteessa samanmuotoinen Helmholtzin yhtälö. Tämä on yksi lisäetu aikaharmonisten kenttien tapauksessa.

Huomautus. Helmholtzin yhtälöä voidaan merkinnällisesti lyhentää, kun otetaan käyttöön d'Alembertin⁸ operaattori

$$(6.85) \quad \square^2 = \nabla^2 + k^2.$$

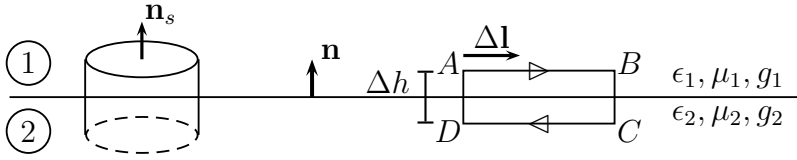
Esimerkiksi $\square^2 \mathbf{H} = 0$. Tässä esityksessä ei käytetä kuitenkaan d'Alembertin operaattoria. ■

6.3.5 Kenttävektoreiden rajapintaehdot

Jotta voimme ratkaista edellä saatuja differentiaaliyhtälöitä, tarvitsemme reunaehtojen lisäksi kenttien rajapintakäyttäytymistä kuvaavat rajapintaehdot kahden sähkömagneettisilta ominaisuuksiltaan erilaisen aineen rajapinnalla. Aineiden ominaisuudet ovat ϵ_1, μ_1, g_1 ja ϵ_2, μ_2, g_2 . Rajapintaehdot saadaan suoraan Maxwellin yhtälöistä. Ne eivät ole siis mitään kentille asetettavia ylimääräisiä lisäehtoja. Rajapintaehdot saadaan soveltamalla Gaussin ja Stokesin lausetta Maxwellin yhtälöihin ja antamalla kuvan 6.1 polun ja pintojen kutistua differentiaalisen pieniksi, aivan kuten teimme jo staattisten kenttien yhteydessä.

Koska magneettivuon tiheys \mathbf{B} ja sähkövuon tiheys \mathbf{D} toteuttavat samat yhtälöt sekä statiikassa että dynamiikassa, voimme suoraan kirjoittaa niiden rajapintaehdot statiikan tulosten pohjalta tai käyttämällä uudelleen Gaussin lausetta ja 'pillerirasia'-tekniikkaa kuvan 6.1 mukaiseen sylinteriin ja antamalla sylinterin korkeuden lähestyä nollaa.

⁸Jean le Rond d'Alembert (1717–1783), ransk. matemaatikko.



Kuva 6.1: Sähkömagneettisen kentän kenttävektoreiden rajapintaehto-
johtaminen.

Magneettivuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva

$$(6.86) \quad B_{1n} = B_{2n}$$

ja sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on pintavarauksen (σ) verran epäjatkuva

$$(6.87) \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma.$$

Sähkökentän tangentialikomponentille saadaan ehto soveltamalla Stoke-
sin lausetta yhtälöön $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. Tällöin saadaan

$$(6.88) \quad \oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Sovelletaan tätä differentiaaliseen polkuun $ABCD$ ja annetaan polun osien
 $AD = \Delta h$ ja $BC = \Delta h$ mennä nolliin

$$(6.89) \quad (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \Delta\mathbf{l} = - \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \Delta h |\Delta\mathbf{l}|,$$

missä $\Delta h \rightarrow 0$. Koska $\partial\mathbf{B}/\partial t$ on rajoitettu, lähestyy yhtälön (6.89) oikea
puoli nolliin. Näin ollen sähkökentän tangentialikomponentin on oltava jat-
kuva

$$(6.90) \quad E_{1t} = E_{2t},$$

mikä voidaan edelleen esittää ristitulon avulla muodossa

$$(6.91) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0.$$

Muodostetaan magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} rajapintaehto lähtien yhtälöstä $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ ja sovelletaan Stokesin lausetta, kuten edellä sähkökentänkin tapauksessa, polkuun $ABCD A$. Tällöin saadaan

$$(6.92) \quad \oint_{ABCD A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

ja edelleen

$$(6.93) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \Delta h.$$

Tämän yhtälön oikean puolen toinen termi menee kohti nollaa, koska $\partial \mathbf{D} / \partial t$ on rajoitettu. Myös oikean puolen ensimmäinen termi $\mathbf{J} \Delta h \rightarrow 0$, kun $\Delta h \rightarrow 0$, jos \mathbf{J} on äärellinen. Pinnalla voi kuitenkin olla tietyssä tilanteessa pintavirta \mathbf{K}

$$(6.94) \quad \mathbf{K} = \lim_{\substack{\Delta h \rightarrow 0 \\ \mathbf{J} \rightarrow \infty}} \mathbf{J} \Delta h$$

siten, että rajapintaehdoksi tulee

$$(6.95) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{K}.$$

Pintavirtaa \mathbf{K} voi esiintyä vain, jos sähkönjohtavuus on ääretön, koska muussa tapauksessa $\mathbf{E} = \mathbf{J} / g$ on äärellinen. Jotta siis $\mathbf{J} \rightarrow \infty$, täytyy $g \rightarrow \infty$. Näin ollen *äärellisen johtavuuden* tapauksessa rajapintaehdoksi (6.95) saadaan

$$(6.96) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0$$

eli \mathbf{H} :n tangentialikomponentti on jatkuva.

Käyttämällä rakenneyhtälöä $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ voidaan magneettivuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto (6.86) esittää muodossa

$$(6.97) \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Vastaavasti \mathbf{H} :n tangentialikomponentin jatkuvuus (6.96) voidaan lausua muodossa

$$(6.98) \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2.$$

Virrantiheyden \mathbf{J} rajapintaehto saadaan jatkuvuusyhtälöstä (6.8) 'pillerirasia'-tekniikkaa käyttäen. Tulokseksi saadaan

$$(6.99) \quad J_{1n} - J_{2n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

missä σ on vapaan pintavarauksen tiheys. Aikaharmonisessa tilanteessa tämä ehto saa muodon

$$(6.100) \quad J_{1n} - J_{2n} = -j\omega\sigma,$$

joka voidaan edelleen kirjoittaa, kun $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$,

$$(6.101) \quad g_1 E_{1n} - g_2 E_{2n} = -j\omega\sigma.$$

Kun lisäksi otetaan \mathbf{D} :n rajapintaehto (6.87) sekä rakenneyhtälö $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, voidaan kirjoittaa

$$(6.102) \quad \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_2 E_{2n} = \sigma.$$

Eliminoidaan pintavaraustiheys σ yhtälöistä (6.101) ja (6.102), jonka jälkeen saadaan sähkökentän normaalikomponenttia koskeva rajapintaehto

$$(6.103) \quad \left(\epsilon_1 - j\frac{g_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\epsilon_2 - j\frac{g_2}{\omega}\right) E_{2n}.$$

Tämä yhtälö voidaan kertoa myös puolittain $j\omega$:lla, jolloin se saa muodon

$$(6.104) \quad (g_1 + j\omega\epsilon_1)E_{1n} = (g_2 + j\omega\epsilon_2)E_{2n}.$$

Nähdään, että yhtälö (6.103) vastaa muodoltaan \mathbf{D} :n normaalikomponentin jatkuvuutta, kun pintavarausta ei ole. Samoin yhtälö (6.104) vastaa muodoltaan \mathbf{J} :n normaalikomponentin jatkuvuusehtoa, kun pintavarausta ei ole. Tällöin kertoimina olevat materiaaliominaisuudet vastaavat permittiivisyyttä ja sähkönjohtavuutta yhteyden (6.39) ja vastaavasti (6.38) mukaisesti.

6.4 Maxwellin yhtälöiden ratkaiseminen

Seuraavaksi voimmekin sitten siirtyä tarkastelemaan Maxwellin yhtälöiden ratkaisuja. Yksinkertaisin tilanne on sähköä johtamattomassa kokoavaruudessa oleva tasoaalto. Aloitammekin tasoalttoratkaisusta ensin häviöttömässä ja sitten häviöllisessä tapauksessa. Esitämme myös tasoallon heijastumista ja taittumista koskevat lainalaisuudet. Tasoallon jälkeen tarkastelemme sähkömagneettisia säteilylähteitä. Esimerkkeinä käydään läpi värähtelevä sähköinen ja magneettinen dipoli.

Lopuksi tarkastellaan johtavaa palloa tyhjiössä harmonisesti värähtelevässä homogeenisessa magneettikentässä ja etsitään sille analyyttinen ratkaisu.

6.4.1 Tasoaallot

Päädyimme aiemmin tulokseen, että sähkömagneettinen kenttä etenee avaruudessa aaltolina. Sähköä johtamattomassa ($g = 0$) aineessa aaltoliike on vaimenematonta eli häviötöntä. Johtavan aineen tapauksessa aaltoliike on vaimenevaa. Hitaasti muuttuvien kenttien tapauksessa aaltoliikkeen korvaakin lopulta kentän diffuusioyhtälön mukainen eteneminen väliaineeseen.

Tasoaallot häviöttömässä väliaineessa

Tasoaaltoratkaisussa kenttä riippuu vain yhdestä karteesisen koordinaatiston koordinaatista, joka ilmoittaa kentän etenemissuunnan. Kenttä on tietyllä ajanhetkellä vakio tätä suuntaa vastaan kohtisuorassa tasossa. Kentällä on siis sama vaihe kaikkialla tässä tasossa. Kentän amplitudi muuttuu sinimuotoisesti positiivisen ja negatiivisen huippuarvon välillä tietyllä taajuudella (eli tietyn määrän kertoja sekunnissa).

Valitaan aallon etenemissuunnaksi z -akselin suunta. Olkoon aineen sähköiset materiaaliparametrit ϵ ja μ . Häviöttömässä aineessa ovat voimassa aaltoyhtälöt (6.49) ja (6.48). Näitä vastaavat aikaharmonisessa tilanteessa Helmholtzin yhtälöt

$$(6.105) \quad \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$$

ja vastaavasti

$$(6.106) \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

missä aaltoluku k määräytyy yhtälöstä

$$(6.107) \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Koska yhtälöt ovat täysin samanmuotoisia, voimme valita niistä jommankumman. Valitsemme sähkökentän \mathbf{E} . Tasoaaltoratkaisussa sähkökenttä riippuu nyt vain z -koordinaatista, jolloin nabla-operaattori typistyy muotoon

$$(6.108) \quad \nabla = \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Tällöin yhtälö (6.105) saa muodon

$$(6.109) \quad \frac{d^2}{dz^2} \mathbf{E}(z) + k^2 \mathbf{E}(z) = 0.$$

Tämä on toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö kompleksiselle vektorifunktiolle $\mathbf{E}(z)$ kirjoitettuna. Tällä yhtälöllä on kaksi lineaarisesti riippumattonta ratkaisua, joiden lineaarikombinaationa voidaan kirjoittaa yleinen ratkaisu

$$(6.110) \quad \mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_+ e^{-jkz} + \mathbf{E}_- e^{jkz}.$$

Kompleksiset vakiovektorit \mathbf{E}_+ ja \mathbf{E}_- määräytyvät probleemin reunaehdoista. \mathbf{E}_+ vastaa positiivisen ja \mathbf{E}_- negatiivisen z -akselin suuntaan etenevää aaltoa. Tämä nähdään, kun muodostetaan z -akselin positiiviseen suuntaan etenevän aallon reaaliuotoinen lauseke

$$(6.111) \quad \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_+ e^{-jkz} e^{j\omega t} \} = \mathbf{E}_+ \cos(\omega t - kz),$$

missä siis nyt \mathbf{E}_+ on reaalivektori. Tämän kentän ”nollavaiheeksi” voidaan valita ajanhetki $t = 0$ kohdassa $z = 0$. Kun aika etenee, siirtyy valitsemamme ”nollavaihe” ajan t kuluttua kohtaan $z = \omega t/k$ eli z -akselin positiiviseen suuntaan. Voimme tietenkin valita kentästä minkä tahansa muunkin kohdan ja seurata sen ajallista etenemistä. Tulos on sama. Vastaavasti nähdään, että \mathbf{E}_- on negatiivisen z -akselin suuntaan etenevä aalto.

Magneettikentän voimakkuudelle \mathbf{H} saadaan samanmuotoinen lauseke. Siihen päästään myös yhtälöstä (6.40), kun sovelletaan muotoa (6.108):

$$(6.112) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})}{-j\omega\mu} \\ &= \frac{1}{-j\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_+ \frac{d}{dz} e^{-jkz} + \frac{1}{-j\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_- \frac{d}{dz} e^{jkz} \\ &= \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_+ e^{-jkz} - \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_- e^{jkz} \\ &= \mathbf{H}_+ e^{-jkz} + \mathbf{H}_- e^{jkz}. \end{aligned}$$

Tästä voidaan päätellä magneettikentän voimakkuuden \mathbf{H} suuruus ja suunta sähkökenttään nähden seuraavasti.

Edellä valitsimme taso-aallon etenemissuunnaksi z -akselin suunnan. Huomaamme, että z -akselin positiiviseen suuntaan etenevälle aallolle voidaan kirjoittaa

$$(6.113) \quad e^{-jkz} = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

kun $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z k$. Jos annamme aaltoluvulle vektoriluonteen liittämällä siihen aallon etenemissuunnan, voimme kirjoittaa taso-aallolle yleisesti

$$(6.114) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

joka kuvaa siis aaltolukuvektorin \mathbf{k} suuntaan etenevää, amplitudiltaan \mathbf{E}_0 olevaa aaltoa. On helppo todeta, että yhtälö (6.114) toteuttaa Helmholtzin yhtälön (6.105). Huomaamme, että ∇ korvautuu yleisen etenemissuunnan tapauksessa lausekkeella

$$(6.115) \quad \nabla = -j\mathbf{k},$$

koska "nablattavan" funktion muoto on $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

Tällöin nähdään yleisesti, että magneettikentän voimakkuus (6.40) eli

$$(6.116) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\omega\mu}$$

on kohtisuorassa sekä sähkökenttää että aallon etenemissuuntaa vastaan. Vastaava tilanne saadaan sähkökentälle Maxwellin II yhtälöstä (6.41)

$$(6.117) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{r})}{\omega\epsilon},$$

jolloin siis tasoallon sähkökenttä on kohtisuorassa etenemissuuntaa vastaan. Näin ollen mielivaltaiseen suuntaan \mathbf{k} etenevän aallon kenttä- ja suuntavektorit \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{k} muodostavat oikean käden systeemin.

Funktio

$$e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

kuvaa jaksollista funktiota, jonka arvo toistuu matkan $\lambda = 2\pi/k$ välein. Matkaa λ kutsutaan aallonpituudeksi ja se voidaan materiaaliparametrien (ja aaltolukuvektorin \mathbf{k} itseisarvon k) avulla kirjoittaa muotoon

$$(6.118) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

Kun edelleen määritellään laaduton taitekerroin

$$(6.119) \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}},$$

voidaan aallonpituus ilmoittaa ns. vapaan tilan aallonpituuden λ_0 avulla

$$(6.120) \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

missä vapaan aallon aallonpituus tarkoittaa tyhjiössä värähtelevän kentän aallonpituutta

$$(6.121) \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}.$$

Tässä on käytetty valon tyhjiönopeudelle jo aiemmin käyttöön ottamaamme merkintätapaa $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Huomautus. Tasoaalto on luonteeltaan abstraktio, kuten pistevarauskin. Tasoaallossa aaltorintama on ääretön taso. Fysikaalisesti tasoaaltoa ei voi olla olemassa, koska siinä kentän energia olisi ääretön. Todettakoon, että sähkömagneettisen kentän energiatiheys (yksikkö J/m^3) on

$$(6.122) \quad u = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}).$$

Matemaattisena oliona tasoaalto on sen sijaan hyvin käyttökelpoinen, koska minkä tahansa lähteen synnyttämä aaltokenttä kaukana lähteestä lähestyy muodoltaan, ainakin paikallisesti, tasoaaltoa. ■

Sähkömagneettinen spektri

Olemme edellä saaneet ratkaisun tasoaalolle suoraan Maxwellin yhtälöistä yleiselle taajuudelle ja aallonpituudelle. On hyödyllistä suuruusluokkien selvittämiseksi tarkastella hieman tasoaaltojen taajuus- ja aallonpituusalueita käyttäen vapaan tilan aallonpituutta. Tämän tyyppisesti tarkastelimme jo aiemmin hitaasti muuttuvia kenttiä. Seuraavassa luonnehdimme siis sähkömagneettista spektriä. Aloitamme matalista taajuuksista, jotka ovat geofysiikan sähkömagneettisten menetelmien kannalta myös mielenkiintoisia.

Geofysiikassa esiintyy taajuuksia alle yhdestä hertsistä ylöspäin. Matalimmat taajuudet liittyvät maan magneettikentän ajallisiin muutoksiin sekä ilmakehän sähköilmiöiden, merkittävimpänä salamoinnin, synnyttämiin kenttiin. Taulukkoon 6.1 on koottu spektrin eri osia ja mainittu niiden käyttökohteita tai säteilyn luonnetta.

Taulukosta huomaamme, että sähkömagneettinen säteily-spektri kattaa valtavan laajan alueen. Geofysiikassa käytetään periaatteessa spektrin koko taajuusalueutta. Sovelletun geofysiikan sähkömagneettiset menetelmät ovat matalataajuisia menetelmiä, useimmiten alle 100 kHz. Geofysiikan tutkasovellukset, kuten maatutka, toimivat kymmenien ja satojen megahertsien taajuusalueella. Säteilylämmönsiirto tapahtuu puolestaan infrapuna-alueella. Kideoptiset ilmiöt esiintyvät näkyvän valon alueella. Korkeinta taajuutta edustavat gammasäteet. Todettakoon, että korkeataajuisia kenttiä karakterisoidaan useimmiten aallonpituudella taajuuden sijasta.

Emme puutu tarkemmin eri taajuusalueen säteilykenttien lähteisiin eli syntymekanismeihin. Tuonnempana tarkastelemme ainoastaan geofysiikan sovelluksissa tärkeitä säteilykenttiä. Todettakoon kuitenkin sen verran, että aineen ja sähkömagneettisen säteilyn vuorovaikutus on syynä useimpiin arkiinkin valo- tai muihin ilmiöihin. Niinpä ilmiöt tulevat teoreettisesti, laskennallisesti ja kvantitatiivisesti ymmärrettäviksi Maxwellin yhtälöiden kautta.

Taulukko 6.1: Sähkömagneettinen spektri.

Taajuus	Aallonpituus	Käyttökohde/säteilyn luonne
3-30 Hz	1-100 Mm	galvaaniset mittaukset
30-300 Hz	1-10 Mm	matalataajuusslingram
300-3000 Hz	100-1000 km	slingram
3-30 kHz	10-100 km	”VLF”-menetelmä, navigointi
30-300 kHz	1-10 km	navigointi
300-3000 kHz	100-1000 m	radiotekniikka
3-30 MHz	10-100 m	radiotekniikka
30-300 MHz	1-10 m	TV, tietoliikenne, maatutkat
300-3000 MHz	10-100 cm	tutkat, matkapuhelin (GSM)
3-30 GHz	1-10 cm	satelliittiyhteydet
30-300 GHz	1-10 mm	millimetriaallot
$0,3-400 \cdot 10^{12}$ Hz	$0,75 \mu\text{m}-1000 \mu\text{m}$	infrapuna
$400-800 \cdot 10^{12}$ Hz	380-750 nm	näkyvä valo
$800 \cdot 10^{12}$ Hz - $3 \cdot 10^{17}$ Hz	0,6 nm-380 nm	ultravioletivalo
$3 \cdot 10^{17}$ Hz - $3 \cdot 10^{22}$ Hz	$10^{-14}-6 \cdot 10^{-12}$ m	röntgen- ja gammasäteet

Tosin tiettyjen atomaaristen ilmiöiden kohdalla on turvaututtava Maxwellin kenttäteorian kvanttifysikaalisiin laajennuksiin, ns. kvanttielektrodynamiikkaan.

Aallon polarisaatio

Polarisaatio-termiä olemme jo aiemmin käyttäneet dielektrisen aineen karakterisoinnin yhteydessä. Nyt määriteltävä polarisaatio ei liity aineeseen eikä dielektriseen polarisaatioon, vaan se on sähkömagneettisen aallon ajallista käyttäytymistä kuvaava suure. Kun muodostetaan reaalinen sähkökenttävektori, jossa aikariippuvuus on siten mukana, päästään tutkimaan kentän aikakäyttäytymistä yhden värähtelyjakson aikana. Kompleksisesta aikaharmonisesta sähkökentästä muodostetaan todellinen, reaalinen, ajasta ja paikasta riippuva sähkökenttä yhtälön (6.27) mukaisesti

$$(6.123) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \},$$

missä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ on kompleksinen, paikasta riippuva sähkökenttävektori ja $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ on todellinen, ajasta ja paikasta riippuva sähkökenttä.

Jaetaan kompleksinen sähkökenttä $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ reaali- ja imaginaariosaan

$$(6.124) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i,$$

missä \mathbf{E}_r ja \mathbf{E}_i ovat reaalivektoreita. Olemme kiinnostuneet nyt aikariippuvuudesta. Yhtälön (6.123) mukaan saadaan

$$(6.125) \quad \mathbf{E}(t) = \Re \{ (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) e^{j\omega t} \} = \mathbf{E}_r \cos \omega t - \mathbf{E}_i \sin \omega t.$$

Huomaamme, että kenttävektorin $\mathbf{E}(t)$ ajan mukana piirtämä käyrä riippuu reaali- ja imaginaariosavektoreiden keskinäisestä suhteesta. Kun $\omega t = 0$, on kenttävektori \mathbf{E}_r . Kun $\omega t = \pi/2$, kenttävektori on $-\mathbf{E}_i$. Kun $\omega t = \pi$, kenttävektori on $-\mathbf{E}_r$, ja kun $\omega t = 3\pi/2$, kenttävektori on \mathbf{E}_i . Kun $\omega t = 2\pi$, kenttävektori on jälleen \mathbf{E}_r .

Reaali- ja imaginaariosavektoreiden keskinäisen suuruuden perusteella on erotettavissa kolme tapausta.

- Jos $\mathbf{E}_r = 0$ tai $\mathbf{E}_i = 0$ tai $\mathbf{E}_r \times \mathbf{E}_i = 0$, tällöin sähkökenttävektori (6.125) piirtää ajan mukana suoraa viivaa edestakaisin. Tällöin sanotaan, että aallolla on *lineaarinen polarisaatio*.
- Jos $|\mathbf{E}_r| = |\mathbf{E}_i|$ ja $\mathbf{E}_r \cdot \mathbf{E}_i = 0$, tällöin sähkökenttävektori (6.125) piirtää ympyrän yhden jakson aikana. Tällöin kyseessä on *ympyräpolarisaatio*.
- Mikäli mikään edellä olevista tilanteista ei ole voimassa, kysymyksessä on *elliptinen polarisaatio*. Tällöin siis sähkökenttävektori (6.125) piirtää yhden jakson aikana ellipsin.

On osoitettavissa, että myös kahden samantaajuisen, mutta amplitudiltaan ja etenemissuunnaltaan erilaisen aallon summa-aalto on yleisesti elliptisesti polarisoitunut. Aalloilla on tällöin myös vaihe-ero. Joissakin geofysiikan induktiivisissa menetelmissä käytetään hyväksi elliptistä polarisaatiota mittaamalla polarisaatioellipsin karakteristisia ominaisuuksia. Näin tehdään esimerkiksi VLF-menetelmässä.

Tasoaallot häviöllisessä väliaineessa

Edellä tarkastelimme tilannetta ideaalista eristettä vastaavassa väliaineessa, jolla ei ole lainkaan sähkönjohtavuutta. Tällöin sähkömagneettinen kenttä etenee puhtaasti vaimenemattomana aaltoliikkeenä. Seuraavaksi otamme mukaan sähkönjohtavuuden. Olemme jo aiemmin todenneet, että tällöin kysymyksessä on vaimeneva aaltoliike, jonka aaltoluku on yhtälön (6.68) mukaan

$$(6.126) \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - j\omega g \mu.$$

Tämän reaali- ja imaginaariosa ovat yhtälöiden (6.71) ja vastaavasti (6.72) mukaiset. Koska vaimeneva aaltoliike toteuttaa Helmholtzin yhtälön (aivan kuten vaimenematonkin), voimme käyttäen yleistä Helmholtzin yhtälön toteuttavaa tasoaallon ratkaisua (6.114) kirjoittaa häviöllisen aineen tasoaalto-ratkaisun muodossa

$$(6.127) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Tarkastelemalla z -akselin suuntaan etenevää aaltoa ja huomioimalla, että $k = k_r - jk_i$, saadaan yhtälöstä (6.127) edelleen

$$(6.128) \quad \mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0 e^{-k_i z} e^{-jk_r z}.$$

Huomaamme, että häviöllisessä aineessa vaimenevan aallon aallonpituus saadaan aaltoluvun reaali-osasta

$$(6.129) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_r}$$

ja että aaltoluvun imaginaariosa liittyy tasoaallon vaimenemiseen

$$(6.130) \quad \frac{|\mathbf{E}(z)|}{|\mathbf{E}_0|} = e^{-k_i z}.$$

Aallon vaimenemista kuvataan usein tunkeutumissyvyydellä, jolla kentän voimakkuus on pudonnut e :nteen osaan alkuperäisestä arvostaan. Merkitään tunkeutumissyvyyttä δ :lla, jolloin siis

$$(6.131) \quad \delta = \frac{1}{k_i}.$$

Tämä tarkoittaa, että kenttä on vaimentunut n. 37 %:iin alkuperäisestä arvostaan.

Arvioidaan seuraavaksi aaltoluvun imaginaariosan eli vaimenemiskertoimen arvoa eri tilanteissa. Olemme jo todenneet, että geofysiikassa on kysymyksessä usein hitaasti muuttuvat kentät, jolloin Maxwellin yhtälöiden siirrosvirta-termi voidaan jättää huomiotta. Tällöin siis $g/(\omega\epsilon) \gg 1$. Näin ollen k_i :tä voidaan approksimoida yhtälön (6.72) perusteella muodossa

$$(6.132) \quad k_i \approx \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}.$$

Huomataan myös, että k :n reaali-osaa voidaan approksimoida vastaavalla lausekkeella eli $k_r \approx k_i$.

Tunkeutumissyvyudeksi δ saadaan tällöin

$$(6.133) \quad \delta = \frac{1}{k_i} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega \mu g}}.$$

Tätä kutsutaan geofysiikan kirjallisuudessa *skin depth* -syvyudeksi. Usein käytännössä ajatellaan, että kenttää ei enää ole skin depth -syvyyden jälkeen. Siksi skin depth -syvyyden käsitettä on käytetty paljon, kun arvioidaan eri menetelmien syvyytulottuvuutta.

Toinen tilanne muodostuu silloin, kun suhde $g/(\omega\epsilon) \ll 1$. Tällöin vaimenemiskertoimen (6.72) sisällä olevaa neliöjuurta approksimoidaan binomiteoreemalla (2.213) ottamalla mukaan vain lineaarinen termi:

$$\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2}} = \left(1 + \frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{g^2}{\omega^2 \epsilon^2}.$$

Sijoittamalla tämä vaimenemiskertoimen yhtälöön (6.72) saadaan

$$(6.134) \quad k_i \approx \frac{1}{2} g \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

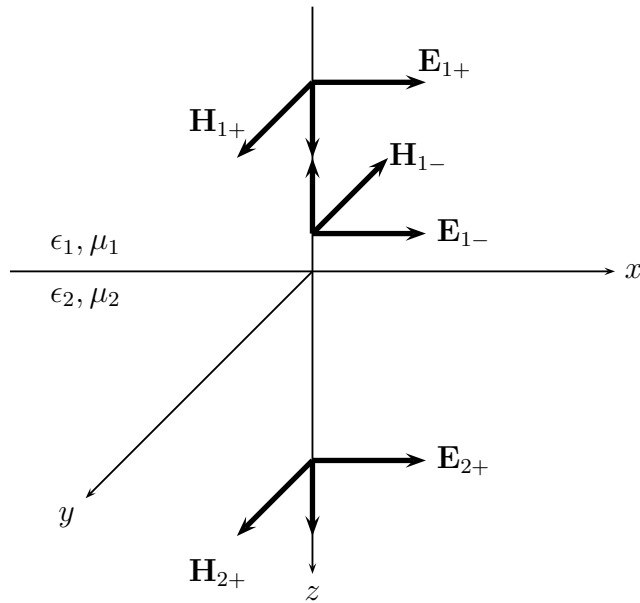
Tämän avulla tunkeutumissyvyudeksi tulee

$$(6.135) \quad \delta = \frac{1}{k_i} \approx \frac{2}{g} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}.$$

Huomataan, että kertoimen $g/(\omega\epsilon)$ ollessa $\ll 1$, tunkeutumissyvyys ei riipu lainkaan taajuudesta. Monilla geologisilla materiaaleilla tämä taajuudesta riippumaton tunkeutumissyvyys saavutetaan noin 1 MHz:n taajuudella. Tämä tulos on tärkeä mm. maatumkaluotauksissa. Tulos vastaa ”hyvän eristeen” tapausta. Mitä heikommin johtavasta aineesta ja mitä suuremmasta permittiivisyydestä on kysymys, sitä suurempi on tunkeutumissyvyys.

Tasoaallon kohtisuora heijastuminen eristerajapinnasta

Edellä tarkastelimme tasoaaltoa rajoittamattomassa tilassa. Seuraavaksi tutkimme, mitä tapahtuu, kun tasoaalto kohtaa kohtisuoraan eristerajapinnan. Tämä on esimerkki ns. sähkömagneettisesta sirontaprobleemista, jotka ovat geofysiikassa hyvin keskeisiä. Aallon kohdatessa rajapinnan osa siitä heijastuu takaisin ja osa läpäisee rajapinnan. Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että aineet ovat puhtaita eristeitä, jolloin niissä ei ole sähkönjohtavuutta eikä siten häviöllisyyttä. Merkitsemme aineiden ominaisuuksia ϵ_1, μ_1 ja ϵ_2, μ_2 .



Kuva 6.2: Taso-aallon kohtisuora heijastuminen kahden eristeen rajapinnalta.

Aalto kulkeeseen positiivisen z -akselin suuntaan. Sijoitetaan taso $z = 0$ rajapinnalle, jolloin $z < 0$ vastaa ainetta 1 ja $z > 0$ ainetta 2 kuvan 6.2 mukaisesti.

Merkitään aineeseen 1 saapuvaa aaltoa indeksillä $1+$ ja palaavaa, heijastunutta aaltoa indeksillä $1-$. Vastaavasti aineeseen 2 läpimennyt aalto merkitään indeksillä $2+$. Koska aalto ei kohtaa enää sen jälkeen uutta rajapintaa, palautuvaa aaltoa ei ole aineessa 2.

Positiivisen z -akselin suuntaan etenevän aallon eksponentissa on miinusmerkki ja palaavan aallon plus-merkki. Koska kyseessä on puhdas eriste, aaltoluku on $k_i = \omega \sqrt{\epsilon_i \mu_i}$, missä i tarkoittaa nyt aineen indeksii, $i = 1, 2$. Määritellään vielä suhde

$$(6.136) \quad \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\epsilon_i}},$$

jota kutsutaan *aaltoimpedanssiksi* ja jonka yksikkö on $\Omega = \text{V/A}$. Valitsemme aallon lineaariseksi polarisoitumissuunnaksi x -akselin suunnan. Tällöin siis aallon amplitudi on x -akselin suuntainen eli kohtisuorassa etenemissuuntaa vastaan. Näin ollen voidaan sähkökentälle aineessa 1 kirjoittaa

$$(6.137) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1(z) &= \mathbf{E}_{1+} + \mathbf{E}_{1-} \\ &= \mathbf{e}_x E_{1+} e^{-jk_1 z} + \mathbf{e}_x E_{1-} e^{jk_1 z}, \end{aligned}$$

ja vastaavasti aineessa 2

$$(6.138) \quad \mathbf{E}_2(z) = \mathbf{E}_{2+} = \mathbf{e}_x E_{2+} e^{-jk_2 z}.$$

Magneettikenttä on tällöin polarisoitunut y -akselin suuntaisesti, ja sen voimakkuudelle saadaan yhtälön (6.40) mukaisesti aineessa 1

$$(6.139) \quad \begin{aligned} \mathbf{H}_1(z) &= \mathbf{H}_{1+} + \mathbf{H}_{1-} \\ &= \mathbf{e}_y \frac{E_{1+}}{\eta_1} e^{-jk_1 z} - \mathbf{e}_y \frac{E_{1-}}{\eta_1} e^{jk_1 z} \end{aligned}$$

ja vastaavasti aineessa 2

$$(6.140) \quad \mathbf{H}_2(z) = \mathbf{H}_{2+} = \mathbf{e}_y \frac{E_{2+}}{\eta_2} e^{-jk_2 z}.$$

Jos tunnetaan tulevan aallon sähkökentän amplitudi, voidaan heijastuneen ja läpimenneen aallon amplitudit määrittää rajapintaehtojen avulla. Nämä ehdot ovat sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuus (6.90) sekä magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentin jatkuvuus (6.96) rajapinnalla $z = 0$. Tällöin saadaan ehdot

$$(6.141) \quad \begin{aligned} E_{1+} + E_{1-} &= E_{2+} \\ \frac{E_{1+}}{\eta_1} - \frac{E_{1-}}{\eta_1} &= \frac{E_{2+}}{\eta_2}. \end{aligned}$$

Näistä kahdesta yhtälöstä saadaan heijastuneen ja läpimenneen aallon amplitudit. *Heijastuskerroin* R kertoo heijastuneen ja tulevan aallon amplitudin suhteen:

$$(6.142) \quad R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

ja vastaavasti *läpäisykerroin* T kertoo läpimenneen aallon ja tulevan aallon amplitudin suhteen

$$(6.143) \quad T = \frac{E_{2+}}{E_{1+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}.$$

Heijastuskerroin ja läpäisykerroin tulevat käyttöön mm. maatutkaluotauksissa. Koska geologisissa materiaaleissa usein on $\mu_i \approx \mu_0$ ($i = 1, 2$), esitetään maatutkaluotauksissa heijastuskerroin muodossa

$$(6.144) \quad R = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}.$$

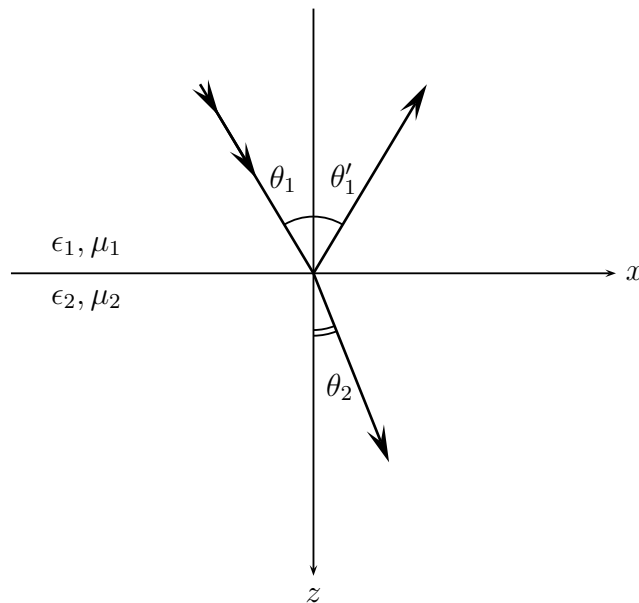
Yleisempi tilanne on se, missä aalto saapuu vinosti rajapintaan, jolloin tapahtuu vino heijastus ja taittuminen. Emme tarkastele tätä yksityiskohdaisesti, mutta toteamme, että tällöin Maxwellin yhtälöt tuottavat tutut heijastumista ja taittumista koskevat lainalaisuudet. Näiden mukaan tulokulma on yhtä suuri kuin heijastuskulma

$$(6.145) \quad \theta_1 = \theta'_1.$$

Toinen laki koskee aaltojen taittumista rajapinnalla. Tämä laki on Snellin⁹ laki, jonka mukaan

$$(6.146) \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

missä θ_1 on tulokulma, θ_2 taittuneen aallon taittumiskulma ja $n_i = \sqrt{\epsilon_i \mu_i / (\epsilon_0 \mu_0)}$ on taitekerroin (kuva 6.3). Vinossa heijastuksessa heijastuskerroin ja läpäisi-



Kuva 6.3: Tasoallon taittuminen ja heijastuminen kahden eristeen rajapinnalla.

sykerroin riippuvat myös kulmista θ_1 ja θ_2 .

Mainittakoon, että myös erilaiset valon polarisaatioon liittyvät ilmiöt ovat selitettävissä Maxwellin yhtälöiden avulla. Emme perehdy tarkemmin tasoaaltojen käyttäytymiseen erilaisissa tilanteissa. Todettakoon kuitenkin vielä

⁹Willebrord (Snell van Roijen) Snellius (1591–1626), hollantil. matemaatikko.

lopuksi, että myös kideoptiikan ilmiöt ovat täysin johdettavissa Maxwellin yhtälöistä. Niinpä esimerkiksi metallisten malmimineraalien läpinäkymättömyys eli opaakisuus ohuthieissä johtuu yksinkertaisesti siitä, että niiden suuri sähkönjohtavuus aiheuttaa kentän vaimenemisen jo hyvin lyhyellä matkalla. Siksi valo eli sähkömagneettinen säteily ei pääse niiden läpi.

6.4.2 Värähtelevä sähköinen dipoli

Tarkastelimme edellä tasoaltokenttää kiinnittämättä huomiota siihen, mikä on kentän lähde eli miten kenttä on syntynyt. Totesimme ainoastaan, että kentän lähde on hyvin kaukana, jolloin sen muoto on ainakin paikallisesti tasomainen. Seuraavaksi kiinnitämme huomion itse sähkömagneettisiin säteilylähteisiin. Säteilylähteiden kentät toimivat geofysiikassa useimmiten primaarilähteinä. Tarkastelemme ensimmäiseksi värähtelevää sähköistä dipolia, joka on yksinkertaisin säteilylähde. Sähköinen dipoli vastaa suorassa virtajohtimen alkiossa olevan sinimuotoisesti vaihtelevan virran aikaansaa-
maa kenttää, kun virtajohtimen pituus (eli dipolin pituus) on huomattavasti pienempi kuin aallonpituus. Ennen kuin esitämme dipolin säteilykentän, tarkastelemme sen määrittämistä yleisellä tasolla.

Viivästyneet potentiaalit

Sähkömagneettinen säteily syntyy kiihtyvässä liikkeessä olevista varauksista. Oletamme kuitenkin, että varausten nopeus on huomattavasti pienempi kuin valonnopeus, jolloin ei tarvita suhteellisuusteoreettista tarkastelua. Osoittautuu, että säteilykenttä kannattaa määrittää potentiaalifunktioiden ϕ ja \mathbf{A} avulla. Olemme jo aiemmin johtaneet potentiaalien differentiaaliyhtälöt (6.60) ja (6.58). Potentiaaleja sitoo toisiinsa Lorenzin ehto (6.57). Tarkastelu tehdään tyhjiötä vastaavassa kokoavaruudessa, jolloin $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.

Yhtälön (6.60) yleinen ratkaisu on ns. *viivästynyt skalaaripotentiaali*

$$(6.147) \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

missä $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ on viivästynyt aika. Viivästynyt potentiaali tulee ymmärrettäväksi sen kautta, että sähkömagneettinen signaali tarvitsee tietyn ajan kulkeakseen lähdealueesta kenttäpisteeseen. Toisin sanoen lähdealueessa ajanhetkellä t' pisteessä \mathbf{r}' olevan varauksen potentiaali vaikuttaa kenttäpisteessä hieman myöhemmin ajanhetkellä t , koska signaalin täytyy ensin ehtiä kulkea varausalueesta eli lähdealueesta kenttäpisteeseen. Tähän tarvitaan aika $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$.

Vastaavasti viivästynyt vektoripotentiaali on

$$(6.148) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

On hyödyllistä verrata viivästyneitä potentiaaleja staattisen tilanteen potentiaaleihin ja todeta, että lausekkeet ovat muodoltaan aivan samat.

Suoraan laskemalla on todettavissa, että viivästyneet potentiaalit (6.147) ja (6.148) toteuttavat Lorenzin ehdon (6.57).

Väpähtelevän sähköisen dipolin kenttälausekkeen johto

Harmonisesti väpähtelevä sähköinen dipoli tarkoittaa dipolia, jonka dipolimometti \mathbf{p} muuttuu ajan funktiona sinimuotoisesti. Sähköisen dipolin säteilykenttä johdetaan lähtien viivästyneitten potentiaalien lausekkeista (6.147) ja (6.148), joiden jälkeen itse kentät voidaan laskea jo aiemmin esitetyistä yhtälöistä

$$(6.149) \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

ja

$$(6.150) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Lähdemme liikkeelle mielivaltaisesta liikkuvien varausten jakaumasta eli varaus-virta-jakaumasta. Tavoitteena on kehittää potentiaalien lausekkeet multipolikehitelmäksi ja ottaa niistä dipolia vastaava termi. Sijaitkoon varaussysteemi $\rho(\mathbf{r}', t')$ siten, että origo sijaitsee sen sisällä. Kun laskentapisteemme on kaukana varausjakaumasta ($r \gg r'$), voidaan kirjoittaa approksiimaatio

$$(6.151) \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}.$$

Tällöin viivästynyt potentiaali (6.147) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(6.152) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/(cr))}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r} dV'. \end{aligned}$$

Kun käytetään binomiteoreemaa, voidaan etäisyystermille kirjoittaa approksimaatio

$$(6.153) \quad \left(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} \right)^{-1} \approx r^{-1} + r^{-2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}.$$

Taylorin sarjan avulla voidaan puolestaan approksimoida varausjakaumaa ρ ajan funktiona

$$(6.154) \quad \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) \approx \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}', t - r/c}.$$

Sijoittamalla nämä approksimaatiot lausekkeeseen (6.152) ja ottamalla mukaan vain dipolia vastaavat termit saadaan

$$(6.155) \quad \begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) \approx & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2 c} \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{r}' \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV'. \end{aligned}$$

Ensimmäinen integraali yhtälössä (6.155) on varaussysteemin kokonaisvaraus Q . Toinen ja kolmas integraali vastaavat varausjakauman sähköistä dipolimomenttia \mathbf{p} . Kun merkitään $\dot{\mathbf{p}} \equiv d\mathbf{p}/dt$, voidaan varausjakauman potentiaalille kirjoittaa

$$(6.156) \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t - r/c)}{cr^2} \right].$$

Vastaavalla tavalla saadaan viivästyneelle vektoripotentiaalille \mathbf{A} lähtien approksimaatiosta (6.151) ja ottamalla mukaan vain dipolia vastaava termi

$$(6.157) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - r/c + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/(cr))}{r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r} dV' \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_V \mathbf{J} \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \right) dV' \end{aligned}$$

Koska

$$(6.158) \quad \int_V \mathbf{J} dV' = \dot{\mathbf{p}},$$

voidaan yhtälö (6.157) saattaa muotoon

$$(6.159) \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

On huomattava, että skalaaripotentiali (6.156) saadaan myös vektoripotentialin (6.159) ja Lorenzin ehdon (6.57) avulla.

Huomautus. Relatio (6.158) ei ole itsestään selvä. Dimensiotarkastelulla sen voi todeta mahdolliseksi. Varsinainen todistus perustuu identiteetin $\int_V \mathbf{J} dV' = \oint_S \mathbf{r}' \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS' - \int_V \mathbf{r}' \nabla' \cdot \mathbf{J} dV'$ sekä relaation $\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho dV'$ hyväksikäyttöön, kun lisäksi huomioidaan, että $\mathbf{J} = 0$ pinnalla S . ■

Koska nyt olemme saaneet selville skalaaripotentialin ja vektoripotentialin, voidaan itse kentät määrittää yhtälöiden (6.149) ja (6.150) avulla.

Muodostamme seuraavaksi $-\nabla\phi$:n. Dipolin kokonaisvaraus $Q = 0$, joten ϕ :n lausekkeeseen (6.156) jää kaksi termiä. Käytetään hyväksi vektori-identiteettiä (2.113). Tällöin saadaan

$$(6.160) \quad -\nabla\phi = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \nabla\dot{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}) + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla\mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{cr^2} + \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right].$$

Muodostetaan seuraavaksi $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ yhtälöstä (6.159). Saadaan

$$(6.161) \quad -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\mathbf{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right).$$

Lasketaan yhteen (6.160) ja (6.161) ja huomioidaan, että $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$. Tällöin saadaan vektorianalyysiä huolellisesti soveltaen sekä vektorikolmitulon kehityskaavaa (2.26) käyttäen seuraavat osakentät

$$(6.162) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3,$$

missä \mathbf{E}_1 muodostuu yhtälön (6.161) mukaisesta termistä sekä kahdesta ensimmäisestä yhtälön (6.160) termistä

$$(6.163) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \nabla\dot{\mathbf{p}} + \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{p}}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \ddot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2 r} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \ddot{\mathbf{p}} \right) \end{aligned}$$

ja \mathbf{E}_2 yhtälön (6.160) kolmännesta, neljännessä ja viidennestä termistä

$$(6.164) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \nabla\mathbf{p} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times (\nabla \times \mathbf{p}) + \dot{\mathbf{p}} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} - \dot{\mathbf{p}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{cr^2} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \end{aligned}$$

sekä \mathbf{E}_3 yhtälön (6.160) viimeisestä termistä

$$(6.165) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_3 &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left[\mathbf{p} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[3 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{p} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \times \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{p} \right) + 2 \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{p} \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \end{aligned}$$

Edellä on huomattava, että $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t - r/c)$. Näin ollen nablän kohdistuminen \mathbf{p} :n sisältäviin lausekkeisiin edellyttää derivointia muuttujan $(t - r/c)$ suhteen. Niinpä

$$(6.166) \quad \nabla \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \quad \text{ja} \quad \nabla \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r}$$

sekä

$$(6.167) \quad \nabla \times \mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} \quad \text{ja} \quad \nabla \times \dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r}.$$

Edelleen \mathbf{p} :n ja $\dot{\mathbf{p}}$:n derivaatalle r :n suhteen pätee (ketjuderivointi!)

$$(6.168) \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{p}} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{p}}}{\partial r} = -\frac{1}{c} \ddot{\mathbf{p}},$$

koska myös $\dot{\mathbf{p}}$ on funktio $(t - r/c)$:stä.

Olkoon pistemäinen dipoli, jonka dipolimomentti on \mathbf{p} , z -akselin suuntainen (kuva 6.4), jolloin sen dipolimomentti on muotoa:

$$(6.169) \quad \mathbf{p} = p \mathbf{e}_z e^{j\omega t}.$$

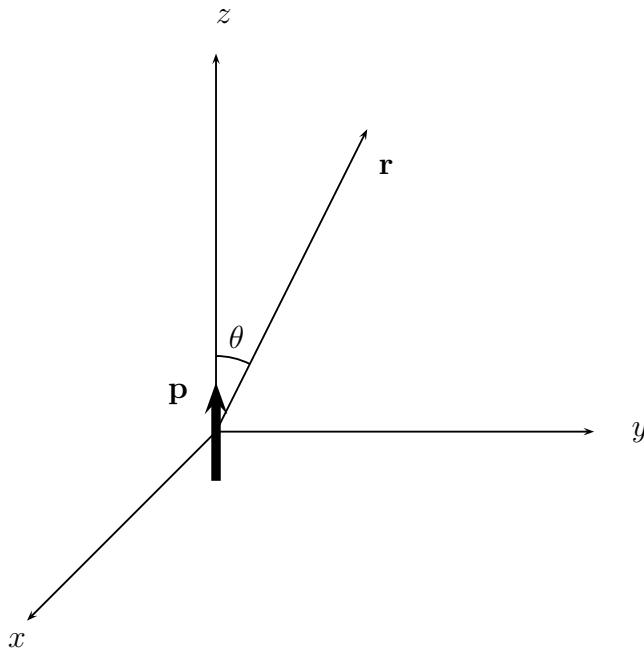
Tällöin

$$(6.170) \quad \mathbf{p}(t') = p \mathbf{e}_z e^{j(\omega t - kr)},$$

missä aaltoluku $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega/c$. Sijoitetaan pallokoordinaatiston origo dipolin keskipisteeseen. Tällöin sähkökentällä \mathbf{E} on yhtälöiden (6.163)-(6.165) mukaan pallokoordinaatiston \mathbf{e}_θ -yksikkövektorin ja \mathbf{e}_r -yksikkövektorin suuntaiset komponentit

$$(6.171) \quad E_\theta = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[-\frac{1}{kr} + j \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right] e^{j(\omega t - kr)}$$

$$(6.172) \quad E_r = \frac{pk^3}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos \theta \left[j \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right] e^{j(\omega t - kr)}.$$



Kuva 6.4: Värähtelevä sähköinen dipoli.

Magneettikenttä \mathbf{B} on puolestaan \mathbf{e}_φ -yksikkövektorin suuntainen, kuten jo yhtälöstä (6.159) voidaan päätellä, kun muodostetaan \mathbf{A} :n roottori. Magneettikenttä ja sähkökenttä ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja niiden ristitulo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ osoittaa kentän etenemissuuntaan eli aaltoluvun \mathbf{k} suuntaan. Sähköisen dipolin tapauksessa ollaan kiinnostuneita sen sähkökentästä, joten magneettikenttää ei tarkastella enempää.

Värähtelevän sähköisen dipolin kenttä muodostuu siis eri osista. Kenttä \mathbf{E}_1 on *säteilykenttä*, joka käyttäytyy kuten $1/r$. Kenttä \mathbf{E}_3 on muodoltaan sama kuin *staattisen dipolin kenttä*. Se käyttäytyy kuten $1/r^3$. Kenttä \mathbf{E}_2 on vaihettumiskenttä, jota kutsutaan *induktiokentäksi*. Yhtälöissä (6.171) ja (6.172) kentän osat on ilmoitettu $1/r$:n kasvavien potenssien mukaan järjestettynä. Huomataan, että säteilykenttä dominoi, kun $kr \gg 1$. Säteilykenttä on muodoltaan palloaalto kaukana dipolista. Vastaavasti staattinen kenttä dominoi, kun $kr \ll 1$. Toisin sanoen lähellä dipolia on staattinen dipolikenttä.

Sähkökenttien suunnan osalta voidaan todeta, että kaikilla osakentillä \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 ja \mathbf{E}_3 on poikittainen komponentti \mathbf{e}_θ -suunnassa, joka on kohtisuorassa \mathbf{e}_r :ää eli \mathbf{r} :ää vastaan ja joka sijaitsee \mathbf{r} :n ja \mathbf{p} :n määräämässä tasossa. Sätei-

lykettä \mathbf{E}_1 on vain poikittainen, mutta \mathbf{E}_2 :lla ja \mathbf{E}_3 :lla on lisäksi pitkittäinen komponentti \mathbf{e}_r :n suunnassa.

Geofysiikan sovelluksia silmällä pitäen staattinen lähialue on keskeisin, koska matalista taajuuksista aiheutuva aallonpituus on huomattavasti suurempi kuin dipolin pituus.

Huomaamme, että dynaamisen kenttäprobleemin, tässä tapauksessa värähtelevän sähköisen dipolin ratkaisun löytäminen ei ole aivan helppo tehtävä. On hyvä kiinnittää huomiota sarjojen käyttöön tämän tyyppisten fysikaalisten tehtävien ratkaisemisessa.

On syytä vielä todeta, että säteilyprobleemien tulee täyttää äärettömyydessä ns. Sommerfeldin¹⁰ säteilyehto, joka potentiaalille ϕ kirjoitettuna on muotoa

$$(6.173) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + jk\phi \right) = 0.$$

6.4.3 Värähtelevä magneettinen dipoli

Edellä käsiteltyä sähköistä dipolia yleisempi lähde geofysiikassa on värähtelevä magneettinen dipoli. Magneettinen dipoli muodostuu esimerkiksi ympärävirtasilmukassa kulkevasta sinimuotoisesti vaihtelevasta virrasta. Dipolimomentin suuruus on virta kertaa silmukan pinta-ala ja suuntana pinta-alavektorin suunta. Ympyrävirtasilmukkoja käytetään esimerkiksi slingrammenetelmässä sekä monissa muissakin induktiivisissa luotausmenetelmissä.

Sijoittamalla pallokoordinaatiston origo magneettiseen dipoliin siten, että dipolimomentin suunta on z -akselin suunnassa ($\mathbf{m} = m\mathbf{e}_z e^{j\omega t}$) (kuva 6.5), voidaan periaatteessa vastaavantyyppisellä analyysillä kuin edellä sähköiselle dipolille johtaa seuraavat lausekkeet magneettivuon tiheydelle

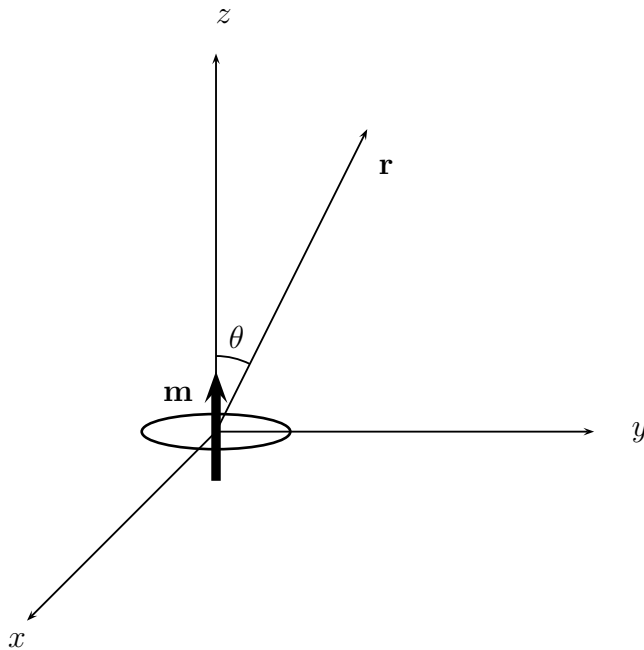
$$(6.174) \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m k^3}{4\pi} \sin \theta \left[-\frac{1}{kr} + j \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right] e^{j(\omega t - kr)}$$

ja

$$(6.175) \quad B_r = \frac{\mu_0 m k^3}{4\pi} 2 \cos \theta \left[j \frac{1}{(kr)^2} + \frac{1}{(kr)^3} \right] e^{j(\omega t - kr)}.$$

Nämä lausekkeet saadaan kuitenkin helpoiten suoraan sähköisen dipolin ja magneettisen dipolin välisen analogian perusteella, kun yhtälöissä (6.171) ja (6.172) E_θ korvataan B_θ :lla ja vastaavasti E_r B_r :llä sekä \mathbf{p} \mathbf{m} :llä ja lopuksi vielä kerroin $1/(4\pi\epsilon_0)$ kertoimella $\mu_0/(4\pi)$.

¹⁰Arnold Sommerfeld (1868–1951), saks. fyysikko.

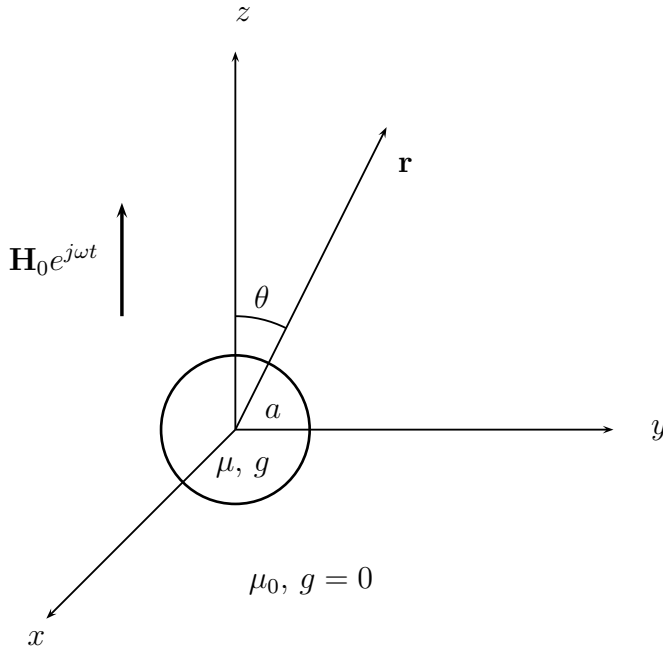


Kuva 6.5: Värähtelevä magneettinen dipoli.

6.4.4 Johtava ja permeaabeli pallo homogeenisessa harmonisesti värähtelevässä magneettikentässä

Varsinaisena reuna-arvotekävänä tarkastelemme tilannetta, jossa pallo, jolla on sekä sähkönjohtavuus g että magneettinen permeabiliteetti μ , sijaitsee homogeenisessa ajan suhteen harmonisesti värähtelevässä magneettikentässä. Pallon ulkopuolinen avaruus on tyhjiötä vastaava kokoavaruus. Kentän värähtelytaajuus on alhainen eli aallonpituus on suuri, jolloin Maxwellin yhtälöiden siirrosvirtatermi jätetään huomiotta. Probleemi on siten induktiokentän eli pyörrevirtojen laskentatehtävä. Merkitään suureita pallon ulkopuolella indeksillä 1 ja sisäpuolella indeksillä 2.

Sijoitetaan pallokoordinaatiston origo a -säteisen pallon keskipisteeseen ja pallokoordinaatiston polariakselin (z -akselin) suunta homogeenisen kentän suuntaan (kuva 6.6). Kentän suunta vaihtelee positiivisen z -akselin ja negatiivisen z -akselin suunnan välillä taajuuden tahdissa kentänvoimakkuuden saadessa välillä arvon nolla. Muuttuva magneettikenttä eli primaarikenttä aikaansaa johtavassa pallossa pyörrevirtoja, jotka puolestaan synnyttävät sekundaarisen magneettikentän. Probleemilla on ilmeinen aksiaalisymmetria.



Kuva 6.6: Johtava ja permeaabeli pallo homogeenisessa harmonisesti muuttuvassa magneettikentässä.

Fysikaalisen intuition perusteella voidaan päätellä, että pyörrevirrat ovat xy -tason suuntaisia virtoja kentän vaihdellessa z -akselin suunnassa. Näin ollen sähkökentällä, virrantiheydellä ja vektoripotentialilla \mathbf{A} on ainoastaan pallokoordinaatiston \mathbf{e}_φ -yksikkövektorin suuntainen komponentti. Sen sijaan magneettikentän voimakkuudella ja magneettivuon tiheydellä on komponentit suunnissa \mathbf{e}_r ja \mathbf{e}_θ . Tästä syystä on hyödyllistä etsiä ratkaisua vektoripotentialin avulla.

Primaarikenttä on

$$(6.176) \quad \mathbf{H}^P = \mathbf{H}_0 e^{j\omega t} = (H_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - H_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta) e^{j\omega t},$$

joka voidaan edelleen kirjoittaa pallokoordinaatistossa muotoon

$$(6.177) \quad \mathbf{H} = \nabla \times \left(\frac{1}{2} H_0 r \sin \theta \right) \mathbf{e}_\varphi e^{j\omega t}.$$

Tästä muodosta nähdään, että homogeeninen, harmonisesti värähtelevä primaarikenttä $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$ saadaan vektoripotentialista

$$(6.178) \quad \mathbf{A}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0 r \sin \theta e^{j\omega t} \mathbf{e}_\varphi,$$

koska $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$.

Maxwellin I yhtälön (6.12) mukaan

$$(6.179) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ja Maxwellin II yhtälön mukaan voidaan LIH-aineessa kirjoittaa, kun siirrosvirta jätetään huomiotta

$$(6.180) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Valitaan $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (Lorenzin ehdon (6.63) skalaaripotentiali ϕ valitaan nollassi, koska sitä ei tarvita pyörrevirtaprobleemissa). Sähkökentälle voidaan siten kirjoittaa

$$(6.181) \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

jolloin Ohmin lain mukaan pyörrevirrantiheydelle pätee

$$(6.182) \quad \mathbf{J} = -g \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Yhtälöstä (6.180) seuraa siten, että vektoripotentiali \mathbf{A} toteuttaa pallossa diffuusioyhtälön

$$(6.183) \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \mu g \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0.$$

Tähän olisimme päässeet suoraankin yhtälöstä (6.64) jättämällä huomiotta siirrosvirtatermistä aiheutuvan toisen kertaluvun osittaisderivaattatermin, koska oletuksemme mukaan $g \gg \omega\epsilon$. Pallon ulkopuolella, missä $g = 0$, vektoripotentiali toteuttaa vektoriaalisen Laplacen yhtälön

$$(6.184) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = 0.$$

Probleemin symmetrisyyden perusteella voidaan siis päätellä, että vektoripotentiali on muotoa

$$(6.185) \quad \mathbf{A} = A(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi,$$

joka on karteesisessa koordinaatistossa

$$(6.186) \quad \mathbf{A} = -A \sin \varphi \mathbf{e}_x + A \cos \varphi \mathbf{e}_y.$$

Seuraavaksi kirjoitamme ∇^2 -operaattorin kohdistettuna \mathbf{A} :n suorakulmaisein karteesisiin koordinaatteihin (6.186):

$$(6.187) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A) \mathbf{e}_\varphi + A \nabla^2 \mathbf{e}_\varphi = \left(\nabla^2 A - \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi,$$

jolloin vektoriaalinen diffuusioyhtälö (6.183) saa skalaarisen muodon

$$(6.188) \quad \nabla^2 A - \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} = \mu g \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Tämä yhtälö on voimassa pallon sisäpuolella. Pallon ulkopuolella on oltava voimassa vektoriaalista Laplacen yhtälöä (6.184) vastaava skalaariyhtälö

$$(6.189) \quad \nabla^2 A - \frac{A}{r^2 \sin^2 \theta} = 0.$$

Pallon pinnalla ($r = a$) ovat yhtälöiden (6.96) ja (6.86) mukaisesti magneetikentän voimakkuuden tangentialikomponentti ja magneettivuon tiheyden normaalikomponentti jatkuvia. Myös \mathbf{A} :lla on oma rajapintakäyttäytyminen. Koska $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, voidaan Stokesin lauseen avulla päätellä, että \mathbf{A} :n tangentialikomponentin on oltava jatkuva edellyttäen, että \mathbf{B} on kaikkialla rajapinnalla äärellinen

$$(6.190) \quad A_{1t} = A_{2t}.$$

Myös \mathbf{A} :n normaalikomponentin on oltava jatkuva. Tämä nähdään \mathbf{A} :lle asetetusta lisäehdosta $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, josta Gaussin lauseen avulla voidaan päätellä, että

$$(6.191) \quad A_{1n} = A_{2n}.$$

Huomattakoon, että $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ vain kun ϕ valitaan nollassa Lorenzin ehdossa (6.63). Vektoripotentiaali on siis tässä tapauksessa vektorina jatkuva rajapinnalla $r = a$.

Yhtälön (6.188) yleinen ratkaisu löytyy muuttujien separointimenetelmällä, kun siihen sijoitetaan yrite

$$(6.192) \quad A(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)e^{j\omega t}.$$

Tällöin saadaan pallokoordinaatistossa

$$(6.193) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{Rr} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\Theta r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{\Theta r^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} = j\omega g \mu.$$

Kerrotaan yhtälö puolittain r^2 :lla ja siirretään oikeanpuolen termi vasemmalle puolelle, jolloin päädytään yhtälöön

$$(6.194) \quad \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - j\omega g \mu r^2 + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} = 0.$$

Merkitsemällä r :stä riippuva osa yhtäsuureksi kuin $n(n+1)$ ja θ :sta riippuva osa yhtäsuureksi kuin $-n(n+1)$ saadaan yhtälö (6.194) toteutumaan kaikilla r :n ja θ :n arvoilla.

Yhtälö (6.188) separoituu siten kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi

$$(6.195) \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \left[s^2 + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] R = 0$$

ja

$$(6.196) \quad (1-u^2) \frac{d^2 \Theta}{du^2} - 2u \frac{d\Theta}{du} - \left[\frac{1}{(1-u^2)} - n(n+1) \right] \Theta = 0,$$

missä $u = \cos \theta$, $s^2 = j\omega \mu g$ ja n on separointivakio. Yhtälö (6.195) on ns. modifioitu Besselin yhtälö ja yhtälö (6.196) ns. Legendren liitännäisyhtälö. Näiden ratkaisut ovat erikoisfunktioita. Yhtälön (6.196) ratkaisu on Legendren liitännäisfunktio $P_n^1(u)$ ja yhtälöllä (6.195) on kaksi ratkaisua, kun $s \neq 0$

$$(6.197) \quad r^{-1/2} I_{n+1/2}(sr) \quad \text{ja} \quad r^{-1/2} I_{-n-1/2}(sr),$$

missä $I_{n+1/2}$ ja $I_{-n-1/2}$ ovat modifioituja ensimmäisen lajin Besselin funktioita.

Tarvitsemme seuraavassa Legendren liitännäisfunktion, kun $n = 1$. Tämä funktio on

$$(6.198) \quad P_1^1(u) = (1-u^2)^{1/2} = \sin \theta.$$

Modifioidut Besselin funktiot kertalukua ν saadaan tavallisista reaalista ensimmäisen lajin Besselin funktioista (2.224) sijoittamalla argumentiksi jx

$$(6.199) \quad I_\nu(x) = j^{-\nu} J_\nu(jx), \quad j = \sqrt{-1}.$$

Emme tutustu modifioitujen Besselin funktioiden yksityiskohtiin, vaan tyydymme esittämään niitä koskevia matemaattisia relaatioita.

Pallon ulkopuolella, missä $s = 0$, yhtälöä (6.195) vastaa yhtälö

$$(6.200) \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0,$$

jonka ratkaisu on

$$(6.201) \quad R(r) = Cr^n + Dr^{-(n+1)},$$

missä C ja D ovat rajapintaehdoista ja reunaehdoista määritettäviä vakioita.

Pallon ulkopuolella vaikuttavat sekä primaarikenttä että sekundaarikenttä, jonka tulee hävitä äärettömyydessä. Primaarikentän vektoripotentialiaali voidaan kirjoittaa Legendren liitännäisfunktion avulla

$$(6.202) \quad A_0 = \frac{1}{2}\mu_0 H_0 r \sin \theta e^{j\omega t} = \frac{1}{2}B_0 r P_1^1(u) e^{j\omega t}.$$

Lisätään tähän pallon ulkopuolisesta ratkaisusta (6.201) termi, jossa $n = 1$ ja joka häviää äärettömyydessä ($C = 0$), jolloin saadaan pallon ulkopuoliseksi vektoripotentialiksi

$$(6.203) \quad \mathbf{A}_1 = \frac{1}{2} B_0 r P_1^1(u) e^{j\omega t} \mathbf{e}_\varphi + Dr^{-2} P_1^1(u) e^{j\omega t} \mathbf{e}_\varphi.$$

Pallon sisäpuoliseksi ratkaisuksi hyväksytään ainoastaan ei-singulaariset termit ratkaisusta (6.197), kun $n = 1$. Vektoripotentialiksi pallon sisäpuolella voidaan siten kirjoittaa

$$(6.204) \quad \mathbf{A}_2 = F P_1^1(u) r^{-1/2} I_{3/2}(sr) e^{j\omega t} \mathbf{e}_\varphi.$$

Tässä on siis huomattava, että $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-1/2} I_{3/2}(sr)$ on äärellinen (rajalla sen arvoksi tulee 0).

Muodostetaan seuraavaksi magneettivuon tiheys vektoripotentialista $\mathbf{A} = A(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$ ottamalla siitä roottori pallokoordinaatistossa. Yhtälön (2.101) mukaan saadaan yleinen lauseke

$$(6.205) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) \mathbf{e}_\theta.$$

Tästä nähdään, että rajapinnalla $r = a$ \mathbf{B} :n normaalikomponentti eli \mathbf{e}_r :n suuntainen komponentti on

$$(6.206) \quad B_n = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A)$$

ja vastaavasti tangentialikomponentti eli \mathbf{e}_θ :n suuntainen komponentti on

$$(6.207) \quad B_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA).$$

Lisäksi jo aiemmin päädyimme tulokseen, että vektoripotentialiaali on jatkuva rajapinnalla $r = a$

$$(6.208) \quad \mathbf{A}_1(a, \theta) = \mathbf{A}_2(a, \theta).$$

Koska vektoripotentiaalilla on ainoastaan \mathbf{e}_φ :n suuntainen eli pallopinnan tangentin suuntainen komponentti, saamme vektoripotentiaalin jatkuvuudesta vain yhden ehdon. Toiseksi ehdoksi valitaan magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentin jatkuvuus. Voisimme vaihtoehtoisesti valita toiseksi ehdoksi myös \mathbf{B} :n normaalikomponentin jatkuvuuden, mutta tämä on oleellisesti sama kuin vektoripotentiaalin jatkuvuusehto eikä sen käyttö tuo siten mitään uutta. Sovelletaan siis seuraavaksi rajapintaehtoa (6.190) tai yleisemmin (6.208) ja magneettikentän voimakkuuden tangentialikomponentin jatkuvuusehtoa

$$(6.209) \quad \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} (rA_1) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} (rA_2).$$

Saadaan kaksi yhtälöä

$$(6.210) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} B_0 a + D a^{-2} &= F a^{-1/2} I_{3/2}(sa) \\ \frac{1}{\mu_0} (B_0 a - D a^{-2}) &= \frac{1}{2\mu} F a^{-1/2} [I_{3/2}(sa) + 2sa I'_{3/2}(sa)]. \end{aligned}$$

Modifioitujen Besselin funktioiden derivaatalle pätee seuraava relaatio, jota voidaan käyttää myös rekursiokaavana

$$(6.211) \quad I'_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x).$$

Yhtälöryhmä (6.210) voidaan edelleen saattaa tämän avulla muotoon

$$(6.212) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} B_0 a + D a^{-2} &= F a^{-1/2} I_{3/2}(sa) \\ \frac{\mu}{\mu_0} (B_0 a - D a^{-2}) &= F a^{-1/2} [sa I_{1/2}(sa) - I_{3/2}(sa)]. \end{aligned}$$

Näiden yhtälöiden avulla voidaan ratkaista kertoimet D ja F .

Koska olemme kiinnostuneita ratkaisusta pallon ulkopuolella, esitämme ainoastaan kertoimen D ratkaisun eliminoimalla F :n

$$(6.213) \quad D = \frac{B_0 a^3 (\mu/\mu_0)(2 - G)}{2 (\mu/\mu_0) + G},$$

missä kompleksinen kerroin G on

$$(6.214) \quad G = \frac{sa I_{1/2}(sa) - I_{3/2}(sa)}{I_{3/2}(sa)}.$$

Muodostetaan seuraavaksi pallon ulkopuolisen vektoripotentialin

$$\mathbf{A}_1 = \left(\frac{1}{2} B_0 r + \frac{D}{r^2} \right) P_1^1(\cos \theta) e^{j\omega t} \mathbf{e}_\varphi$$

roottori, jolloin saadaan

$$(6.215) \quad \mathbf{B}_1 = \left(B_0 \cos \theta \mathbf{e}_r - B_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \frac{2D \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{D \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta \right) e^{j\omega t}$$

Edelliset kaksi termiä muodostavat primaarikentästä tulevan osuuden ja jälkimmäiset kaksi termiä vastaavat värähtelevän magneettisen dipolin kenttää. Dipolin suunta on pallokoordinaatiston polaariakselin suunta.

Tarkasteltakoon lähemmin tapausta, jossa $\mu = \mu_0$. Tällöin kerroin D (6.213) saa muodon

$$(6.216) \quad D = \frac{B_0 a^3}{2} \frac{2 - G}{1 + G}.$$

Kun otetaan käyttöön relaatiot

$$(6.217) \quad I_{1/2}(sa) = \sqrt{\frac{2}{\pi sa}} \sinh(sa)$$

ja

$$(6.218) \quad I_{-1/2}(sa) = \sqrt{\frac{2}{\pi sa}} \cosh(sa)$$

ja käytetään rekursiokaavaa (6.211), saadaan kertoimeksi D tässä tapauksessa

$$(6.219) \quad D = \frac{B_0 a^3}{2} \left[\frac{3}{sa} \coth(sa) - \frac{3}{(sa)^2} - 1 \right].$$

Huomaamme, että jo tällainen yksinkertainen probleemi johtaa dynaamisessa tapauksessa varsin vaativan matematiikan käyttöön. Tätä probleemia yleisempi tilanne olisi sellainen, missä myös ympäröivällä väliaineella olisi sähkönjohtavuutta. Myös tämä probleemi voidaan ratkaista analyyttisesti, joskin, kuten arvata saattaa, huomattavasti työläämmin.

6.4.5 Loppuhuomautus sähködynaamisista problemeista

Olemme sähködynamiikassa tyytyneet lähinnä esittelemään ja perustelemaan probleemien ratkaisemisessa tarvittavat yhtälöt. Sen sijaan yleisten probleemien ratkaisemiseen ei ole mahdollisuuksia tässä esityksessä, koska, kuten edellä jo näimme, geometrialtaan ja primaarilähdekentiltään hyvinkin yksinkertaiset probleemit ovat matemaattisesti varsin hankalia.

Sähködynamiikan probleemien ratkaiseminen joudutaankin useimmiten tekemään erilaisia numeerisia ja approksimatiivisia menetelmiä käyttäen.

Todettakoon, että kuvalähdeperiaatetta voidaan käyttää myös tiettyjen sähködynamiikan rajapintaprobleemien käsittelyssä korvaamalla rajapinta sopivalla peililähteellä.

Edellä palloprobleemissa tarkastelimme tilannetta, jossa primaarikenttä on homogeeninen. Geofysiikan kannalta yleisempi ongelma olisi sellainen, jossa primaarikenttä on värähtelevä magneettinen dipoli. Tämän probleemin analyttinen ratkaiseminen on matemaattisesti hyvin vaativa tehtävä.

Tähän päättyy esityksemme sähködynamiikasta. Sähködynamiikan myötä päätämme samalla myös geofysiikan kenttäteorian sähkömagnetismiin liittyvän osuuden. Olemme huomanneet, miten muutamasta kokeellisesta ja empiirisestä peruslaista (kuten Coulombin laki, Ampèren voimalaki, Faradayn induktiolaki, varauksen säilymislaki) voidaan formuloida koko makroskooppinen sähkömagneettinen kenttäteoria. Sähkömagneettinen kenttäteoria voidaan tiivistetyksi esittää neljän differentiaaliyhtälön avulla, joita kutsutaan Maxwellin yhtälöiksi.

Sähkömagneettisessa kenttäteoriassa vektorianalyysi osoittaa todellisen voimansa. Vaikka edellä on 'pyöritetty' nablaa monella tavalla, sen ei saa antaa hämärtää käsiteltyjen asioiden hyvin konkreettista luonnetta. Sähkömagneettiset kentät ovat erottamaton osa geofysiikan kenttäteoriaa.

Luku 7

Painovoima

Maan painovoimakenttä muodostuu gravitaatiovoiman eli vetovoiman, maapallon pyörimisestä aiheutuvan keskipakovoiman ja muiden taivaankappaleiden yhteisvaikutuksesta. Painovoimakenttä on geofysiikan keskeisimpiä tutkimuskohteita. Sovelletussa geofysiikassa painovoimakentän mittauksilla voidaan selvittää maankamaran tiheysvaihteluita. Globaaligeofysiikassa painovoimatutkimukset liittyvät paitsi laaja-alaisten geologisten rakenteiden tutkimukseen myös geodesiaan, jonka tutkimuskohteena ovat maapallon muoto, vuoksi-luode-ilmiö ja myös mm. maankuoren liikunnot.

Gravitaatio on heikoin neljästä luonnon perusvuorovaikutuksesta, mutta kantamaltaan suurin. Edellisissä luvuissa tarkastelimme jo sähkömagneettista vuorovaikutusta. Näiden lisäksi on kaksi muuta vuorovaikutusta eli vahva ja heikko vuorovaikutus, joilla on äärimmäisen lyhyt kantama, ja siksi ne tulevat näkyviin vasta ydin- ja hiukkasfysiikan ilmiöissä. Sen sijaan gravitaatio hallitsee koko maailmankaikkeuden rakennetta ja kehitystä.

7.1 Painovoimakentän kenttäyhtälöt

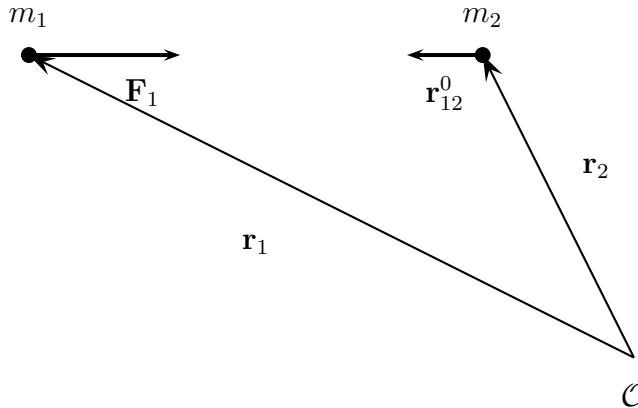
7.1.1 Newtonin vetovoimalaki

Gravitaatiokentän määrittelyyn geofysiikassa riittää Newtonin¹ vetovoimalaki. Tämän lain mukaan kaksi pistemäistä massapartikkelia vaikuttavat toisiinsa voimalla, joka on suoraan verrannollinen massapartikkeleiden massojen m_1 ja m_2 tuloon ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön. Laki on matemaattisesti esitettävissä kuvan 7.1 merkinnöin muodossa

$$(7.1) \quad \mathbf{F}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}^0,$$

¹Sir Isaac Newton (1642–1727), engl. fyysikko, geofyysikko, matemaatikko ja tähtitieteilijä.

missä \mathbf{F}_1 on massapartikkeliin m_1 kohdistuva voima, r_{12} massapartikkeleiden välinen etäisyys $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ja \mathbf{r}_{12}^0 yksikkövektori, joka osoittaa vaikutussuoran suunnan massapartikkelista m_2 massapartikkeliin m_1 . Massapartikkeleiden välillä vaikuttaa ainoastaan vetovoima. Lausekkeessa (7.1) oleva miinus-merkki tuottaa kuvan merkintöjä käyttäen voimalle oikean suunnan. Kerroin G on yleinen gravitaatiovakio arvoltaan $G = (6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Sen yksiköksi tulee myös $\text{m}^3/(\text{kgs}^2)$, koska $\text{N} = \text{kgm}/\text{s}^2$. Yleisen gravitaatiovakiota, G , arvo on epätarkimmin tunnettu luonnonvakio. Syyinä ovat mittaustekniset ongelmat. (Itse asiassa G :n vakioisuudestakin on käyty tieteellistä debattia. Eräiden tutkimusten mukaan vakio muuttuisi hyvin hitaasti ajan funktiona.)



Kuva 7.1: Newtonin vetovoimalaki

Yhtälöstä (7.1) nähdään indeksejä vaihtamalla, että massapartikkeliin m_2 kohdistuu massapartikkelin m_1 aiheuttamana voima $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$. Toisin sanoen voiman ja vastavoiman laki pätee.

On tärkeää ymmärtää *gravitaatio* massallisen aineen *ominaisuudeksi*. Toisin sanoen *massa* on aineen ominaisuus, joka aiheuttaa vetovoiman eli gravitaation. Tämä ominaisuus on todettu olevan kaikilla aineilla. Massan SI-yksikkönä on kg. Mekaniikan tarkasteluissa esiintyvät massat voivat olla gravitaatiomassoja tai liikelakeihin ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, \mathbf{a} on kiihtyvyyttä) liittyviä hitaus- eli inertiaalimassoja. Dynamiikassa puhutaankin vastaavasti gravitaatiovoimista ja hitausvoimista. Hitausvoimilla ei ole vastavoimaa. Gravitaatiovoima on sen sijaan todellinen, fysikaaliseen vuorovaikutukseen perustuva voima.

Usean massapartikkelin voimavaikutus voidaan laskea superpositioperiaatteella eli kenttien häiriöttömällä yhteenlaskulla, jossa kunkin massapartikkelin voimavaikutus lasketaan erikseen ja lopulta summeerataan vektorio-

pillisesti kokonaisvoiman määrittämiseksi. Se, että näin voidaan menetellä, on viime kädessä kokeellinen havainto. On huomattava, että Newtonin vetovoimalaki on muodoltaan täysin vastaava kuin Coulombin sähkövarausten välistä voimaa kuvaava laki (3.5).

Huomautus. Edellä todettiin, että geofysiikassa gravitaation käsittelemiseen riittää Newtonin mekaniikka. Tähän on syytä liittää seuraava tarkennus. Newtonin gravitaatioteoriaa yleisempi teoria on Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria. Siinä gravitaatio ilmenee avaruuden geometrisena rakenteena, avaruuden kaareutumisenä. Suhteellisuusteoreettista lähestymistapaa tarvitaan hyvin suurten massakeskittymien tarkastelussa, jotka aiheuttavat avaruuden geometrisen rakenteen muuttumisen. Välttämättä ei tosin ole aina kysymys mistään kovin 'massiivisesta' tilanteesta, jossa jo joudutaan käyttämään suhteellisuusteoriaa. Kuuluisa esimerkki omassa aurinkokunnassamme on Merkuriuksen Aurinkoa lähinnä olevan pisteen eli perihelin kiertymä, joka ei täysin selity Newtonin mekaniikan mukaan, vaan vaatii suhteellisuusteoreettista tarkastelua. Geofysiikassa suhteellisuusteoreettista lähestymistapaa ei kuitenkaan tarvita. ■

Newtonin vetovoimalaki koskee pistemäisiä massapartikkeleita tai niihin redusoituvia massoja. Massajakaumien välisen vetovoiman määrittely tehdään integroimalla massajakaumien yli.

7.1.2 Massajakaumat

Jatkumon eli kontinuumin voidaan ajatella muodostuvan differentiaalisista massapartikkeleista, jotka voivat jakautua jatkuvasti tilaan eri tavoin. Tavanomaisin on massan jakautuminen tilavuuteen, jolloin jakaumaa voidaan kuvata tilavuustiheysfunktiolla ρ , yksikkönä kg/m^3 ,

$$(7.2) \quad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}.$$

Massa voi jakautua myös pinnalle, jolloin vastaava tiheysfunktio on σ , kg/m^2 , eli massan pintatiheys

$$(7.3) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS}$$

tai massa voi jakautua viivalle, jolloin vastaava tiheysfunktio on λ , kg/m , eli massan viivatiheys

$$(7.4) \quad \lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl}.$$

Edellä olevat raja-arvolausekkeet on ymmärrettävä muodostaa 'fysiikan hengessä', jotta koko raja-arvoprosessin ajan tilavuus-, pinta- ja viivaelementeissä on edustava määrä massapartikkeleita. Tämä on kontinuumimallioleluksen mukainen vaatimus.

Massajakaumat ovat yleisesti sekä paikan että ajan funktioita.

7.1.3 Gravitaatiokenttä

Gravitaatiokenttä voidaan määritellä voimavaikutuksena massapartikkelin massaa kohden. Gravitaatiokenttää luonnehtii siten suure, jota kutsutaan gravitaatiokentän kenttävoimakkuudeksi tai usein lyhyesti gravitaatiovoimaksi ja joka yhtälön (7.1) mukaan voidaan kirjoittaa

$$(7.5) \quad \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = -G \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

missä \mathbf{F}_m on pisteessä \mathbf{r} olevaan massapartikkeliin m kohdistuva voima, jonka aikaansaa pisteessä \mathbf{r}' oleva massapartikkeli m' . Huomataan, että gravitaatiovoiman yksiköksi tulee kiihtyvyyden yksikkö $\text{N/kg} = \text{m/s}^2$. Kysymys ei ole siis kuitenkaan voimasta, vaikka gravitaatiovoiman nimitys siihen viittaakin.

Painovoimakenttä muodostuu kahdesta osasta. Toinen liittyy Newtonin vetovoimalain mukaiseen gravitaatioon ja toinen maapallon pyörimisestä aiheutuvaan keskipakovoimaan. Painovoimakenttään vaikuttavat myös muut taivaankappaleet, lähinnä Kuu ja Aurinko, vuoksi-luode-ilmion muodossa. Painovoima on *vektorisuure*, ja se voidaan esittää tarvittaessa siten myös komponenttien avulla. Koska keskipakovoima voidaan laskea hyvin tarkasti ja sen osuus painovoimaan on tiedossa, on tavallista, että painovoimatarkasteluissa huomio kiinnitetään ainoastaan gravitaation aikaansaamaan osuuteen. Muiden taivaankappaleiden vaikutukset pystytään myös määrittämään hyvin tarkasti mekaniikan periaatteiden mukaan. Nämä vaikutukset ilmenivät vuoksivoimana, jonka suuruus maanpinnalla riippuu sekä ajasta että paikasta. Pyörimisliikkeen osuus sekä maapallon muodosta ja litistyneisyydestä aiheutuvat efektit otetaan huomioon kansainvälisesti vahvistetussa ns. normaalipainovoiman laskentakaavassa, johon palataan tarkemmin tuonnempana. Näin määriteltynä maapallon painovoimakentän voimakkuus voidaan käsittää vapaan putoamisen kiihtyvyydeksi.

Geofysiikassa painovoiman yksikkönä käytetään edelleenkin (valtioneuvoston päätöksiä uhmaten) vanhaa *cgs*-järjestelmän mukaista yksikköä cm/s^2 , jolle on annettu nimi gal (tai Gal)². Näin ollen $1 \text{ gal} = 1000 \text{ mgal} = 1 \text{ cm/s}^2 =$

²Yksikkö on nimetty italialaisen fyysikon ja tähtitieteilijän Galileo Galilein (1564–1642) mukaan.

10^{-2} m/s^2 . Anglosaksisessa kirjallisuudessa käytetään myös yksikköä *gu* eli *gravity unit*, jonka suuruus on $1 \text{ gu} = 0,1 \text{ mgal}$.

7.1.4 Gravitaatiopotentiaali

Koska Newtonin vetovoimalaki on $1/r^2$ -tyyppinen, on sen synnyttämä voimakenttä pyörteetön, sillä $\nabla \times (\mathbf{r}/r^3) = -\nabla \times \nabla(1/r) \equiv 0$, kuten jo myös Coulombin lain yhteydessä on todettu. Pyörteetöntä kenttää kutsutaan myös konservatiiviseksi kentäksi.

Konservatiivisen voiman \mathbf{F} potentiaalienergia U määritellään kaavalla

$$(7.6) \quad U(\mathbf{r}) = - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l},$$

missä *ref* tarkoittaa potentiaalienergian referenssitason ja \mathbf{r} laskentapolun päätepistettä. Konservatiivisessa kentässä voima on lausuttavissa potentiaalienergian gradienttina

$$(7.7) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U.$$

On huomattava, että potentiaalienergian määritelmän mukaan potentiaalienergian muutos on sama kuin voiman tekemä työ vastakkaismerkkisenä. Tämä nähdään työn määrittely-yhtälön avulla seuraavasti:

$$(7.8) \quad \begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) = -(U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)). \end{aligned}$$

Merkitään yhtälössä (7.1) massapartikkeleita $m_1 = m$ ja $m_2 = m'$ sekä vastaavia paikkavektoreita $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ ja $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'$. Tällöin yhtälön (7.6) mukaan massapartikkelin m potentiaalienergia massapartikkelin m' gravitaatiokentässä on

$$(7.9) \quad \begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= - \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} G \frac{mm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{\text{ref}}^{\mathbf{r}} Gmm' \left(-\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned}$$

Gravitaatiopotentiaali määritellään massapartikkelin potentiaalienergiaksi gravitaatiokentässä partikkelin massaa kohti vastakkaismerkkisenä. Näin ollen gravitaatiopotentiaalille \mathcal{V} voidaan kirjoittaa

$$(7.10) \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = -\frac{U(\mathbf{r})}{m},$$

jolloin gravitaatiokentän kenttävoimakkuus on lausuttavissa yhtälön (7.7) perusteella muodossa

$$(7.11) \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla\mathcal{V}(\mathbf{r}).$$

Gravitaatiopotentiaalın yksikkö on $\text{J/kg} = \text{Nm/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2$.

Kun potentiaalienergian referenssipiste sijoitetaan äärettömyyteen, saadaan pisteessä \mathbf{r}' olevan pistemassan m' gravitaatiopotentiaaliksi kenttäpisteessä \mathbf{r} yhtälön (7.10) mukaan

$$(7.12) \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = G \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

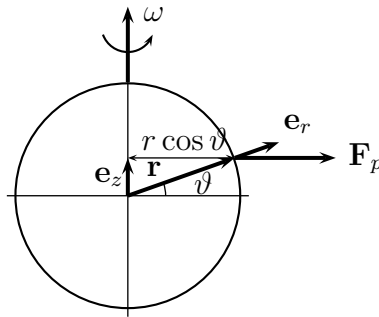
joka voidaan yleistää superpositioperiaatetta käyttäen koskemaan useita pistemassoja ja lopulta tilavuudessa V olevaa jatkuvaa tiheysjakaumaa $\rho(\mathbf{r}')$

$$(7.13) \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Huomautus. Miinus-merkin valinta yhtälöön (7.10) on geofysiikassa ja geodesiassa tavanomainen valinta, jonka johdosta gravitaatio (painovoima) saadaan gravitaatiopotentiaalın positiivisena gradienttina (7.11). Tämä on fysikaalisesti perusteltavissa sillä, että kyseessä on vetovoima, jonka suunta on massaa kohti. Näin ollen, kun valitaan plus-merkki gravitaatiopotentiaalille, osoittaa potentiaalın gradientti massaa kohti eli kentän voimakkaimman kasvun suuntaan. Sinänsä mitään matemaattista välttämättömyyttä merkivalinnalle ei ole. ■

Maapallon pyörimisestä aiheutuva keskipakovoima

Edellä jo viitattiin siihen, että mekaniikassa voimat voivat olla joko *todellisia* voimia, kuten gravitaatio tai *näennäisvoimia* (hitausvoimia), joiden perimmäisenä syynä on se, että kun Newtonin liikelakia ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) sovelletaan muussa kuin täysin levossa tai tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä olevassa koordinaatistossa, aiheutuu tästä todellisten voimien lisäksi lisätermiä



Kuva 7.2: Keskipakovoiman tarkastelu

voimaan. Tarkastelumme kannalta yksi keskeinen näennäisvoima on keskipakovoima, joka johtuu siis siitä, että koordinaatistomme kiinnitetään maapalloon.

Maapallon pyörimisestä massapartikkeliin m aiheutuvan keskipakovoiman suuruus on ympyräliikkeen mekaniikan mukaan, kun kulmanopeus ω on vakio,

$$(7.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_p &= -m\mathbf{a} = -m\dot{\mathbf{v}} = -m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= -m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \end{aligned}$$

missä massapartikkelin ratanopeus on $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ja \mathbf{r} maapallon keskipisteestä alkava massan m paikkavektori. Miinus-merkki kuvaa sitä, että kyseessä on keskipakovoima. Keskipakovoimaan liittyvä kiihtyvyys on yhtälön (7.14) mukaan

$$(7.15) \quad \mathbf{a}_p = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega} = \omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} = \omega^2 r \mathbf{e}_r - \omega^2 r \cos(\pi/2 - \vartheta) \mathbf{e}_z,$$

missä ϑ on paikan geosentrinen latitudi, $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\omega}^0$ on pyörimisakselin suuntainen yksikkövektori ja \mathbf{e}_r paikkavektorin \mathbf{r} suuntainen yksikkövektori kuvan 7.2 mukaisesti.

Kiihtyvyyden itseisarvo on

$$(7.16) \quad a_p = \sqrt{\mathbf{a}_p \cdot \mathbf{a}_p} = \omega^2 r \cos \vartheta$$

ja suunta on kohtisuorasti pois päin maapallon pyörimisakselista eli kuvan 7.2 \mathbf{F}_p -vektorin suunta. Kiihtyvyyden \mathbf{e}_r :n suuntainen skalaarikomponentti on siten

$$(7.17) \quad a_{p_r} = \omega^2 r \cos^2 \vartheta.$$

Maapallon kulmanopeuden itseisarvo on $\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Huomaa, että tämä arvo saadaan ns. *sideerisen* vuorokauden avulla, joka tarkoittaa maapallon pyörähdysaikaa tähtien suhteen ja joka on hieman pienempi kuin tavallisen eli ns. keskimääräisen *solaarisen* vuorokauden kesto ($= 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 8,640 \cdot 10^4 \text{ s}$). Sideerisen vuorokauden kesto on mittausten mukaan $8,616 \cdot 10^4 \text{ s}$.

Gravitaatiovoiman ja maapallon pyörimisestä aiheutuvan keskipakovoiman aikaansaaman painovoiman tarkastelussa käytetään *geopotentiaalia* eli painovoiman potentiaalia W , jonka gradienttina saadaan painovoima. Geopotentiaali määritellään yhtälöllä

$$(7.18) \quad W = \mathcal{V} + Z = \mathcal{V} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \vartheta,$$

missä Z on pyörimiseen liittyvän keskipakovoiman potentiaali. Keskipakovoiman potentiaalin gradientti antaa keskipakovoimaan liittyvän kiihtyvyyden. Toisin sanoen

$$(7.19) \quad \mathbf{a}_p = \nabla Z = \nabla \left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \vartheta \right),$$

minkä voi todeta olevan yhtälön (7.15) mukainen kiihtyvyys muodostamalla gradientti kuvan 7.2 koordinaatistossa.

Sovelletussa geofysiikassa maapallon pyörimisliikettä ei tarkastella erikseen, vaan tarkastelu keskitetään pelkästään gravitaatiopotentiaaliin \mathcal{V} ja gravitaatiokenttään. Gravitaatiopotentiaali koskee siis paikallaan olevan Maan gravitaatiokenttää. Siksi painovoimaa ja gravitaatiovoimaa käytetään termeinä usein synonyymeinä. Painovoiman mittauksessa on luonnollisesti mukana kaikki eri vaikuttavat tekijät.

7.1.5 Painovoimakentän differentiaaliyhtälöt

Koska Newtonin vetovoimalain (7.1) mukainen gravitaatiokenttä on pyörteetön eli konservatiivinen, pätee

$$(7.20) \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0.}$$

Tämä on yksi tavoittelemistamme kenttäyhtälöistä ja laitamme sen siksi laatikon sisälle. Muodostetaan seuraavaksi Newtonin vetovoimalain mukaisesta painovoimasta divergenssi. Diracin δ -funktiota käyttäen voidaan kirjoittaa

$$(7.21) \quad \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Tätä yhtälöä olemme käyttäneet jo aiemmin sähköstatiikassa yhtälössä (3.31). Pistemäisen massan tapauksessa voidaan kirjoittaa yhtälöiden (7.11) ja (7.12) mukaan

$$(7.22) \quad \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla \mathcal{V}(\mathbf{r}) = \nabla^2 \mathcal{V}(\mathbf{r}) = -4\pi G m' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Massan ollessa jatkuvasti jakautunut johonkin tilavuuteen pätee

$$(7.23) \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r})}.$$

Tämän lausekkeen oikeutus voidaan perustella mm. dimensiotarkastelulla, kun huomataan, että yhtälössä (7.22) termin $m' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ yksikkö on tiheyden yksikkö kg/m^3 . Tähän yhtälöön päädytään tietenkin myös määrittelyyhtälöstä (7.5), kun siihen sijoitetaan superpositioperiaatteen mukaisesti $m' = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV'$

$$(7.24) \quad \begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -G \frac{m'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G m' \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= G \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -G \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \end{aligned}$$

Muodostamalla tästä yhtälöstä divergenssi ja huomioimalla yhtälö (7.21) sekä Diracin δ -funktion integraalimaisuus (2.158) päädytään yhtälöön (7.23).

Kun yhtälöön (7.23) sijoitetaan $\mathbf{g} = \nabla \mathcal{V}$, päädytään gravitaatiopotentiaalisiin Poissonin yhtälöön

$$(7.25) \quad \boxed{\nabla^2 \mathcal{V}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r})}.$$

Massattomassa alueessa $\rho(\mathbf{r}) = 0$. Tällöin yhtälöä (7.25) vastaa Laplacen yhtälö

$$(7.26) \quad \boxed{\nabla^2 \mathcal{V} = 0}.$$

Gravitaatiopotentiaali on siis harmoninen funktio massajakauman ulkopuolella. Harmoniset funktiot ovat puolestaan *potentiaaliteorian* ydin ja siksi gravitaatiopotentiaalisiin voidaan ajatella muodostavan potentiaaliteorian 'prototyypin'.

Huomaamme, että gravitaatiopotentiaali toteuttaa täysin samat yhtälöt kuin sähköstaattinen potentiaali. Näin ollen näiden välillä vallitsee analogia. Tulemme käyttämään tätä analogiaa tiettyjen kenttäprobleemien tarkastelussa.

Jos pyörimisliikkeen vaikutus halutaan ottaa mukaan kenttäyhtälöihin, kirjoitetaan painovoiman potentiaalille eli geopotentialille

$$(7.27) \quad W = \mathcal{V} + Z,$$

missä \mathcal{V} on paikallaan olevan Maan aikaansaama Newtonin vetovoimalain mukainen $1/r$ -tyyppinen gravitaatiopotentiaali ja Z keskipakovoiman potentiaali, joka yhtälön (7.18) mukaan on

$$(7.28) \quad Z = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \vartheta.$$

Geopotentialin avulla painovoima on

$$(7.29) \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla W(\mathbf{r}),$$

mistä seuraa, että $\nabla \times \mathbf{g} = 0$. Sen sijaan divergenssiyhtälöä (7.23) ja Poissonin yhtälöä (7.25) tulee vastaamaan yhtälö

$$(7.30) \quad \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla^2 W(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho(\mathbf{r}) + 2\omega^2,$$

kuten pallokoordinaatiston Laplacen-operaattorin avulla on todettavissa.

Huomaa, että *tasaisessa* ympyräliikkeessä, toisin sanoen kiertoliikkeessä kiinteään akselin ympäri olevan kappaleen ratanopeus $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ on lähteetön ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), mutta pyörteellinen vektorikenttä. Sen pyörre on $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega}$. Kappaleen keskipakovoimaan liittyvä kiihtyvyyden on sen sijaan *pyörteetön* vektorikenttä, toisin sanoen $\nabla \times ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\omega}) = 0$. Siksi se voidaan lausua skalaaripotentialin gradienttina, kuten yhtälössä (7.19) on tehty. Inertiaalikehys eli tarkastelukoordinaatisto on kuitenkin sidottu maahan ja se liikkuu maapallon mukana. Tästä aiheutuu pieni virhe, koska hitausvoima eli tässä tapauksessa keskipakovoima olisi tarkalleen liikeyhtälön $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_p$ mukainen ainoastaan täysin levossa olevassa tai korkeintaan tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä olevassa koordinaatistossa. Tällainen koordinaatisto on ns. *astro-nominen kehys*, jonka origo on aurinkokunnan massakeskiössä ja joka ei tee pyörimisliikettä kaukaisten kiintotähtien suhteen. Kuitenkin käytännön laskujen kannalta maapalloon sidottu koordinaatisto tai maapallon suhteen vakionopeudella ilman pyörimistä liikkuva koordinaatisto kelpaa inertiaalikehykseksi. Periaatteessa siis lauseke (7.19) ei ole aivan tarkka.

7.1.6 Painovoimakenttävektorin rajapintaehdot

Tarkastelemme seuraavaksi kenttävektorin käyttäytymistä rajapinnoilla, erityisesti kahden tiheydeltään erilaisen aineen rajapinnalla. Koska gravitaatiokenttä (painovoimakenttä) on pyörteetön, voidaan \mathbf{g} :n rajapintakäyttäytymiselle johtaa Stokesin lauseen avulla ehto

$$(7.31) \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) = 0,$$

mikä voidaan ilmaista myös \mathbf{g} :n tangentialikomponenttien jatkuvuutena

$$(7.32) \quad g_{1t} = g_{2t}.$$

\mathbf{n} on pinnan ulkonormaalien suuntainen yksikkövektori aineesta 2 aineeseen 1.

Divergenssiyhtälöstä (7.23) saadaan puolestaan Gaussin lauseen avulla ehto painovoimakentän normaalikomponentille

$$(7.33) \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) = g_{1n} - g_{2n} = -4\pi G \sigma,$$

missä σ on rajapinnalla olevan massan pintatiheys, yksikkönä kg/m^2 . Jos mitään erityistä pintamassaa ei ole, \mathbf{g} :n normaalikomponenttikin on jatkuva rajapinnalla.

Gravitaatiopotentiaalin avulla ehdot (7.31) tai (7.32) ja (7.33) voidaan esittää muodossa

$$(7.34) \quad \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$$

ja vastaavasti

$$(7.35) \quad \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial n} = -4\pi G \sigma.$$

On huomattava, että gravitaatiokentän laskemisessa ei tarvita erillistä konstitutiivista yhtälöä. Itse asiassa Newtonin vetovoimalain avulla määritetty putoamiskiihtyvyys $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ toimii samalla *konstitutiivisena yhtälönä*, joka onkin luonteeltaan siten yleispätevä ja tarkka, toisin kuin yleensä konstitutiiviset yhtälöt.

Sähköstatiikassa kahden permittiivisyydeltään erilaisen aineen rajapinnalle muodostuu sidotuista varauksista koostuva pintavarausjakauma mahdollisen vapaan pintavarauksen lisäksi. Sen sijaan gravitaatiossa tällaisia vastaavia sidottuja pinnalla olevia pintamassoja ei muodostu. Painovoimakenttään tuotu kappale kokee muodonmuutoksia. Painovoimakenttä aiheuttaa massan jakautumista uudelleen eli tiheyden muuttumisen paikan funktiona. Kiinteillä aineilla muutokset saattavat tosin olla ajallisesti hyvin hitaita. Sen sijaan on varsin tavallista, että nestemäisten ja kaasumaisten aineiden kohdalla tapahtuu massan jakautuminen eli tiheyden muuttuminen painovoimakentän vaikutuksesta jo varsin nopeasti, ainakin geologisessa aikaskaalassa. Esimerkiksi ilma ja suolaiset vedet, kuten suolainen pohjavesi, kerrostuvat painovoimakentän vaikutuksesta eli niissä tapahtuu massan jakautuminen tiheyden mukaisesti kerroksiin. Palaamme muodonmuutoksiin myöhemmissä luvuissa. Tässä luvussa tarkasteltavat painovoimakentän kenttäprobleemit ovat kuitenkin staattisia problemeja.

Vertaa tilannetta, kun sähköstaattiseen kenttään tuodaan johde- tai eriste-kappale. Tällöinhän tapahtuu varausten uudelleen ryhmittyminen kentän vaikutuksesta. Koska varauksia on kahden merkkisiä, tapahtuu lisäksi sähkökentän vaikutuksesta sähköinen polarisaatio. Sen sijaan massa aikaansaa aina vetovoiman eli massaa on vain ”yhdenmerkkistä” eikä polarisaatioon verrattavaa ilmiötä esiinny painovoimakentän osalta.

7.1.7 Geologisten materiaalien tiheyksiä

Painovoiman kannalta materiaaliominaisuutena on ainoastaan aineen massatiheys ρ . Taulukkoon 7.1 on koottu joidenkin geologisten materiaalien tiheyden arvoja. Mineraalien tiheys riippuu niiden kidemuodosta ja kemiallisesta koostumuksesta. Erilaiset epäpuhtaudet ja kidehilan virheet aiheuttavat vaihtelua mineraalin tiheyden arvoon.

Kivilajien tiheys riippuu niiden mineraalikoostumuksesta sekä huokoisuudesta ja huokosnesteestä. Geologiset prosessit vaikuttavat kivilajien tiheyksiin. Niinpä esimerkiksi rapautuminen ja rakoilu pienentävät tiheyttä, koska nämä lisäävät kiven huokoisuutta.

Taulukko 7.1: Geologisten materiaalien tiheyksiä, yksikkönä kg/m^3 .

Materiaali	Tiheys
biotiiitti	2800 – 3400
plagioklaasi	2650 – 2750
kvartsi	2500 – 2700
lyijyhohde	7400 – 7600
magneettikiisu	4500 – 4800
sinkkivälke	3500 – 4200
magnetiitti	4900 – 5200
graniitti	2500 – 2800
peridotiitti	3100 – 3300
gabro	2800 – 3100
diabaasi	2800 – 3100
gneissi	2600 – 3100
kiilleliuske	2650 – 2850
irtomaa	1100 – 2200

Syväkivien tiheydet ovat suurempia kuin pintakivien. Samoin yleisesti ”tummat emäksiset kivet” ovat tiheämpiä kuin ”vaaleat happamat kivet”.

Syvällä täysin kiteytyneet magmakivet ovat yleensä hieman tiheämpiä kuin pinnalla nopeasti ja vaillinaisesti kiteytyneet vastaavat magmakivet.

Metamorfoosi saattaa joko suurentaa tai pienentää kiven tiheyttä. Sedi-menttikivillä on puolestaan havaittu, että vanhetessaan ja paineen alla niiden tiheys kasvaa, koska ne kovettuvat ja iskostuvat tiiviimmäksi pakkaukseksi. Sedimenttikivien tiheys kasvaa siis yleensä syvyyden kasvaessa.

Kuten taulukosta 7.1 havaitaan tiheyden vaihtelualue ei ole kovin laaja. Vaihtelu tapahtuu saman kertaluokan sisällä.

Geologisten materiaalien tiheyden tutkiminen muodostaa yhden tärkeän petrofysikaalisen tutkimuksen osa-alueen. Lisäksi tiheyttä voidaan korreloida muihin petrofysikaalisiin suureisiin, kuten huokoisuuteen, seismiseen P-aallon nopeuteen, magneettiseen susceptibiliteettiin ja lämmönjohtavuuteen.

7.1.8 Geoidi ja normaalipainovoima

Edellä määrittelimme geopotentialin eli painovoiman potentiaalin W yhtälöllä (7.18). Tämän potentiaalin yksi ekvipotentiaalipinta eli tasa-arvopinta määritellään *geoidiksi*. Geoidi on häiriintymättömään merenpintaan yhtyvä painovoiman potentiaalin tasa-arvopinta. Geoidilla on kuvitellut jatkeet mannerten alla.

Koska geoidi on tasa-potentiaalipinta, painovoima \mathbf{g} on kaikkialla koh-tisuorassa geoidia vastaan. Tämä suunta on määritelmän mukaan vertikaalisuunta. Geoidipinnan tangentti on siten horisontaalisuunta. Joskus näkee väitettävän ja kirjoitettavan virheellisesti, että geoidi olisi painovoiman ”tasa-arvopinta”, mutta, koska painovoima on vektori, tasa-arvopinta ei tällöin ole edes mielekäs olio.

Geoidin muoto on määritelmänsä mukaan sama kuin maapallon muoto. Siinä on massavajauksen aiheuttamia ”kuoppia” kuin myös massaylijäämän aiheuttamia ”kumpuja”. Geoidin muoto riippuu massan jakautumisesta maan sisällä. Yleismuotona sillä on päärynän muoto. Geoidin muoto on yksityiskohdissaan varsin monimutkainen, joten käytännön sovelluksia varten sitä on tarpeen approksimoida yksinkertaisella pinnalla. Tällainen pinta on pyörähdysellipsoidin pinta.

Geoidia parhaiten approksimoivan pyörähdys- eli referenssiellipsoidin päiväntasaaja-akseli (a) on noin 6378 km ja polaariakseli c noin 6357 km. Näiden ero on siis 21 km. Ellipsoidia karakterisoidaan usein litistyneisyydellä, joka määritelmänsä mukaan on

$$(7.36) \quad f = \frac{a - c}{a}.$$

Vuonna 1980 litistyneisyydelle vahvistettu tarkka arvo on 1/298,257.

Painovoimaa, joka on geoidia parhaiten approksimoivan pyörähdysellipsoidin pinnalla, nimitetään *normaalipainovoimaksi*. Normaalipainovoimalle on kansainvälisesti vahvistettu laskentakaava IGF eli *International Gravity Formula*, jona käytetään edelleenkin vuonna 1967 vahvistettua kaavaa

$$(7.37) \quad g = 9,78031846(1 + 0,0053024 \sin^2 \vartheta - 0,0000058 \sin^2 2\vartheta) \text{ m/s}^2,$$

missä ϑ on geosentrinen latitudi. Koska normaalipainovoiman suunta on kohtisuorassa referenssiellipsoidia vastaan, sen suuntaa ei ilmoiteta erikseen, vaan ainoastaan itseisarvo. Normaalipainovoiman laskentakaavan on vahvistanut IUGG eli *International Union of Geodesy and Geophysics*. Siihen on vuonna 1980 tehty joitakin vähäisiä tarkistuksia. Ensimmäinen normaalipainovoiman kaava otettiin käyttöön vuonna 1930. Todettakoon, että suomalainen Veikko Heiskanen³ teki merkittävän työn normaalipainovoiman laskentakaavan kehittämiseksi tutkimalla isostasiasia ja selvittämällä referenssiellipsoidia. Heiskanen esittämä litistyneisyyden arvo $1/297,1$ on vuodelta 1928.

7.2 Painovoiman kenttäprobleemien ratkaiseminen

Olemme edellä selvittäneet painovoimakentän kenttäyhtälöt ja todenneet, että painovoimaan liittyvä gravitaatiopotentiaali on täysin analoginen sähköstaattisen potentiaalin kanssa. Niinpä koko se koneisto, jota käytetään sähköstaattisten probleemien ratkaisussa on sellaisenaan käytettävissä myös gravitaatioprobleemien ratkaisemisessa. Painovoiman kenttäprobleemeissa riittää tarkastella gravitaatiosta aiheutuvaa osuutta. Muut vaikutukset otetaan huomioon normaalipainovoimassa ja erilaisten korjausten, kuten vuoksikorjauksen, kautta.

Tiheys on ainoa materiaaliominaisuus, joka vaikuttaa gravitaatioon. Gravitaatiokentässä oleva kappale ei myöskään polarisoidu millään tavalla, koska gravitaatio on ainoastaan vetovoimaa. Näin ollen gravitaatioon liittyvän kenttäprobleemin ratkaiseminen onkin itse asiassa integrointitehtävä massajakauman yli. Integrointi on helpointa skalaarimuotoisesta gravitaatiopotentiaalin yhtälöstä (7.13). Muodostamalla tästä gradientti saadaan gravitaatiokenttä määritetyksi. Kenttä voidaan toki laskea myös integroimalla suoraan vektorimuotoisesta yhtälöstä (7.24).

³Veikko Aleksanteri Heiskanen (1895–1971), Teknillisen korkeakoulun geodesian professori 1928–1949, Geodeettisen laitoksen johtaja vuoteen 1961 sekä Ohion valtionyliopiston tutkimusprofessori 1950–1961.

Joissakin symmetrisissä tilanteissa voidaan käyttää Gaussin lauseesta saatavaa relaatiota hyväksi. Gaussin lauseen mukaan

$$(7.38) \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} \, dV = \oint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

mikä edelleen yhtälön (7.23) mukaan antaa

$$(7.39) \quad \oint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -4\pi G \int_V \rho \, dV = -4\pi G M,$$

missä M on Gaussin pinnan S sisäänsä sulkema kokonaisuudessa. Kun Gaussin pinta valitaan siten, että \mathbf{g} on yhdensuuntainen pinnan ulkonormaaliyksikkövektorin \mathbf{n} kanssa, voidaan yhtälöä (7.39) käyttää myös massa-arviointeihin, jos $g_n (= \mathbf{g} \cdot \mathbf{n})$ tunnetaan esimerkiksi mittaustuloksena.

Sovelletussa gravimetriassa (eli painovoiman mittaamisessa esimerkiksi malminetsintää varten) ei olla kiinnostuneita painovoiman absoluuttiarvoista, vaan mittaukset toteutetaan suhteellisina ja tarvittaessa sidotaan absoluuttisiin arvoihin. Näin ollen painovoimakenttien laskennassa tarkastellaan *tiheyseroista* aiheutuvia kenttiä.

7.2.1 Pallon gravitaatiokenttä

Pallon, jonka tiheysjakauma on pallosymmetrinen eli pelkästään säteen funktio $\rho = \rho(r)$, gravitaatiokenttä saadaan helpoiten Gaussin lauseen avulla. Intuitiivisesti on selvää, ettei ole mitään fysikaalista syytä, miksi kentän suunta ei olisi radiaalinen eli radiusvektorin suuntainen. Olkoon pallon säde a . Valitaan Gaussin pinnaksi pallon kanssa samankeskinen pallopinta. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(7.40) \quad \oint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -4\pi G \int_V \rho(r) \, dV.$$

Näin ollen pallon gravitaatiokentäksi saadaan yleisesti

$$(7.41) \quad g_n = G \frac{1}{r^2} \int_V \rho(r) \, dV.$$

Gravitaatiokentäksi pallon ulkopuolella ($r > a$) saadaan

$$(7.42) \quad g_n = G \frac{1}{r^2} \int_V \rho(r) \, dV = G \frac{M}{r^2},$$

missä M on pallon massa ja kentän suunta on pallon keskipistettä kohti. Huomaa, että $\mathbf{g} \uparrow \downarrow \mathbf{n}$. Vektorimerkinnöin gravitaatiokenttä ilmaistaan muodossa, kun lisäksi oletetaan, että tiheys on vakio,

$$(7.43) \quad \mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r = -G \rho \frac{4\pi a^3}{3 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > a).$$

Yhtälön (7.42) mukaan gravitaatiokenttä pallon ulkopuolella on sama kuin pallon keskipisteessä olevan pistemassan kenttä. Pistemassan suuruus on sama kuin pallon kokonaisuudessa M .

Gravitaatiokentäksi pallon sisäpuolella ($r < a$) saadaan yhtälöstä (7.41), kun oletetaan, että pallo on homogeeninen ja kun käytetään pallon differentiaaligeometriasta tilavuusalkiota (2.68):

$$(7.44) \quad g_n = G \rho \frac{1}{r^2} \int_0^r r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = G \rho \frac{4\pi}{3} r.$$

Vektorimerkinnöin pallon sisäpuolinen gravitaatiokenttä on

$$(7.45) \quad \mathbf{g} = -G \rho \frac{4\pi}{3} r \mathbf{e}_r \quad (r < a).$$

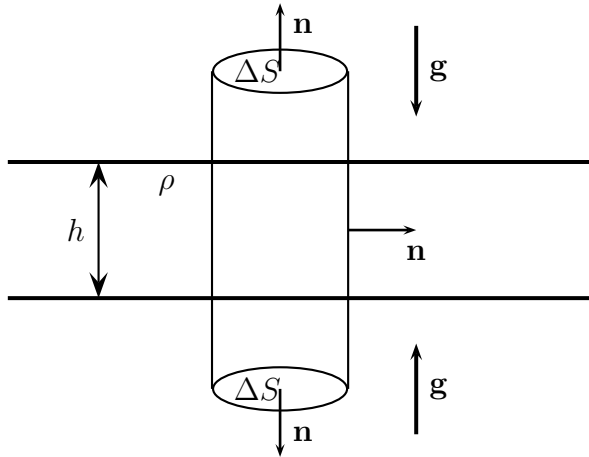
Edellä saadut pallon gravitaatiokentän lausekkeet ovat täysin analogiset sähköstatiikassa saatujen ratkaisujen kanssa. Vertaa yhtälöitä (7.43) ja (7.45) yhtälöihin (3.89) ja vastaavasti (3.93). Huomaa, että gravitaatiokenttä suuntautuu aina massaa kohti, joten vektorimuotoisissa lausekkeissa on miinus-etumerkki, kuten jo lähtökohtana olevassa Newtonin vetovoimalaissa (7.1).

7.2.2 Laatan gravitaatiokenttä

Painovoimamittauksille tehdään joukko korjauksia ja reduktioita, jotta mitaustulokset ovat vertailukelpoisia. Yksi reduktio on ns. *Bouguer*⁴-reduktio. Reduktio liittyy tasapaksuisen ja homogeenisen ns. Bouguer-laatan gravitaatiokenttään. Tarkastelemme seuraavaksi tämän kentän määrittämistä. Emme muutoin perehdy tässä kirjassa mittauksiin tehtäviin korjauksiin ja reduktioihin.

Olkoon kuvan 7.3 mukaisesti tasapaksu (paksuus h), tiheydeltään homogeeninen (ρ), vaakasuunnassa äärettömyyteen ulottuva laatta. Intuition perusteella on ilmeistä, että painovoima suuntautuu kohtisuoraan laattaa vastaan. Koska laatta on lisäksi tiheydeltään homogeeninen, painovoiman itseisarvo on kaikkialla laatan ulkopuolella sama. Näin ollen probleemi voidaan

⁴Pierre Bouguer (1698–1758), ransk. geofyysikko, fyysikko ja matemaatikko.



Kuva 7.3: Bouguer-laatan painovoiman määrittäminen

ratkaista Gaussin lauseen avulla. Valitaan Gaussin pinnaksi sylinteripinta, joka ulottuu laatan läpi. Sylinterin akseli on kohtisuorassa laattaa vastaan. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(7.46) \quad \oint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi G\rho V \quad \text{eli}$$

$$-\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\Delta S - \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}\Delta S = -4\pi G\rho(h\Delta S),$$

josta sieventämällä saadaan

$$(7.47) \quad g_n = 2\pi G\rho h.$$

On huomattava, että sylinterivaipasta ei tule kontribuutiota Gaussin pinnan pintaintegraaliin, koska pinnan normaali \mathbf{n} on siinä kohtisuorassa painovoimakenttää vastaan, jolloin pistetulo $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Bouguer-laatan tiheys voi myös muuttua vertikaalisuunnassa. Tällöin Gaussin lausetta ei voida soveltaa, vaikka kenttien suunnat voidaankin päätellä etukäteen. Sen sijaan kenttä epähomogeenisen laatan yläpuolella on itseisarvoltaan eri kuin kenttä laatan alapuolella. Yleisen Bouguer-laatan gravitaatiokenttä onkin laskettava integroimalla.

7.2.3 Loppuhuomautus painovoiman kenttäprobleemeista

Painovoimakentän kenttäprobleemit ovat tavallisimmin anomalioiden laskentatehtäviä. Edellä on jo käynyt selväksi, että painovoima-anomalian laskenta palautuu integrointitehtäväksi massajakauman yli. Tällä periaatteella

on määritetty painovoima-anomalioiden tulkinnessa käytettävät analytyttiset mallit eri muotoisille kappaleille. Myös tiheyden paikkariippuvuus voidaan ottaa huomioon.

Periaatteessa painovoima-anomalian laskentatehtävä on kuitenkin fysiikaalinen reuna-arvotekävä, kuten sähköstatiikan vastaava ongelma. Gravitatiopotentiaali toteuttaa massattomassa alueessa Laplacein yhtälön ja massallisessa alueessa Poissonin yhtälön. Potentiaalilla tulee olla kaikkialla säännöllinen ja jatkuva.

Gravitatiokentän ja magnetoituneen aineen magnetostaattisen kentän välillä on mielenkiintoinen yhteys. Olemme magnetostatiikassa todenneet, että magnetoituneen aineen skalaaripotentialiaali voidaan määrittää yhtälöstä (5.70):

$$(7.48) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Magneettikentän voimakkuus saadaan tämän avulla:

$$(7.49) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Jos oletamme, että magnetoituman \mathbf{M} suunta on kaikkialla tilavuudessa V sama ja merkitsemme tätä suuntaa yksikkövektorilla \mathbf{e}_α , $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_\alpha$, saamme

$$(7.50) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_V M(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

Edellä on huomattava, että $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla = M(\mathbf{r}')\mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla = M(\mathbf{r}')(\partial/\partial \alpha)$.

Jos nyt magnetoituma on homogeeninen tilavuudessa V ja samalla myös tilavuuden massa on tiheydeltään vakio ρ , niin tällöin yhtälöiden (7.50) ja (7.13) eli

$$(7.51) \quad \mathcal{V}(\mathbf{r}) = G\rho \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

perusteella saadaan relaatio

$$(7.52) \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{M}{G\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla \mathcal{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{M}{G\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{g}(\mathbf{r}).$$

Tämä relaatio perustuu siis siihen, että molempien kenttien laskentakaavassa on sama tilavuusintegraali kappaleen yli.

Magnetoituneen aineen skalaaripotentialin ja gravitaatiopotentialin välillä vallitsee edellä olevan mukaan relaatio

$$(7.53) \quad \phi^*(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{M}{G\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{V}(\mathbf{r}).$$

Yhtälön (7.52) tai (7.53) avulla kaikki homogeenisesti magnetoituneen kappaleen ominaisuudet voidaan johtaa gravitaatiokentästä. Tämän relaation keksi Poisson jo 1800-luvun alkupuolella. Esimerkiksi homogeenisesti magnetoituneen pallon kentän lausekkeet (5.133) ja (5.134) saadaan tiheydeltään homogeenisen pallon gravitaatiokentän lausekkeista (7.43) ja vastavasti (7.45). Poissonin relaatiolla on käyttöä magnetostaattisten anomalioiden laskennassa.

Varoitus. Kaavoissa (7.13) ja (7.51) V -kirjain esiintyy kahdessa eri merkityksessä eli gravitaatiopotentialina ja tilavuutena. Gravitaatiopotentiali kirjoitetaan erotukseksi tilavuudesta kalligrafisessa kirjoitusasussa \mathcal{V} . Tästä ei kuitenkaan aiheutune sekaantumisvaaraa. ■

Todettakoon vielä lopuksi, että koska tiheys on yhden kertaluokan sisällä vaihteleva aineominaisuus, painovoima-anomaliat ovat yleispiirteeltään loivia ja ne ovat varsin epäherkkiä pienille tiheyseroille.

Luku 8

Yleinen kontinuumimekaniikka

Geofysiikan toisen keskeisen tukijalan muodostaa kuvan 1.1 mukaisesti *kontinuumimekaniikka* eli *jatkuvan aineen mekaniikka*. Kiinteän maan geodynaamiset ilmiöt, kuten laattatektoniikka, maankuoren liikkeet, sen jännitykset ja muodonmuutokset, seismisten aaltojen syntymekanismit, aaltojen eteneminen, kalliomekaniikka ja pohjaveden virtaus sekä vesivaipan vesimassojen ja ilmakehän ilmamassojen liikkeet ovat kaikki aihepiirejä, joiden tutkimisessa tarvitaan ja sovelletaan kontinuumimekaniikkaa. Myös lämmönsiirtymiseen ja aineiden kulkeutumiseen liittyvät ilmiöt kuuluvat kontinuumimekaniikkaan. Useimmiten geofysiikassa joudutaan ilmiöitä tarkastelemaan kytketyksi. Toisin sanoen samaan aikaan samassa paikassa vaikuttaakin usea ilmiö, joilla on vielä keskinäinen vuorovaikutus eli kytkentä. On tavallista, että ainakin lämmön vaikutus on otettava jotenkin mukaan. Kontinuumimekaniikassa on siis kyseessä sekä globaaligeofysiikan että sovelletun geofysiikan kannalta hyvin keskeinen tieteen ala. Sen avulla käsiteltävissä oleva ilmiömaailma on hyvin laaja, kuten edellä mainitut esimerkit jo osoittavat.

Kontinuumimekaniikka jaetaan yleisesti kahteen pääosaan eli *kiinteän aineen mekaniikkaan* ja *nestemekaniikkaan* aineen olomuotojen perusteella. Näiden lisäksi kolmantena alueena voidaan erikseen pitää *huokoisen aineen mekaniikkaa*. Kiinteän eli jähmeän aineen mekaniikan tärkeimpiä probleemeja ovat muodonmuutosten ja jännityskenttien sekä niihin liittyvien ilmiöitten tarkastelu. Nestemekaniikka käsittää sekä varsinaiset nesteet että kaasut. Merkittävin ero näiden välillä on se, että varsinaiset nesteet ovat vain vähäisessä määrin kokoonpuristuvia, kun puolestaan kaasut ovat helposti kokoonpuristuvia. Nestemekaniikan tärkeimmät probleemit liittyvät virtausmekaniikkaan ja aineiden kulkeutumiseen. Huokoisen aineen mekaniikka tarkastelee tilanteita, joissa on läsnä samanaikaisesti sekä kiinteä aine että neste. Tällainen ongelma on esimerkiksi pohjaveden liike huokoisessa maalajissa tai rakoilleessa kalliolla sekä yleensäkin, kun jokin toinen aine liikkuu jonkin

toisen aineen sisältämissä huokosissa. Huokoisen aineen mekaniikkaa on aivan viime vuosina tutkittu sekä teorian että sovellusten kannalta hyvin paljon, koska ympäristön monet kulkeutumisprobleemit, kuten saasteiden leviäminen maankamarassa, ovat huokoisen aineen problemeja. Todettakoon, että esimerkiksi käytetyn ydinpolttoaineen geologisessa loppusijoituksessa pohjaveden ja siihen mahdollisesti liuenneiden radioaktiivisten aineiden eli *radionuklidien* kulkeutumistarkastelut pohjautuvat huomattavassa määrin juuri huokoisen aineen mekaniikkaan.

Kenttäteoreettisen rakenteen kannalta kontinuumimekaniikka muodostaa vastaavanlaisen kenttäteorian kuin Maxwellin yhtälöiden muotoon puettu sähkömagnetismi. Ilmiöitä kuvaavat tietyt *kenttäyhtälöt*, joiden lisäksi tarvitaan *konstitutiivisia rakenne- eli väliaineyhtälöitä*. Lisäksi virtauksen ja suurten muodonmuutosten hallintaa varten tarvitaan *kinematiikan* eli ajasta riippuvan geometrian käsitteistöä.

Tässä kirjassa tyydymme esittelemään kontinuumimekaniikan keskeiset periaatteet, joita voidaan kutsua fysiikan suuriksi ”prinsipeiksi”. Niiden pohjana ovat nimittäin säilymislait. Korostamme sitä, että geofysiikan ilmiöt ja prosessit ovat matemaattisesti ja laskennallisesti tarkasteltavissa kontinuumimekaniikan avulla.

8.1 Jatkuvan aineen oletus

Olemme jo sekä sähkömagnetismin puolella että painovoimassa tarkastelleet aineen jakautumista erilaisiin avaruudellisiin tiloihin ottamalla käyttöön varaus- ja massajakautumien tiheysfunktioit. Niissä esiintyvät raja-arvolausekkeet ovat yksi ilmentymä jatkuvasta aineesta. Raja-arvoprosessin tulee olla fysikaalisesti järkevä eli, kuten olemme asian ilmaisseet, raja-arvojen tulee olla määriteltyjä ”fysiikan hengessä”. Tämä tarkoittaa sitä, että tilavuus-, pinta- ja viiva-alkioissa on koko ajan edustava määrä ainehiukkasia, varauksia tms., jotka muodostavat jatkuvan jakauman.

Edellä olevasta seuraa, että jos aine on hyvin harvaa, kontinuumioletus ei ole enää voimassa. Geofysiikassa tällainen tilanne syntyy ilmakehän aivan ylimmissä osissa. Sen sijaan kaikkialla maapallon pinnalla ja sisällä kontinuumioletus on yleensä voimassa, koska ei ole oletettavissa, että maan sisällä tai vesimassoissa olisi makroskooppisesti huomattavia tyhjiötä vastaavia tiloja. Näin ollen esimerkiksi rakoillut kallioperä ja siinä olevien aineiden eri olomuodot eivät aiheuta ristiriitaa kontinuumioletuksen kanssa. Tällöin kiinteä aine voi kylläkin olla epäjatkuvaa, kuten kalliolohkoista muodostunut kallioperä, mutta kalliolohkojen välisen tilan täyttävät taas puolestaan useimmiten nesteet ja kaasut tai jokin toinen kiinteä aine, kuten rakomineraalit. Koko-

naisuutena rakoillut kallioperä on siten kontinuumia, joskin varsin monen ominaisuuden suhteen *epähomogeenista* jatkuvaa ainetta. Näin ollen kontinuumioletuksen voidaan katsoa olevan voimassa geofysiikassa varsin yleisesti.

Huomattakoon, että hiukkasfysiikan ilmiöihin ja muihin atomaarisen mittakaavan ilmiöihin kontinuumimekaniikka ei sen sijaan sovellu, vaan niiden tarkasteluissa on käytettävä kvanttimekaniikkaa. Toisaalta myös, jos nopeudet ovat valonnopeuden suhteen samaa luokkaa, kontinuumimekaniikkaa ei voida sellaisenaan soveltaa, vaan tarvitaan suhteellisuusteoreettisia tarkasteluja.

Kontinuumimekaniikan soveltamisen kannalta on tärkeää selvittää mittakaava, jossa ilmiöitä tutkitaan. Usein puhutaan edustavasta alkeistilavuudesta eli REV:stä, joka tulee sanoista *Representative Elementary Volume*. Tämän koko määräytyy siten, että raja-arvolausekkeet ovat määriteltynä. Esimerkiksi huokoisen väliaineen tapauksessa tarkastelu voitaisiin kohdistaa pelkästään huokostason yhteen huokostilaan, joka on kuitenkin edelleen useimmiten makroskooppinen systeemi ja siten kontinuumimekaniikalla kuvattavissa. Harvoin olla kiinnostuneita yhden ainoan huokosen muodostamasta systeemistä, vaan tarkastelu koskee huokoista ainetta laajemmin, jolloin *huokoisuus* on aineominaisuus. Jotta tästä aineominaisuudesta tulisi derivoitavissa oleva ja matemaattisesti manipuloitavissa oleva funktio tarvitaan huokosia edustava määrä. Tällainen mittakaava määritellään *REV*in avulla, jossa siis ainepiste on matemaattista pistettä vastaava.

8.2 Kontinuumimekaniikan aksioomat

Kontinuumimekaniikka pohjautuu tiettyihin yleisesti paikkansa pitäviksi havaittuihin peruslakeihin, *säilymlakeihin* tai tarkemmin sanottuna *taselakeihin*, jotka voidaan ottaa tämänkin esityksen lähtökohdaksi. Ne voidaan ymmärtää aksioomina. Nämä peruslait ovat:

1. Massan säilymisen periaate. Kappaleen massa m säilyy vakiona, eli

$$(8.1) \quad \dot{m} = 0.$$

2. Liikemäärän taseen periaate. Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti \mathbf{F} on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän \mathbf{p} muutoksenopeus

$$(8.2) \quad \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}.$$

3. Liikemäärämomentin taseen periaate. Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien momentti \mathbf{M} kiinteän pisteen suhteen on yhtä suuri kuin

kappaleen saman kiinteän pisteen suhteen lasketun liikemäärämomentin \mathbf{L} muutosnopeus

$$(8.3) \quad \mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}.$$

4. Energian taseen periaate. Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tekemä työ W_{ext} lisättynä kappaleen saamalla lämmöllä W_Q on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian K ja sisäenergian E muutos

$$(8.4) \quad W_{ext} + W_Q = \Delta K + \Delta E \quad \Rightarrow \quad P_{ext} + P_Q = \dot{K} + \dot{E}.$$

Näiden lisäksi on vielä mainittava ns. *entropian kasvun periaate*.

Yhtälöissä esiintyvä yläpiste ($\dot{}$) tarkoittaa yleistettyä aikaderivaattaa, ns. *ainederivaattaa*, johon palaamme hieman tuonnempana. Yhtälö (8.4) on ns. energian häviättömyyden laki eli *termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö*. Kappaleen saaman lämmön lisäksi se voi saada ulkopuolelta myös muuntuyypistä energiaa, kuten sähköenergiaa. Nämä voidaan lisätä yhtälön vasemmalle puolelle. P tarkoittaa tehoa.

8.3 Kinematiikka

Tarkastelemme seuraavaksi jatkuvan aineen liikettä kinemaattisena eli geometrisena ilmiönä puuttumatta vielä liikkeen syihin. Jatkuva aine jakautuu aina johonkin tilaan. Kontinuumin jokin piste on tällöin infinitesimaaliseen partikkeliin liittyvä *ainepiste* eli *materiaalipiste*. Tilassa on kuitenkin myös samalla tätä ainepistettä vastaava *avaruudellinen* eli *spatiaalinen* piste. Kun tilavuus muodostuu koko ajan samoista partikkeleista, sanotaan, että kyseessä on *suljettu systeemi*. Tilavuuden muoto sen sijaan saa muuttua ajan ja paikan funktiona. Samoista partikkeleista muodostunutta systeemiä kutsutaan myös *kappaleeksi*, jonka avulla esitimme edellä kontinuumimekaniikan aksioomat. Kappaleen liikkuessa sen partikkelien koordinaattien arvot muuttuvat.

Edellä olevan perusteella on siis ilmeistä, että käytettävissä on kaksi tapaa kuvata kontinuumin ajallis-paikallista käyttäytymistä. Jos ajattelemme, että kontinuumin kunkin partikkelin eli ainepisteen liike halutaan määrittää, kiinnitämme kuhunkin ainepisteeseen tietyt koordinaatit, jotka, kun alkutila tunnetaan, antavat ajan funktiona partikkelin sijainnin. Tätä tapaa kutsutaan *Lagrangen*¹ esitystavaksi. Lagrangen esitystapa antaa siis kunkin partikkelin ratakäyrän, jonka riippumattomana muuttujana on aika.

¹Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), italial.-ransk. matemaatikko.

Toisessa tavassa lähtökohtana on avaruuden pisteistä eli spatiaalipisteistä muodostunut systeemi, jossa määritellään kontinuumin ajallis-paikallinen käyttäytyminen. Tällöin avaruuden pisteen koordinaatit ilmoittavat siinä pisteessä kullakin hetkellä olevan partikkelin sijainnin. Kun aika kuluu, tähän pisteeseen tulee uusi partikkeli kontinuumin liikkessa. Tätä esitystapaa kutsutaan *Eulerin* esitystavaksi.

Partikkelimekaniikassa liikkeen geometrinen käsittely noudattaa Lagrangen esitystapaa. Myös jäykän kappaleen mekaniikan tarkasteluissa Lagrangen esitystapa on käyttökelpoinen, koska kappaleen muoto ei lainkaan muutu, toisin sanoen sen eri pisteiden väliset etäisyydet säilyvät samoina kappaleen liiketilasta riippumatta. Kappaleen partikkeleiden sijainti määräytyy pelkästään ajan funktiona. Sen sijaan deformoituvan eli muotoaan muuttavan kappaleen, esimerkiksi virtaavan nesteen, tapauksessa Eulerin esitystapa on käyttökelpoinen, koska tällöin kappaleen eri ainepisteiden väliset etäisyydet muuttuvat ja kappaleen partikkeleiden sijainti muuttuu sekä spatiaalisten paikkakoordinaattien että ajan funktiona. Lagrangen esitystavassa deformoituvan kappaleen kuhunkin pisteeseen liittyvä ainepiste muodostaa ajan funktiona oman ratakäyrän. Koska deformoituvassa kontinuumissa on ainepisteitä ”tuhka tiheässä”, tulisi tällaisen probleemin käsittely työlääksi ja käytännössä mahdottomaksi.

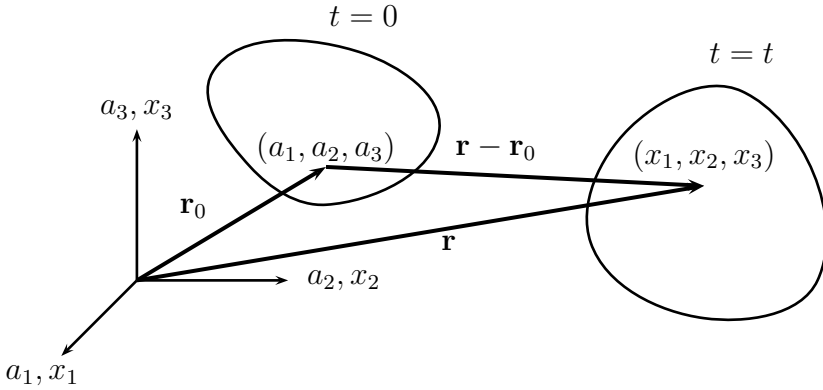
Näitä molempia esitystapoja käytetään kontinuumimekaniikassa. Kun kyseessä on ns. pienten siirtymien teoriaan pohjautuva tarkastelu, Lagrangen esitystapa ja Eulerin esitystapa ovat approksimatiivisesti samat eli Lagrangen esitystapa on silloin riittävä. Suurten siirtymien tarkasteluissa, kuten virtausmekaniikassa ja suurissa plastisissa deformaatioissa, joissa yksittäinen kontinuumin partikkeli voi siirtyä huomattavia matkoja systeemin dimensioihin verrattuna, Eulerin esitystapa on mielekäs.

8.3.1 Lagrangen esitystapa

Tarkastelemme seuraavaksi edellä kuvailtuja esitystapoja kvantitatiivisesti. Kuva 8.1 havainnollistaa käytettäviä merkintöjä. Aloitamme yksinkertaisemmasta eli Lagrangen esitystavasta.

Merkitään systeemin partikkelin alkutilaa ajanhetkellä $t = 0$ \mathbf{r}_0 :lla. Tällöin partikkeliin liittyvän ainepisteen sijainti muuttuu ajan t funktiona relaat

$$(8.5) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$



Kuva 8.1: Lagrangen ja Eulerin esitystavat.

mukaisesti. Toisin sanoen karteesisessa koordinaatistossa yhtälöiden

$$(8.6) \quad \begin{cases} x_1 = x_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_2 = x_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ x_3 = x_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}$$

mukaisesti, missä alkutilan eli referenssiasieman koordinaatteja on merkitty $\mathbf{r}_0 = (a_1, a_2, a_3)$. Yhtälöt (8.6) voidaan esittää lyhyesti tensorimerkinnällä eli indekseillä

$$(8.7) \quad x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t).$$

Yhtälöt (8.6) ja (8.7) antavat kappaleen aseman mielivaltaisella ajan hetkellä. Toisin sanoen kappaleen partikkelilla, jolla oli referenssiasiemassa koordinaatit (a_1, a_2, a_3) , on ajan hetkellä $t = t$ koordinaatit (x_1, x_2, x_3) .

Lagrangen esitystavassa ovat siis riippumattomina muuttujina systeemin alkutilaa kuvaavat koordinaatit (a_1, a_2, a_3) sekä aika t . Tarkastellaan seuraavaksi näistä riippuvan mielivaltaisen funktion $f = f(\mathbf{r}_0, t) = f(a_1, a_2, a_3, t)$ muutosta df

$$(8.8) \quad df = \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} da_2 + \frac{\partial f}{\partial a_3} da_3 + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Mekaniikassa tarkastellaan yleensä tietyn ainealkion eli partikkelin tai kappaleen ajan muuttuessa kokemia muutoksia. Täten tietyille partikkelille muutujat a_1 , a_2 ja a_3 ovat kiinteitä, jolloin niiden differentiaalit ovat nollia

$$(8.9) \quad da_1 = 0, \quad da_2 = 0, \quad da_3 = 0.$$

Kun yhtälö (8.8) jaetaan puolittain ajan differentiaalilla dt ja korvataan näin muodostuvassa *ainederivaatassa* pieni d isolla D :llä, voidaan kirjoittaa

$$(8.10) \quad f \cdot = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Symbolia yläpiste sekä D/Dt nimitetään aineelliseksi aikaderivaataksi eli lyhyemmin *ainederivaataksi*. Tätä merkintätapaa käytimme kontinuumimekaniikan aksiomien esittämisessä. Ainederivaatta nimitys viittaa siihen, että se liittyy ainepartikkelin kokemiin muutoksiin.

Tarkkaavainen lukija voi ihmetellä, miksi olemme ottaneet Lagrangen esityksessä käyttöön uuden merkintätavan aikaderivaatalle, koska yhtälöiden (8.8) ja (8.9) mukaan $d/dt = \partial/\partial t$. Ainederivaatan lauseke saa kuitenkin Eulerin esitystavassa eri muodon, kuten tulemme seuraavassa kohdassa huomaamaan. Koska ainederivaatan tulkinta on sama molemmissa esitystavoin, olemme antaneet sille erityisen merkintätavan.

On helppo osoittaa, että ainederivaatalle pätevät kaikki tavanomaiset derivointilaskusäännöt.

Lagrangen esitystavassa derivaatta ajan suhteen tarkoittaa siis yhtälön (8.10) mukaan operaattorin

$$(8.11) \quad \boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}}$$

kohdistamista funktioihin, jotka voivat olla skalaariarvoisia, vektoriarvoisia tai tensori- ja dyadiarvoisia funktioita.

Mekaanisissa tarkasteluissa ollaan usein kiinnostuneita jonkin partikkelin *nopeudesta, kiihtyvyydestä ja siirtymästä*.

Nopeus saadaan kohdistamalla operaattori (8.11) partikkelin ratakäyrän yhtälöön (8.5). Ratakäyrän yhtälössä partikkelin alkutila eli $\mathbf{r}_0 = (a_1, a_2, a_3)$ on kiinteä ja vain aika t on muuttujana. Tällöin nopeus \mathbf{v} on

$$(8.12) \quad \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot = \frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}.$$

Kiihtyvyys saadaan kohdistamalla operaattori (8.11) nopeuteen \mathbf{v}

$$(8.13) \quad \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t} = \mathbf{r} \cdot \cdot = \frac{D^2 \mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t^2}.$$

Partikkelin ratakäyrän yhtälö (8.5) voidaan esittää myös muodossa (katso kuva 8.1)

$$(8.14) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t),$$

missä $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ on *siirtymävektori*.

Koska alkutila \mathbf{r}_0 ei riipu ajasta, voidaan nopeudelle ja kiihtyvyydelle kirjoittaa myös lausekkeet

$$(8.15) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u}' = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}$$

ja vastaavasti

$$(8.16) \quad \mathbf{a} = \mathbf{u}'' = \frac{D^2\mathbf{u}}{Dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t^2}.$$

Jatkoa ajatellen muodostamme vielä mielivaltaisen funktion f tilavuusintegraalin

$$(8.17) \quad I(t) = \int_{V_0} f(\mathbf{r}_0, t) dV_0$$

ainerivaatan. Saamme

$$(8.18) \quad I' = \frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} f dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial f}{\partial t} dV_0.$$

On huomattava, että vaikka tarkasteltava kappale voi liikkua ajan mukana, on sen tilavuus V_0 alkutilassa ajasta riippumaton. Integraali I riippuu siten ainoastaan ajasta t , jolloin ainederivaattaoperaattorissa (8.11) osittaisderivointi muuttuu tavalliseksi derivoinniksi. Kuitenkin, kun derivointi siirretään integraalimerkin alle, on käytettävä osittaisderivaatan merkkiä, koska funktio f voi riippua sekä paikasta että ajasta. Funktio f voi olla skalaariarvoinen, vektoriarvoinen tai tensori-(dyadi)-arvoinen funktio.

Laitetaan tämä tulos vielä laatikon sisälle

$$(8.19) \quad \boxed{\frac{DI}{Dt} = \int_{V_0} \frac{\partial f}{\partial t} dV_0.}$$

8.3.2 Eulerin esitystapa

Eulerin esitystavassa eli avaruuden spatiaalikoordinaatteihin sidotussa esitystavassa riippumattomina muuttujina ovat *spatiaalikoordinaatit* eli Eulerin koordinaatit x_1, x_2, x_3 sekä aika t . Koordinaatit liittyvät siis avaruuden pisteessä $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ hetkellä t olevaan partikkeliin. Jollakin toisella ajan

hetkellä samassa avaruuden pisteessä onkin jo uusi partikkeli, kun siinä ollut partikkeli on puolestaan kulkeutunut jo uuteen pisteeseen. Voidaan myös ajatella, että yhtälöt (8.7) käännetään eli muodostetaan käänteisfunktiot

$$(8.20) \quad a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t) = a_i(\mathbf{r}, t).$$

Välttämätön ja riittävä ehto käänteisfunktioiden olemassaololle on, että Jacobin funktionaalideterminantti

$$(8.21) \quad J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right|$$

on nolasta eriävä.

Koska Eulerin esitys sidotaan avaruuden koordinaatteihin eikä kappaleen koordinaatteihin, kuten Lagrangen esitystapa, on tavallista, että avaruudesta otetaan tietty kiinteä ajan suhteen muuttumaton ns. *kontrollialue* tai *kontrollitilavuus*, jonka läpi tapahtuvaa kontinuumin liikettä tarkastellaan.

Tarkastelemme liikkuvan eli virtaavan kontinuumin nopeutta \mathbf{v} . Avaruuden pisteissä $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ jollakin ajan hetkellä t olevien partikkelien nopeus muodostaa *nopeuskentän*

$$(8.22) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Kartesisisessa koordinaatistossa nopeuskenttä voidaan esittää muodossa

$$(8.23) \quad \begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t) \end{cases} \quad \text{eli} \quad v_i = v_i(x_1, x_2, x_3, t).$$

Nopeuskenttään liittyen käytetään käsitteitä *virtaviiva*, *rataviiva* ja *juovaviiva*. Virtaviiva on viiva, jonka kuhunkin pisteeseen liittyvä nopeusvektori sivuaa tätä viivaa. Tämä vastaa aiemmin sähkö- ja magneettikenttien yhteydessä käytettyä *kenttäviivan* käsitettä. Rataviiva (engl. path line), ratakäyrä tai polku tarkoittaa tietyn ainepartikkelin kulkemaa rataa. Juovaviiva on viiva, jonka muodostavat tietyn kiinteän pisteen kautta tietyllä ajan hetkellä aikaisemmin kulkeneet partikkelit. *Virtaputken* muodostavat tietyn umpinaisen käyrän jokaisen pisteen kautta kulkevat virtaviivat. Virtaputken pinnan läpi ei tapahdu aineen virtausta, koska aineen nopeusvektori on pinnan jokaisessa pisteessä pinnan suuntainen.

Stationarisessa eli ajan suhteen muuttumattomassa virtauksessa virtaviiva, rataviiva ja juovaviiva yhtyvät. Sen sijaan epästationarisessa tilanteessa ne eivät yleensä ole samoja viivoja.

Muodostetaan seuraavaksi Eulerin esitystavan mukainen aineellinen aikaderivaatta mielivaltaiselle funktiolle $f = f(\mathbf{r}, t) = f(x_1, x_2, x_3, t)$. Funktion muutos eli kokonaisdifferentiaali on

$$(8.24) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Ajassa dt tietty ainepartikkeli etenee matkan $d\mathbf{r}$ eli kokee differentiaalisen siirtymän, jonka komponentit ovat

$$(8.25) \quad dx_1 = v_1 dt, \quad dx_2 = v_2 dt, \quad dx_3 = v_3 dt.$$

Sijoitetaan nämä lausekkeet yhtälöön (8.24) ja jaetaan yhtälö puolittain ajan differentiaalilla dt sekä otetaan käyttöön derivaatan merkintätapa, jossa pikku d korvataan isolla D :llä. Tällöin saadaan yhtälö

$$(8.26) \quad f' = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Tämä on *ainerivaatta*, joka ilmaisee funktion muutoksen kuljettaessa virtauksen mukana eli tietyn partikkelin mukana kulkevan havaitsijan mittama aikaderivaatta. Ainerivaatta voidaan kirjoittaa koordinaatistosta riippumattomaan muotoon

$$(8.27) \quad f' = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f,$$

josta nähdään, että vastaava ainerivaatan derivaattaoperaattori on

$$(8.28) \quad \boxed{\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla .}$$

Tämä operaattori voidaan kohdistaa skalaariarvoisiin, vektoriarvoisiin sekä tensori- ja dyadiarvoisiin funktioihin.

Termiä $\partial f / \partial t$ kutsutaan *lokaaliseksi* muutosnopeudeksi ja termiä $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ *konvektiiviseksi* muutosnopeudeksi. Lokaalinen termi siis kuvaa sitä, miten funktio riippuu ajasta tarkastelupisteessä. Konvektiivinen termi ilmaisee funktion muutoksen spatiaalikoordinaattien suhteen liikuttaessa virtauksen mukana.

Kohdistamme Eulerin esitystavan mukaisen ainerivaatan nopeusfunktioon, jolloin saadaan kiihtyvyys

$$(8.29) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Huomaamme, että Eulerin esitystavassa kiihtyvyydestä tulee nopeuden epälineaarinen funktio johtuen termistä $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Tämä epälineaarisuus on yksi varsin suurta hankaluutta aiheuttava tekijä.

Jatkoa ajatellen esitetään vielä mielivaltaisen funktion f tarkasteltavan kappaleen yli otetun tilavuusintegraalin Eulerin esitystavan mukainen aine-derivaatta

$$(8.30) \quad \begin{aligned} \dot{I} &= \frac{DI}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_V f dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right] dV. \end{aligned}$$

Tämä on *Reynoldsin*² kuljetuslauseen nimellä tunnettu relaatio. Tarkastelemme tämän matemaattista johtamista seuraavaksi. Johto ei ole aivan triviaali.

Käytämme hyväksi tilavuusintegraalin muuttujan vaihdokseen liittyvää matemaattista lausetta

$$(8.31) \quad \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_0} f(\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t) J(\mathbf{r}_0, t) dV_0,$$

missä J on Jacobin funktionaalideterminantti ja V_0 alkuhetkellä $t = 0$ oleva kappaleen tilavuus; siis vakio. Kappaleen tilavuus V mielivaltaisella hetkellä on puolestaan ajan funktio, jota korostamme merkinnällä $V = V(t)$.

Differentiaalinen tilavuusalkio dV voidaan kirjoittaa siten alkutilan ($t = 0$) differentiaalisen tilavuusalkion dV_0 ja Jacobin funktionaalideterminantin avulla

$$(8.32) \quad dV = J dV_0 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} da_1 da_2 da_3.$$

Tämä muunnos tarkoittaa sitä, että alkutilan suorakulmaisen suuntaissärmiön muotoinen tilavuuden differentiaalialkio kokee virtauksen mukana muodonmuutoksen yleiseksi vinokulmaiseksi särmiöksi. Jacobin funktionaalideterminantti on

$$(8.33) \quad J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial a_1 & \partial x_1 / \partial a_2 & \partial x_1 / \partial a_3 \\ \partial x_2 / \partial a_1 & \partial x_2 / \partial a_2 & \partial x_2 / \partial a_3 \\ \partial x_3 / \partial a_1 & \partial x_3 / \partial a_2 & \partial x_3 / \partial a_3 \end{vmatrix}.$$

²Osborne Reynolds (1842–1912), irlantilainen insinööri.

Muodostamme seuraavaksi Jacobin funktionaalideterminantin ainederivaatan. Determinanttifunktion derivaatta tulee muodostumaan kolmen determinantin summasta tulon derivoimissäännön perusteella. Ensimmäisen determinantin vaakarivillä ovat funktionaalideterminantin (8.33) ensimmäisen vaakarivin alkioiden derivaatat. Toisen determinantin toisella vaakarivillä ovat funktionaalideterminantin toisen vaakarivin derivaatat ja vastaavasti kolmannen determinantin kolmannella vaakarivillä ovat vastaavat termit. Muut alkioit ovat aina samat kuin Jacobin funktionaalideterminantissa. Näin saadaan

$$(8.34) \quad \frac{DJ}{Dt} = \frac{D}{Dt} \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial a_1 & \partial x_1 / \partial a_2 & \partial x_1 / \partial a_3 \\ \partial x_2 / \partial a_1 & \partial x_2 / \partial a_2 & \partial x_2 / \partial a_3 \\ \partial x_3 / \partial a_1 & \partial x_3 / \partial a_2 & \partial x_3 / \partial a_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{D}{Dt} \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix}.$$

Esimerkiksi ensimmäisen determinantin ensimmäisen alkion derivaataksi saadaan

$$(8.35) \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_1}{\partial a_1} \right) = \frac{\partial}{\partial a_1} \frac{Dx_1}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial a_1}.$$

Vastaavasti muille alkioille. Nopeuden x_1 -komponentti on $v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$. Tämän derivaatta a_1 :n suhteen voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(8.36) \quad \frac{\partial v_1}{\partial a_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_1}.$$

Vastaavanlaiset termit saadaan v_1 :n osittaisderivaatoille a_2 :n ja a_3 :n suhteen sekä edelleen myös vastaavasti nopeuden v_2 - ja v_3 -komponenteille. Sijoittamalla kaavan (8.36) muotoiset lausekkeet yhtälön (8.34) ensimmäiseen determinanttiin saadaan

$$(8.37) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix}.$$

Tämä on puolestaan kolmen determinantin summa. Kussakin determinantissa on yhteinen tekijä ensimmäisellä vaakarivillä. Kun tämä yhteinen tekijä otetaan determinantin eteen, huomataan, että kaksi jälkimmäistä determi-

nanttia häviävät, koska niissä on kaksi samaa vaakariviä. Toisin sanoen determinantti (8.37) saadaan seuraavien kolmen determinantin summana

$$(8.38) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_1}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial a_1} & \frac{\partial x_3}{\partial a_2} & \frac{\partial x_3}{\partial a_3} \end{vmatrix},$$

joista kaksi jälkimmäistä determinanttia häviävät, koska niissä on kaksi identtistä vaakariviä. Tekemällä vastaava tarkastelu yhtälön (8.34) kahden jälkimmäisen determinantin osalta, jolloin tulevat käyttöön nopeuden v_2 - ja vastaavasti v_3 -komponentit, päädytään näin lopulta yhtälöön

$$(8.39) \quad \frac{DJ}{Dt} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) J = \nabla \cdot \mathbf{v} J,$$

minkä ja yhtälön (8.32) avulla saadaan tärkeä relaatio

$$(8.40) \quad \boxed{\frac{D}{Dt} dV = \nabla \cdot \mathbf{v} dV.}$$

Huomautus. Edellä oleva tarkastelu voitaisiin tehdä kaaviomuodossa esitettävien determinanttifunktioiden sijasta myös tensorilaskennalla. Jacobin funktionaalideterminantti on tensorimerkinnöin

$$(8.41) \quad J = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_1} \frac{\partial x_j}{\partial a_2} \frac{\partial x_k}{\partial a_3},$$

missä ϵ_{ijk} on Levi-Civitan ϵ -tensori (2.178). Kaaviomuotoinen determinanttifunktioiden esitys lienee tässä yhteydessä kuitenkin pituudestaan huolimatta havainnollisempi. ■

Voimme nyt esittää Reynoldsin kuljetuslauseen (8.30) käyttäen hyväksi lausetta (8.31). Ainederivaataksi saamme

$$(8.42) \quad \begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV &= \frac{D}{Dt} \int_{V_0} f[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t] J dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{Df}{Dt} J + f \frac{DJ}{Dt} \right) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{Df}{Dt} + f (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) J dV_0 \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) dV. \end{aligned}$$

Viimeisestä muodosta saadaan Reynoldsin kuljetuslause (8.30), kun sovelletaan ainederivaatan lauseketta $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Laitettakoon Reynoldsin kuljetuslause vielä laatikon sisään korostaaksemme sen keskeistä asemaa kontinuumimekaniikan kenttäyhtälöiden johtamisessa

$$(8.43) \quad \boxed{\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{v}) \right] dV.}$$

Huomaa, että $V(t)$ on ajan hetkellä t oleva tilavuus. Tilavuus muuttuu siis ajan funktiona. Kun tilavuusintegraalissa integrointi paikkakoordinaattien suhteen ajatellaan tehdyksi kullakin ajanhetkellä, riippuu tilavuusintegraali tämän jälkeen ainoastaan ajasta. V_0 on ajan suhteen vakio alkutilan tilavuus. Huomaa lisäksi, että funktion $f[\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), t]$ ainoat riippumattomat muuttujat ovat aika t ja \mathbf{r}_0 . Reynoldsin kuljetuslauseetta voidaan soveltaa skalaariarvoisiin, vektoriarvoisiin sekä tensori- ja dyadiarvoisiin funktioihin.

On huomattava, että Lagrangen ja Eulerin esitystavat ovat yleisesti käytökelpoisia kaikkialla kontinuumimekaniikassa, ja ne saadaan pelkästään kinemaattisen tarkastelun perusteella. Mitään muuta oletusta väliaineesta ei ole tehty kuin että se muodostaa kontinuumin. Varsinkin Eulerin esitystapa tulee olemaan ahkerassa käytössä, koska sitä sovelletaan yleensä virtausmekaniikassa.

Jatkon kannalta on erittäin tärkeää ymmärtää ja sisäistää Lagrangen ja Eulerin esitystavat ja varsinkin niiden ero.

8.4 Kontinuumin muodonmuutos

Kontinuumimekaniikan tarkasteluissa ainekappaleen muodonmuutokset ovat keskeisellä sijalla. Tarkasteltavan kappaleen liikkeen johdosta kappaleen muoto yleensä muuttuu. Toisin sanoen tapahtuu muodonmuutos eli deformaatio. Yleisesti kontinuumin liike muodostuu kolmesta osasta. Nämä ovat etenevä liike eli translaatioliike, pyörimisliike eli rotaatio sekä muodonmuutoksesta (venymästä) aiheutuva liike.

8.4.1 Deformaatiogradientit ja siirtymägradientit

Aluksi määritellään kaksi käsitettä, jotka saadaan Lagrangen ainepisteen koordinaattien ja Eulerin spatiaalikoordinaattien avulla. Muodostamalla lausekkeen (8.7) osittaisderivaatat a_j :n suhteen saadaan tensori $\partial x_i / \partial a_j$, jota kutsutaan Lagrangen *aineelliseksi deformaatiogradientiksi*. Vastaavasti muodostamalla lausekkeen (8.20) osittaisderivaatat x_j :n suhteen saadaan tensori

$\partial a_i / \partial x_j$, jota kutsutaan Eulerin *spatiaaliseksi deformaatiogradientiksi*. Näiden välillä on derivoinnin ketjusääntöä käyttäen olemassa yhteys

$$(8.44) \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial a_k} = \delta_{ik},$$

missä δ_{ik} on Kroneckerin δ -tensori (2.177).

Siirtymävektorin u_i osittaisderivaattojen avulla saadaan (Lagrangen) *aineellinen siirtymägradientti* $\partial u_i / \partial a_j$ ja vastaavasti (Eulerin) *spatiaalinen siirtymägradientti* $\partial u_i / \partial x_j$. Merkitään siirtymävektoria $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ indeksimerkinnällä $u_k = x_k - a_k$. Tämän avulla voidaan Lagrangen aineelliseksi siirtymägradientiksi kirjoittaa

$$(8.45) \quad \frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} - \delta_{ij}$$

ja vastaavasti Eulerin spatiaaliseksi siirtymägradientiksi

$$(8.46) \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Huomataan vielä jatkoa ajatellen, että siirtymägradienttitensorit voidaan jakaa symmetriseen ja antisymmetriseen osaan yhtälön (2.176) perusteella.

8.4.2 Deformaatiotensorit ja äärelliset venymätensorit

Kuvassa 8.2 esitetään kappale alkuperäisessä deformoitumattomassa ja deformoituneessa tilanteessa eli konfiguraatiossa. Kontinuumin pisteen P_0 siirtymävektori on \mathbf{u} , joka siirtää sen pisteeksi P . Olkoon pisteen P_0 lähellä oleva piste Q_0 , joka on siitä differentiaalisen etäisyyden $d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{a}$ etäisyydellä. Tällöin pisteen Q_0 siirtymävektori on $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$, joka siirtää sen pisteeksi Q .

Pisteiden P_0 ja Q_0 differentiaalisen etäisyyden neliö on

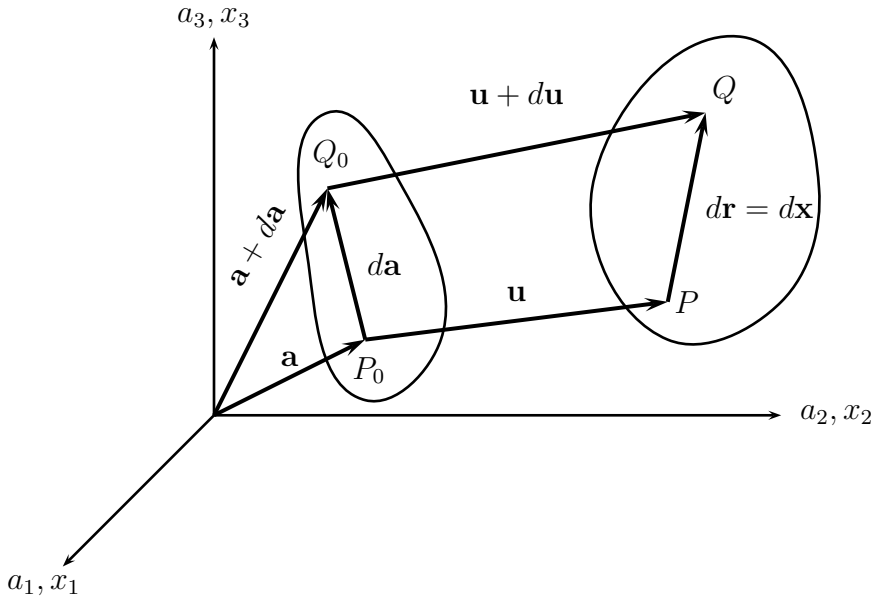
$$(8.47) \quad (dr_0)^2 = (da)^2 = d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = da_i da_i = \delta_{ij} da_i da_j.$$

Differentiaali da_i voidaan edelleen riippuvuuden (8.20) mukaan kirjoittaa

$$(8.48) \quad da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Neliöt $(dr_0)^2 = (da)^2$ voidaan näin ollen saattaa muotoon

$$(8.49) \quad (da)^2 = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dx_i dx_j = C_{ij} dx_i dx_j,$$



Kuva 8.2: Kappaleen deformaatio.

missä toisen kertaluvun tensori

$$(8.50) \quad C_{ij} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

on nimeltään *Cauchyn*³ *deformaatiotensori*.

Deformoituneessa konfiguraatiossa differentiaalisen elementin $d\mathbf{r}$ neliö on

$$(8.51) \quad d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dr)^2 = (dx)^2 = dx_i dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j.$$

Käyttämällä yhteyttä (8.7) saadaan

$$(8.52) \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j.$$

Tämän avulla saadaan neliöksi $(dx)^2$

$$(8.53) \quad (dx)^2 = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} da_i da_j = G_{ij} da_i da_j,$$

³Augustin Cauchy (1789–1857), ransk. matemaatikko.

missä toisen kertaluvun tensori

$$(8.54) \quad G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j}$$

on nimeltään *Greenin deformaatiotensori*.

Deformaation mittana käytetään erotusta $(dx)^2 - (da)^2$. Jos tämä erotus on nolla kaikkialla kontinuumissa, kyseessä on *jäykän* kappaleen siirtymä. Käyttäen yhtälöitä (8.53) ja (8.47) tämä erotus voidaan kirjoittaa muotoon

$$(8.55) \quad (dx)^2 - (da)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right) da_i da_j = 2L_{ij} da_i da_j,$$

jossa toisen kertaluvun tensori

$$(8.56) \quad L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right)$$

on nimeltään *Lagrangen* (tai *Greenin*) *äärellinen venymätensori*, (engl. Lagrangian finite strain tensor).

Eulerin esitystavassa erotukselle $(dx)^2 - (da)^2$ saadaan lausekkeiden (8.51) ja (8.49) mukaisesti

$$(8.57) \quad (dx)^2 - (da)^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = 2E_{ij} dx_i dx_j,$$

missä toisen kertaluvun tensori

$$(8.58) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right)$$

on nimeltään *Eulerin äärellinen venymätensori*, (engl. Eulerian finite strain tensor).

Äärelliset venymätensorit (8.56) ja (8.58) voidaan esittää myös siirtymägradienttien avulla. Sijoittamalla $\partial x_i / \partial a_j$ yhtälöstä (8.45) yhtälöön (8.56) saadaan Lagrangen äärellinen venymätensori algebrallisten toimenpiteiden jälkeen muotoon

$$(8.59) \quad L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_k}{\partial a_i} \frac{\partial u_k}{\partial a_j} \right).$$

Vastaavasti sijoittamalla $\partial a_i / \partial x_j$ yhtälöstä (8.46) yhtälöön (8.58) saadaan Eulerin äärellinen venymätensori muotoon

$$(8.60) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Huomautus. Englanninkieliset termit *deformation* ja *strain* suomennetaan usein muodonmuutokseksi. Tässä esityksessä on käytetty muodonmuutosta eli deformaatiota paitsi yleismerkityksellisenä terminä, myös erityisesti lausekkeeseen $(dx)^2$ tai vastaavaan liittyvänä käsitteenä. Termi strain on suomennettu venymäksi, ja sillä tarkoitetaan erityisesti lausekkeeseen $(dx)^2 - (da)^2$ tai vastaavaan liittyviä käsitteitä. Venymä-nimitys voi olla hieinan rajoittunut, koska se luo mielikuvan yksidimensioisesta pituuden venymästä (tai kutistumasta). Näin ei siis kuitenkaan ole, vaan kysymys on tensorisuureesta. ■

8.5 Kontinuumimekaniikan kenttäyhtälöt

Seuraavaksi voimme koota kontinuumimekaniikan kenttäyhtälöt, jotka kuvaavat tiettyssä tilavuudessa olevan massan (aineen), liikemäärän, liikemäärämomentin ja energian säilymistä.

8.5.1 Massan säilyminen

Otetaan kontinuumista jokin mielivaltainen ajan suhteen mahdollisesti muuttuva tilavuus V , jota rajoittaa umpinainen pinta S . Tilavuudessa olevan aineen massatiheys on $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Tarkastellaan tilannetta, jossa tilavuudessa ovat koko ajan samat massa-alkiot eli massapartikkelit. Tällöin kyseessä on siis suljettu systeemi eli kappale. Kappaleen kokonaismassa on

$$(8.61) \quad m = \int dm = \int_V \rho dV,$$

jossa integrointi suoritetaan luonnollisesti kappaleen täyttämän avaruuden osan V yli. Massan säilymisen periaatteen (8.1) mukaisesti voidaan kirjoittaa käyttäen ainederivaatan symbolia D/Dt

$$(8.62) \quad \boxed{\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0.}$$

Suljetun systeemin käsite vaatii makroskooppiselta kannalta tarkennuksen. Kiinteän aineen osalta siihen ei liity sanottavaa probleemia, mutta nesteiden (ja kaasujen) ollessa kyseessä, on systeemin rajapinnan eli tilavuutta rajoittavan umpinaisen pinnan läpi tietty massavirta, joka aiheutuu partikkelien (molekyyliden) satunnaisliikkeestä. Sen johdosta tilavuuteen tulee ympäristöstä rajapinnan läpi massapartikkeleita (ainehiukkasia) ja toisaalta ympäristöön siirtyy systeemin massapartikkeleita.

8.5.2 Liikemäärän tase

Kontinuumikappaleeseen vaikuttavat ulkoiset voimat ovat *massavoimia* ja *pintavoimia*.

Massavoimat

Massavoimat vaikuttavat massa-alkioihin ja ne ovat useimmiten gravitaatiosta aiheutuvia. Myös sähkömagneettisen kentän Lorentzin voima (6.16) on massavoima. Massavoima voidaan ilmaista kahdella tavalla, toisaalta massavoimana massaa kohti ja toisaalta massavoimana tilavuutta kohti. Massavoimaa massaa kohti merkitään symbolilla \mathbf{b} , yksikkönä N/kg. Massavoimaa tilavuutta kohti merkitään symbolilla \mathbf{f} , jonka yksikkönä on N/m³. Näin ollen itse massavoimalle pätee $\mathbf{b} dm = \mathbf{f} dV$, josta yhteyden $dm = \rho dV$ perusteella saadaan

$$(8.63) \quad \mathbf{f} = \rho \mathbf{b}.$$

Massavoimaa kutsutaan myös *kappalevoimaksi*. Kappaleeseen vaikuttava kokonaismassavoima eli massavoimien resultantti on

$$(8.64) \quad \mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{b} dm = \int_V \rho \mathbf{b} dV = \int_V \mathbf{f} dV.$$

Pintavoimat

Pintavoimat vaikuttavat tarkasteltavan kappaleen pinnalla. Pintavoimia kutsutaan myös *kosketusvoimiksi*, koska ne esittävät tilavuuden rajoittaman kappaleen ympäristön eli kappaleen viereisen kappaleen vaikutuksen kappaleeseen pintojen kosketuksen johdosta. Pintavoimat ilmaistaan pinta-alaa kohti ja merkitään symbolilla \mathbf{t} , yksikkönä N/m². Näin ollen differentiaaliseen pinta-alkioon dS vaikuttaa voima $\mathbf{t} dS$.

Vektoria \mathbf{t} kutsutaan myös *traktioksi* tai *jännitysvektoriksi*. Jännitysvektori-nimitys ei ole kuitenkaan täysin onnistunut, koska sen voi sotkea *jännitykseen*, joka on yleisesti tensoriarvoinen (tai dyadiarvoinen) paikan ja ajan funktio. Palaamme jännitykseen seuraavassa kohdassa.

Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten pintavoimien resultantti on

$$(8.65) \quad \mathbf{F}_S = \oint_S \mathbf{t} dS,$$

jossa integrointi suoritetaan kappaleen pinnan S yli.

Jännitys

Kuten jo todettiin, jännitys on tensoriarvoinen paikan ja ajan funktio, joka voidaan esittää myös dyadien avulla $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\mathbf{r}, t)$. Jännityksen käsitettä konkretisoidaan yleensä määrittelemällä ns. *normaalijännitys* jotakin pintaa vastaan kohtisuoraan vaikuttavan voiman ja pinnan pinta-alan suhteen, kun pinta-ala kutistetaan pieneksi. Toisin sanoen skalaarimerkinnöin ilmaistuna normaalijännitys on

$$(8.66) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\perp}}{\Delta S} = \frac{dF_{\perp}}{dS},$$

missä ΔF_{\perp} on pinta-alkiota ΔS vastaan kohtisuorassa oleva voiman \mathbf{F} komponentti. Normaalijännityksen yksikkö on siten $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ eli pascal⁴. Normaalijännitys vastaa traktion normaalikomponenttia.

Pinnan suuntainen voiman komponentti aiheuttaa *leikkausjännityksen*, joka skalaarimerkinnöin ilmaistuna on

$$(8.67) \quad \tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\parallel}}{\Delta S} = \frac{dF_{\parallel}}{dS},$$

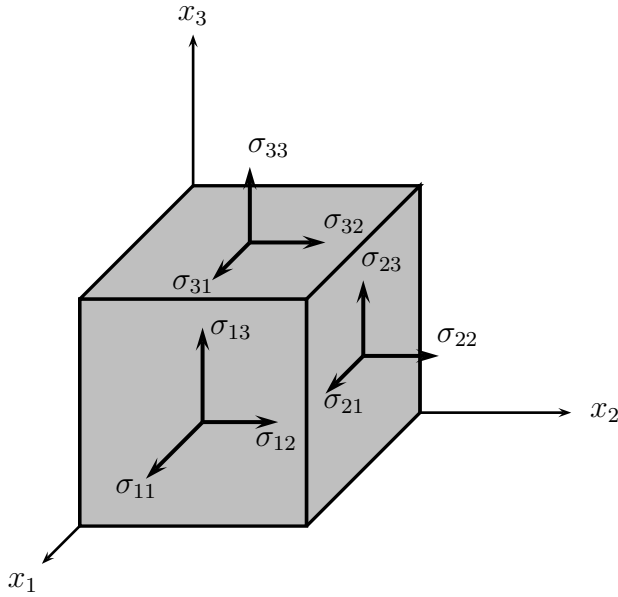
missä ΔF_{\parallel} on pinta-alkion ΔS suuntainen voiman \mathbf{F} komponentti. Myös leikkausjännityksen yksikkö on $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$. Leikkausjännitys vastaa traktion tangentiaalikomponenttia. Voimme siis kirjoittaa

$$(8.68) \quad \sigma^2 + \tau^2 = |\mathbf{t}|^2.$$

Näin määriteltyinä normaalijännitys ja leikkausjännitys ovat kussakin kontinuumin pisteessä vaikuttavia jännityksiä.

Koska kontinuumi on kolmiulotteinen tila, voidaan pinta-alkio ΔS valita kontinuumiin kussakin pisteessä äärettömän monella tavalla. Siksi on tarpeen sopia, miten jännityksiä ja sen komponentteja merkitään. Käytössä on useita erilaisia tapoja. Yleisesti normaalijännityksiä merkitään alaindeksillä, joka osoittaa tasoa vastaan kohtisuorassa olevan voiman vektorikomponentin vaikutussuunnan. Leikkausjännityksen kohdalla tarvitaan kaksi alaindeksiä, jotta jännitys tulee yksikäsitteisesti määritellyksi. Ensimmäinen alaindeksi ilmoittaa leikkaustason normaalin suunnan ja toinen tasolla olevan voiman vektorikomponentin vaikutussuunnan. On olemassa myös juuri päinvastaisiakin käytäntöjä. Myös normaalijännitys merkitään usein kahdella samalla alaindeksillä. Tällöin leikkausjännityksille käytetään τ :n sijasta samaa kirjainsymbolia kuin normaalijännityksille eli useimmiten tunnusta σ . Kuvassa 8.3 käytetään juuri tätä merkintätapaa.

⁴Yksikkö on nimetty ranskalaisen matemaatikon Blaise Pascalin (1623–1662) mukaan.



Kuva 8.3: Jännitystensorin komponentit infinitesimaalisen suorakulmisen parallelepipedin taakoilla.

Normaalijännitystä pidetään positiivisena, jos se on *vetojännitystä* eli jos voima on tahkolla, jonka ulkoinen normaali on positiivisen koordinaattiakselin suuntainen ja negatiivisena, jos se on *puristusjännitystä*. Kuitenkin juuri geomekaniikassa ja kalliomekaniikassa on tapana tehdä edellä mainittu merkisopimus päinvastoin, koska niissä normaalijännitykset ovat useimmiten puristusta. Teorian esittämisen kannalta tällä merkkisopimuksella ei ole merkitystä. Sen sijaan käytännön laskujen suorittamisen kannalta merkkivalinta tulee tehdä ja pitäytyä siinä.

Jännitysdyadi voidaan määritellä komponenteittain seuraavasti

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\sigma}} = & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \sigma_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \tau_{12} + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \tau_{13} \\
 (8.69) \quad & + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \tau_{21} + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \sigma_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \tau_{23} \\
 & + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \tau_{31} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \tau_{32} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \sigma_3.
 \end{aligned}$$

tai, kuten kuvassa 8.3,

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{\sigma}} = & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \sigma_{11} + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \sigma_{12} + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \sigma_{13} \\
 (8.70) \quad & + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \sigma_{21} + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \sigma_{22} + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \sigma_{23} \\
 & + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \sigma_{31} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \sigma_{32} + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \sigma_{33}.
 \end{aligned}$$

Vektorit

$$(8.71) \quad \begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)} &= \sigma_1 \mathbf{e}_1 + \tau_{12} \mathbf{e}_2 + \tau_{13} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(2)} &= \tau_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 + \tau_{23} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(3)} &= \tau_{31} \mathbf{e}_1 + \tau_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

tai vastaavasti

$$(8.72) \quad \begin{aligned} \mathbf{t}^{(1)} &= \sigma_{11} \mathbf{e}_1 + \sigma_{12} \mathbf{e}_2 + \sigma_{13} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(2)} &= \sigma_{21} \mathbf{e}_1 + \sigma_{22} \mathbf{e}_2 + \sigma_{23} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(3)} &= \sigma_{31} \mathbf{e}_1 + \sigma_{32} \mathbf{e}_2 + \sigma_{33} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ovat traktioita (kuva 8.4). Suluissa oleva yläindeksi 1, 2, 3 ilmoittaa pinnan normaalin suunnan karteesisessa koordinaatistossa, jonka akselien yksikkövektorit ovat $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Voidaan osoittaa, että pinnan, jonka ulkonormaaliksiyksikkövektori on \mathbf{n} , traktiolle pätee yleisesti

$$(8.73) \quad \mathbf{t}^{(-n)} = -\mathbf{t}^{(n)},$$

jossa siis $-\mathbf{n}$ on sisänormaalien suuntainen yksikkövektori. Luonteeltaan tässä on kyseessä rajapintaehto, jonka mukaan traktio vaihtaa suuntansa, kun ko. pisteeseen liittyvän pinta-alkion ulkoinen normaali vaihtaa suuntansa.

Edelleen mielivaltaiseen pinta-alkioon, jonka ulkonormaaliksiyksikkövektori on $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, vaikuttava traktio voidaan esittää muodossa

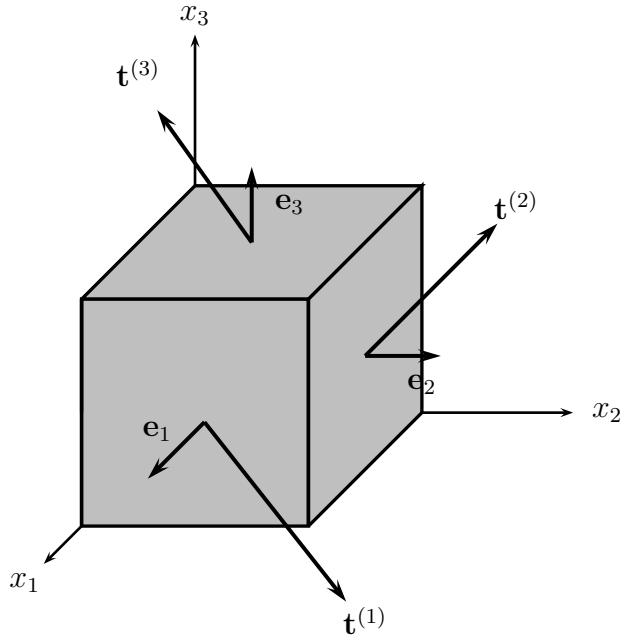
$$(8.74) \quad \mathbf{t} = n_1 \mathbf{t}^{(1)} + n_2 \mathbf{t}^{(2)} + n_3 \mathbf{t}^{(3)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{t}^{(1)} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{t}^{(2)} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{t}^{(3)}.$$

Tämä nähdään, kun sovelletaan liikemäärän taseen periaatetta (käsitellään tarkemmin hieman myöhemmin) kuvan 8.5 infinitesimaaliseen tetraedriin, jonka yhden tahkon ulkonormaali on \mathbf{n} ja koordinaattitasojen suuntaisten sivutahkojen ulkonormaalit ovat $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2$ ja $-\mathbf{e}_3$. Olkoon pinta-alkion ABC , jonka ulkonormaali on \mathbf{n} , differentiaalinen pinta-ala dS . Tällöin sivutahkojen differentiaaliset pinta-alat ovat

$$(8.75) \quad \begin{aligned} dS_{BPC} &= dS_1 = dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1), \\ dS_{APC} &= dS_2 = dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2), \\ dS_{APB} &= dS_3 = dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Tetraedrin tilavuus on

$$(8.76) \quad dV = \frac{1}{3} h dS,$$



Kuva 8.4: Traktiot infinitesimaalisen suorakulmaisen paralleelipipedin tahkoilla.

missä h on tetraedrin korkeus eli tahkopinnan ABC , jonka ulkonormaali on \mathbf{n} , etäisyys muiden tahkojen yhteisestä leikkauspisteestä P . Kun sovelletaan liikemäärän taseyhtälöä, voidaan kirjoittaa

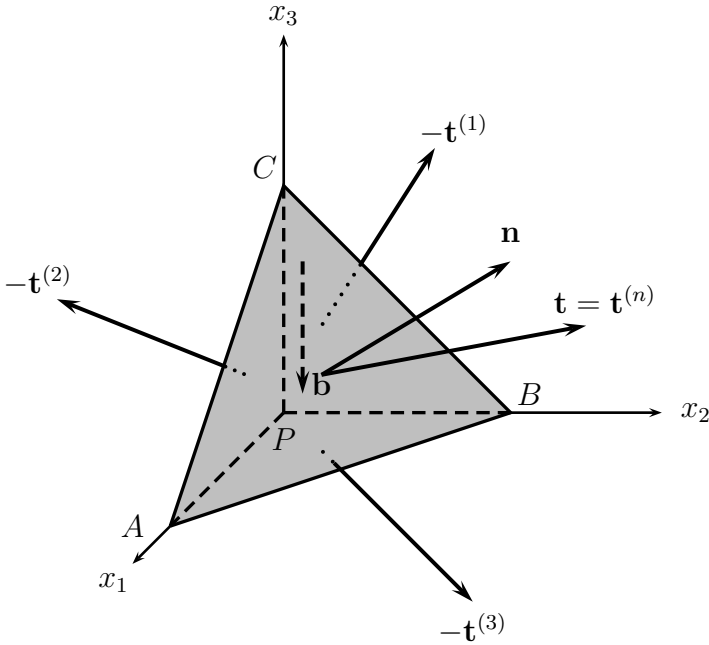
$$(8.77) \quad \mathbf{t}^{(n)} dS - \mathbf{t}^{(1)} dS_1 - \mathbf{t}^{(2)} dS_2 - \mathbf{t}^{(3)} dS_3 + \rho \mathbf{b} dV = \rho dV \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

Kun tähän sijoitetaan lausekkeet (8.75) ja (8.76) ja annetaan korkeuden h lähestyä nollaa, saadaankin yhtälö (8.74), joka on siis voimassa pisteessä P .

Huomaa, että kappalevoimat \mathbf{b} , kuten mahdolliset hitausvoimatkin häviävät, kun h lähestyy nollaa ja jäljelle jää vain pintavoimien vaikutus. Kappale- ja hitausvoimat ovat nimittäin verrannollisia tetraedrin karakteristisen mitan kolmanteen potenssiin. Kun tetraedri kutistetaan muotonsa säilyttäen infinitesimaalisen pieneksi, lähestyvät kappalevoimat ja hitausvoimat voimakkaammin nollaa kuin pintavoimat, jotka vaimenevat suhteessa karakteristisen mitan neliöön. Huomaa, että yhtälö (8.77) pätee siten sekä kiinteän aineen mekaniikassa että nesteiden mekaniikassa.

Näin ollen traktion ja jännityksen välinen yhteys on

$$(8.78) \quad \boxed{\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}.}$$



Kuva 8.5: Traktion ja jännityksen yhteys.

Pintavoima $d\mathbf{F}_S$ on tällöin

$$(8.79) \quad d\mathbf{F}_S = d\mathbf{S} \cdot \bar{\bar{\sigma}},$$

josta saadaan erityisesti kappaleen pintaan kohdistuva kokonaispintavoima integraalina

$$(8.80) \quad \mathbf{F}_S = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \bar{\bar{\sigma}}.$$

Seuraavassa kohdassa esiteltävän liikemäärämomentin taseen periaatteen avulla voidaan osoittaa, että jännitysdyadi on symmetrinen. Toisin sanoen parittaiset leikkausjännityskomponentit ovat yhtäsuuria

$$(8.81) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{eli} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Varsinkin nestemekaniikassa ja plastisen deformaation tarkasteluissa on tavallista, että jännitysdyadin normaalijännityskomponentit esitetään muodossa

$$(8.82) \quad \sigma_1 = -p + \sigma_1^*, \quad \sigma_2 = -p + \sigma_2^*, \quad \sigma_3 = -p + \sigma_3^*,$$

jossa suuretta

$$(8.83) \quad p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

kutsutaan *paineeksi*. Muita suureita σ_1^* , σ_2^* , σ_3^* sekä leikkausjännityksiä τ_{ij} ($i \neq j$) kutsutaan *deviaatiojännityskomponenteiksi*.

Deviaationormaalijännityskomponenteille pätee yhtälön (8.83) perusteella

$$(8.84) \quad \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* = 0.$$

Jos $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, vastaa edellä määritelty paine *hydrostaattista painetta*, jolloin $\sigma = -p$. Hydrostaattisen paineen alaisen, aineominaisuuksiltaan isotrooppisen ja homogeenisen, kappaleen koko muuttuu, mutta sen muoto säilyy samana. Sen sijaan deviaatiojännityskomponentit aiheuttavat kappaleen muodon muuttumisen. Palaamme jännitykseen ja sen aikaansaamiin muutoksiin kappaleessa vielä useissa yhteyksissä. Esimerkiksi pääjännityksen käsite esitetään kalliomekaniikan kenttäteorian yhteydessä kohdassa 9.4.3 sivulla 350. Voimme nyt lopuksi esittää otsikossa mainitun liikemäärän taseen periaatteen.

Huomautus. Kuten jo olemme omaksuneet, usein on tarkoituksenmukaista merkitä leikkausjännityksiä τ_{ij} myös kirjaimella σ_{ij} . Tällöin siis, kun $i = j$, on kysymys normaalijännityksestä ja kun $i \neq j$ leikkausjännityksistä. Tässä kirjassa käytämme jatkossa lähes yksinomaan tätä merkintätapaa. ■

Liikemäärän taseen periaatteen matemaattinen esitysmuoto

Esitetään ensiksi liikemäärän \mathbf{p} määritelmä

$$(8.85) \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{v} \, dm = \int_V \rho \mathbf{v} \, dV.$$

Liikemäärän yksikkö on kgm/s.

Liikemäärän taseen periaatteen mukaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutos eli

$$(8.86) \quad \boxed{\mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S = \int_V \rho \mathbf{b} \, dV + \oint_S \mathbf{t} \, dS = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV.}$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan yhteys (8.78) ja sovelletaan dyadeja koskevaa Gaussin lausetta, voidaan pintaintegraali muuntaa tilavuusintegraaliksi.

Täten saadaan

$$(8.87) \quad \boxed{\int_V (\rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}}) dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV.}$$

8.5.3 Liikemäärämomentin tase

Edellä selvitimme, että kontinuumiin vaikuttavien ulkoisten voimien resultantit ovat massavoima \mathbf{F}_V ja pintavoima \mathbf{F}_S .

Momentin määritelmän ($\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$) mukaan voidaan kirjoittaa massa-voimien momentille

$$(8.88) \quad \mathbf{M}_V = \int \mathbf{r} \times \mathbf{b} dm = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV$$

ja vastaavasti pintavoimien momentille

$$(8.89) \quad \mathbf{M}_S = \oint \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS.$$

Näissä momentti on laskettu systeemin origon suhteen. Momentin yksikkö on Nm.

Liikemäärämomentti \mathbf{L} määritellään yhtälöllä

$$(8.90) \quad \mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV.$$

Liikemäärämomentin yksiköksi tulee siten kgm^2/s .

Liikemäärämomentin taseen periaate lausuu, että kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien momenttien resultantti \mathbf{M} kiinteän pisteen suhteen on yhtä suuri kuin kappaleen saman kiinteän pisteen suhteen lasketun liikemäärämomentin muutosnopeus.

Kaavamuodossa liikemäärämomentin taseen periaate on täten ilmaistavissa muodossa

$$(8.91) \quad \boxed{\mathbf{M}_V + \mathbf{M}_S = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} dV + \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV.}$$

Tämä esitysmuoto pätee, kun kiinteänä pisteenä on origo. Jos kiinteänä pisteenä on jokin muu kuin origo, yhtälö pätee edelleen, kun \mathbf{r} korvataan vastaavalla kiinteän pisteen ja differentiaalisen tilavuuselementin dV välisellä vektorilla.

Kun pintaintegraali muunnetaan Gaussin lauseen avulla tilavuusintegraaliksi ja käytetään yhteyttä (8.78), yhtälö (8.91) voidaan esittää myös muodossa,

$$(8.92) \quad \boxed{\int_V [\rho \mathbf{r} \times \mathbf{b} - \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{r})] dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV.}$$

Tähän muotoon päästään, koska

$$(8.93) \quad \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \oint_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) dS = - \oint_S \mathbf{n} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{r}) dS = - \int_V \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{r}) dV.$$

8.5.4 Energian tase

Energian taseen yhtälö (8.4) sisältää termit P_{ext} , P_Q , K ja E . Nämä termit tarkoittavat vastaavasti kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien tehoa, kappaleen ympäristöstään saamaa lämpötehoa, kappaleen liike-energiaa ja kappaleen sisäenergiaa. Ryhdymme seuraavaksi tarkemmin perehtymään näiden termien fysikaaliseen sisältöön.

Ulkoisten voimien teho

Ulkoisten voimien teho koostuu massavoimien tehosta P_{ext}^V ja pintavoimien tehosta P_{ext}^S . Toisin sanoen

$$(8.94) \quad P_{ext} = P_{ext}^V + P_{ext}^S,$$

jossa massavoimien teho on määritelmän mukaan

$$(8.95) \quad P_{ext}^V = \int \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dm = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV$$

ja pintavoimien teho

$$(8.96) \quad P_{ext}^S = \oint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS.$$

Tehon yksikkönä on $\text{Nm/s} = \text{J/s} = \text{W}$.

Lämpöteho

Lämpö on energiaa kuljetuksessa ("heat is energy in transit") [86]. Lämmön mukana liikkuu sen teho lämpövirtana, jota kuvataan *lämpövirrantiheydellä* \mathbf{q} , yksikkönä W/m^2 . Kysymys on vektorisuudesta. Käytetään myös nimitystä *lämpövuon tiheys*. Lämpövirrantiheyden normaalikomponentin pintaintegraali jonkin pinnan yli antaa pinnan läpi menevän lämpövirran eli *lämpövuon*, jonka yksikkö on W .

Huomautus ja varoitus. Valitettavasti varsinkin anglosaksisessa kirjallisuudessa edellä mainittujen termien kohdalla vallitsee suuri epäyhtenäisyys ja ristiriitaisuus. On varsin yleistä puhua lämpövuosta (engl. *heat flux*) ja tarkoittaa sillä kuitenkin vektoriaalista lämpövuon eli lämpövirrantiheyttä, jonka englanninkielinen termi tulisi olla *heat flux density*. Lämpövuontiheydestä saatetaankin käyttää myös englanninkielistä ilmaisua *heat flux vector*, joka korostaa sen vektoriluonnetta. Termien fyysikaalisen sisällön ymmärtämiseksi analogia sähködynamiikkaan on tässä kohdin suureksi hyödyksi. Skalaarinen sähkövirta, yksikkönä A , vastaa tällöin lämpövirtaa eli lämpövuota, yksikkönä W . Fysikaalisesti nämä tarkoittavat siis tietyn poikkipinnan läpi menevää varausmäärää aikayksikössä ja vastaavasti energiamäärää aikayksikössä eli tehoa. Sähkövirrantiheys \mathbf{J} , yksikkönä A/m^2 , vastaa tällöin lämpövirrantiheyttä eli lämpövuon tiheyttä \mathbf{q} , yksikkönä W/m^2 . Toisin sanoen sähkövirta, kuten lämpövirtakin, ovat skalaareja, kun taas niitä vastaavat tiheyskentät ovat vektoreita. Sähkövirran kenttäsuurena on *sähkövirrantiheys* ja silloin analogisesti lämpövirran kenttäsuure on *lämpövirrantiheys*. ■

Kappaleen saama lämpöteho on siis kirjoitettavissa matemaattisesti muotoon

$$(8.97) \quad P_Q = - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS,$$

missä miinusmerkki aiheutuu siitä, että \mathbf{n} on kappaleen ulkonormaaliyksikkövektori, ja halutaan tarkastella kappaleen saamaa lämpövirtaa eli kappaleen saamaa lämpötehoa. On syytä korostaa, että tässä pinta S on nimenomaan tarkasteltavan kappaleen rajapinta, joka voi siis liikkua kappaleen mukana.

Myöhemmin tarkastelemme tarkemmin sitä, mistä lämpövirrantiheys \mathbf{q} aiheutuu ja minkä tyyppisiä ovat eri lämmönsiirtymismekanismit. Tässä yhteydessä voidaan jo todeta, että lämpövirrantiheys voidaan jakaa kahteen osaan

$$(8.98) \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}^c + \mathbf{q}^r,$$

missä \mathbf{q}^c on lämmönjohtumiseen (c viittaa englanninkieliseen termiin *conduction*) liittyvä osuus ja \mathbf{q}^r säteilylämmönsiirtoon (*radiation*) liittyvä osuus.

Kolmantena lämmönsiirtymisen muotona on väliaineen kulkeutumisen mukana tapahtuva kuljettuminen eli *konvektio*. Konvektion osuus tulee mukaanolettavaksi kontinuumin nopeuden \mathbf{v} kautta, ja siksi sitä ei sisällytetä yhtälöön (8.98).

Liike-energia

Kappaleen liike-energia määritellään yhtälöllä

$$(8.99) \quad K = \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \rho v^2 \, dV.$$

Tämä on kontinuumikappaleen makroskooppinen liike-energia, johon ei kuulu kontinuumikappaleen ainehiukkasten satunnaisliike.

Sisäenergia

Kappaleen tilaan liitetään suure, jota kutsutaan *sisäenergiaksi*, yksikkönä J . Edellä käsitelty liike-energia ei sisällä kappaleen rakenneosien, molekyylien tms. satunnaiseen liikkeeseen liittyvää liike-energiaa, vaan se koskee ainoastaan makroskooppisesti mitattua kappaleen liike-energiaa. Sisäenergia muodostuukin hiukkasten energioiden summasta, johon kuuluvat molekyylien satunnaisliikkeen liike-energia, molekyylien välisten voimien potentiaalienergiat ym. makroskooppisesti näkymättömät energiamuodot.

Sisäenergia ilmaistaan usein ns. *ominaissisäenergiana* e eli sisäenergiana massaa kohden, yksikkönä J/kg . Näin ollen kappaleen sisäenergia voidaan kirjoittaa muotoon

$$(8.100) \quad E = \int e \, dm = \int_V \rho e \, dV.$$

E ja e ovat tilasuureita, jotka voivat riippua hyvin monista muuttujista.

Todettakoon, että sisäenergian käsittely johtaa termodynamiikan mukaan ottamiseen. Termodynamiikka onkin oleellinen osa kontinuumimekaniikkaa, itse asiassa yksi sen kenttäteorioista, jossa esimerkiksi lämpötila, paine ja ominaissisäenergia ovat paikan ja ajan funktioita. Huomautettakoon, että klassillinen termodynamiikka ei sellaisenaan sovi kontinuumimekaniikan kenttäteoriaksi, koska se tarkastelee kokonaisia, äärellisiä systeemejä, kuten astioissa olevia kaasuja. Kontinuumimekaniikkaan siirryttäessä äärelliset systeemit on korvattava differentiaalisilla ainealkioilla ja mukaan on otettava suureiden paikka- ja aikariippuvuus. Klassillisessa termodynamiikassahan ei esiinny aikaa.

Energian taseen periaatteen matemaattinen esitysmuoto

Energian taseen periaatteen mukaan kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho P_{ext} lisättynä kappaleen saamalla lämpöteholla P_Q on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian K ja sisäenergian E muutosnopeus:

$$(8.101) \quad \boxed{\int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \oint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS = \frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV + \frac{D}{Dt} \int_V \rho e dV.}$$

Huomattakoon, että myös tässä yhtälössä pintaintegraalit voidaan muuntaa tilavuusintegraaleiksi. Lämpövirrantiheyteen liittyvän termin osalta saadaan helposti

$$(8.102) \quad \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV.$$

Sen sijaan pintavoimien tehoon liittyvän termin muuntaminen tilavuusintegraaliksi johtaa hieman vaativampaan tarkasteluun. Voimme joka tapauksessa kirjoittaa yhteyden (8.78) avulla

$$(8.103) \quad \oint_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}}) \cdot \mathbf{v} dS = \oint_S \mathbf{n} \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_V \nabla \cdot (\bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) dV.$$

Palaamme vielä energian taseyhtälöön sovelluksien yhteydessä.

8.6 Loppuhuomautus kontinuumimekaniikasta

Olemme nyt esittäneet kontinuumimekaniikan yleiset aksioomien muotoon puetut periaatteet, jotka pohjautuvat havaittuihin ja paikkansa pitäviksi todettuihin säilymlakeihin, kuten olemme jo todenneet. Periaatteiden pätevyys- ja soveltamisalue on hyvin laaja. Nämä periaatteet ovat myös geofysiikan mekaanisten ja termisten ilmiöitten tarkastelun perustana. Onkin itse asiassa suorastaan yllättävää, miten valtavan runsas ja rikas ilmiömaailma voidaan matemaattisesti hallita muutaman yhtälön avulla. Varsinaiset ongelmat muodostuvatkin näiden periaatteiden soveltamisesta erilaisiin tapauksiin ja erilaisiin aineisiin. Samantapainen tilanne esiintyy myös sähkömagnetismissä, jonka sisältö on tiivistetysti Maxwellin yhtälöissä.

Formuloimme periaatteet ainederivaatan käsitteen avulla. Ainederivaatan derivaattaoperaattori on erilainen Lagrangen ja Eulerin esitystavoissa. Koska valittava esitystapa riippuu periaatteiden soveltamisen kohteesta, esitämme kenttäyhtälöt edellä pelkästään integraalimuotoisina. Tämä muoto on siten täysin yleispätevä. Integraalimuotoista esitystä kutsutaan myös *äärelliseksi muodoksi*. Differentiaaliyhtälömuotoisiin esityksiin päästään ainederivaattaa käyttäen. Näin saatavaa muotoa kutsutaan myös *paikalliseksi muodoksi*. Differentiaaliyhtälöausekkeiden muoto riippuukin siis siitä, kumpaa esitystapaa, Lagrangen vai Eulerin, käytetään.

Kontinuumimekaniikassa tarvitaan lisäksi konstitutiivisia yhtälöitä jo senkin takia, että tuntemattomia, ratkaistavia suureita olisi yhtä monta kuin kenttäyhtälöitä. Konstitutiivisten yhtälöiden avulla kuvataan ennen kaikkea aineen luonnetta ja käyttäytymistä voimien ja muiden ulkoisten tekijöiden vaikutuksen alaisena. Konstitutiiviset yhtälöt ovat useimmiten kokeellisesti saatavia relaatioita.

Seuraavaksi tarkoituksemme onkin soveltaa kontinuumimekaniikan periaatteita *kiinteään aineen mekaniikkaan* ja *nesteiden mekaniikkaan* sekä esittää muutama geofysiikan kontinuumiprobleemin ratkaisu.

Luku 9

Kiinteän aineen mekaniikka

Kiinteän eli jähmeän aineen mekaniikka on laaja kontinuumimekaniikan sovellusalue. Sen tärkeimmät probleemit liittyvät kappaleisiin syntyvien siirtymien ja jännitysten määrittämiseen.

Kappaleen siirtymien suuruuden mukaan on tapana jakaa kiinteän aineen mekaniikka kahteen osaan, joista toinen pohjautuu ns. pienten siirtymien tai pienten muodonmuutosten teoriaan ja toinen suurten siirtymien tai suurten muodonmuutosten teoriaan. Suurten siirtymien teoriaan pohjautuvat esimerkiksi suuret plastiset muodonmuutokset, kuten maankuoren suuret deformaatorakenteet, poimut ja useat laattatektoniikkaan liittyvät tarkastellut. Näiden käsittely noudattaa usein muodoltaan samankaltaista Eulerin esitystapaa, jota käytetään nesteiden virtausmekaniikassa. Nesteiden virtaus voidaankin ymmärtää tietyllä tavalla suuren siirtymän probleemiksi. Tällöin on kuitenkin huomattava, että harvoin ollaan kiinnostuneita tiettyjen yksittäisten partikkeleiden liikkeen historiasta, vaan ennen kaikkea kiinnostus kohdistuu virtauksen laatuun, kuten nopeus- ja painejakautumiin.

9.1 Pienten muodonmuutosten teoria

Rajoitumme tässä esityksessä pienten siirtymien tai pienten muodonmuutosten eli infinitesimaalisten siirtymien teoriaan. Tämän teorian pohjalta tulevat ymmärretyksi mm. kalliomekaniikan tietyt periaatteet sekä seismisten kimmoaaltojen eteneminen, jotka ovatkin seuraavassa käsiteltäviä esimerkkejä. Pienten siirtymien teoria tarkoittaa oleellisesti juuri Lagrangen esitystavan soveltamista, koska tällöin kappaleen kontinuumimekaaniset yhtälöt voidaan ajatella muodostettaviksi kappaleen alkuperäisen geometrian mukaisessa koordinaatistossa.

Pienten muodonmuutosten teoria pohjautuu siihen, että siirtymägradien-

tin komponentit $\partial u_i/\partial a_j$ yhtälössä (8.45) ja $\partial u_i/\partial x_j$ yhtälössä (8.46) ovat huomattavasti pienempiä kuin yksi ($\partial u_i/\partial a_j \ll 1$ ja $\partial u_i/\partial x_j \ll 1$). Tällöin Lagrangen ja Eulerin äärellisten venymätensoreiden lausekkeissa (8.59) ja vastaavasti (8.60) olevat tulotermit voidaan jättää huomiotta toisen kertaluvun pieninä termeinä. Näin ollen pienten venymien tapauksessa Lagrangen äärellinen venymätensori muuttuu *Lagrangen infinitesimaaliseksi venymätensoriksi*

$$(9.1) \quad l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right).$$

Vastaavasti, kun Eulerin äärellisestä venymätensorista jätetään huomiotta tulotermit, saadaan *Eulerin infinitesimaalinen venymätensori*

$$(9.2) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Jos siirtymägradientit ja siirtymät itsessään ovat pieniä, muodostuu ero Lagrangen ainekoordinaattien ja Eulerin spatiaalikoordinaattien välillä merkityksettömäksi. Tämä tarkoittaa, että materiaaliset gradienttikomponentit $\partial u_i/\partial a_j$ ja spatiaaliset gradienttikomponentit $\partial u_i/\partial x_j$ ovat lähes yhtä suuria, jolloin Eulerin ja Lagrangen infinitesimaaliset venymätensorit ovat yhtäsuuria. Tällöin siis

$$(9.3) \quad l_{ij} = \epsilon_{ij}$$

ja toteammuksemme siitä, että tarkastelu voidaan tehdä Lagrangen esitysmuodossa saa vahvistuksen.

Indeksimuotoinen lauseke (9.3) voidaan esittää myös dyadimerkinnöin muodossa

$$(9.4) \quad \bar{\bar{l}} = \bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}),$$

missä on huomattava, että $\mathbf{u}\nabla$ tarkoittaa operaattoria, jossa nablalla operointi kohdistetaan vektoriin \mathbf{u} oikealta vasemmalle ($\mathbf{u}\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \mathbf{e}_3$). Tätä korostetaan usein kirjoittamalla nablän päälle vasemmalle osoittava nuoli, $\overleftarrow{\nabla}$. Merkintä $\nabla\mathbf{u}$ tarkoittaa vastaavasti, että "nablaaminen" kohdistuu vasemmalta oikealle. Tätä voidaan tarvittaessa korostaa laittamalla nablän päälle oikealle osoittava nuoli, $\overrightarrow{\nabla}$. Kirjoitetaan vielä täydellisyyden vuoksi näkyviin: $\nabla\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3}$.

Pienten siirtymien tai muodonmuutosten teoriaan johdetaan siirtymägradienttitensorin kautta. Jos nimittäin jaamme siirtymägradientin symmetriseen ja antisymmetriseen osaan, saadaan yhtälön (2.176) perusteella

$$(9.5) \quad \frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right).$$

Tällöin symmetrinen osa voidaan samastaa venymäyhtälöön (9.1) ja antisymmetrinen osa *rotaatioon*

$$(9.6) \quad \theta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right),$$

jota kutsutaan *lineaariseksi Lagrangen rotaatiotensoriksi*. Kirjoitetaan rotaatiotensori matriisimuodossa näkyviin:

$$(9.7) \quad (\theta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} - \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_3} - \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_2} - \frac{\partial u_2}{\partial a_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_3} - \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial a_3} - \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial a_3} - \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Huomaamme, että rotaatiotensorissa on itse asiassa itseisarvoltaan vain kolme eri suuruista komponenttia, jotka ovat samalla siirtymävektorin roottorin komponentteja. Näin ollen antisymmetriseen osaan voidaan liittää (asosioida) *rotaatiovektori*

$$(9.8) \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}.$$

Tämä kuvaa jäykän kappaleen rotaatiota ilmaistuna siirtymävektorin roottorin puolikkaana.

Dyadimerkinnöin voidaan kirjoittaa

$$(9.9) \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u})$$

ja

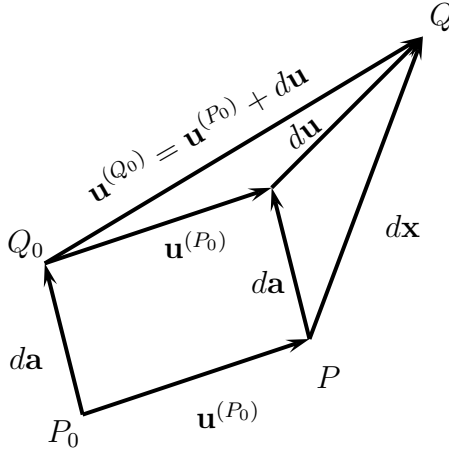
$$(9.10) \quad \bar{\theta} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \nabla - \nabla \mathbf{u}).$$

Rotaatio-osuus (9.6) tai (9.10) tulee käyttöön, kun siirtymän sijasta tarkastellaankin *suhteellista* siirtymää. Kahden lähellä olevan pisteen P_0 ja Q_0 suhteellinen siirtymävektori on (kuva 9.1)

$$(9.11) \quad d\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(Q_0)} - \mathbf{u}^{(P_0)} \quad \text{eli} \quad du_i = u_i^{(Q_0)} - u_i^{(P_0)}.$$

Kun kehitetään $u_i^{(P_0)}$ Taylorin sarjaksi pisteen (P_0) ympäristössä ja otetaan mukaan vain lineaarinen termi, voidaan kirjoittaa

$$(9.12) \quad du_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right)_{P_0} da_j \quad \text{eli} \quad d\mathbf{u} = (\mathbf{u} \nabla)_{P_0} \cdot d\mathbf{a}.$$

Kuva 9.1: Suhteellinen siirtymä du .

Huomaamme, että tässä osittaisderivaatat ovat samoja kuin Lagrangen aineellisessa siirtymägradientissa (8.45). Yhtälö (9.12) on suhteellinen siirtymävektori Lagrangen esitystavassa. Yhtälöstä (9.12) saadaan edelleen suhteelliselle siirtymävektorille muodostetuksi du_i/da , missä da on differentiaalisen etäisyysvektorin da_i pituus,

$$(9.13) \quad \frac{du_i}{da} = \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{da}.$$

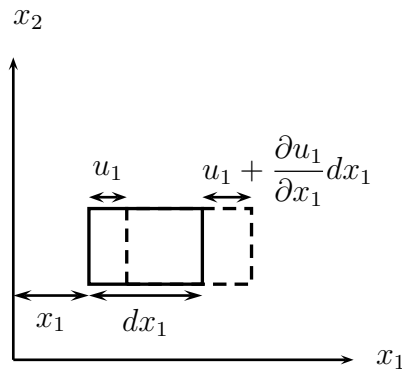
Tässä tensori $\partial u_i/\partial a_j$ voidaan nyt hajoittaa symmetriseen ja antisymmetriseen osaan ja kirjoittaa siten differentiaaliselle siirtymälle du_i

$$(9.14) \quad du_i = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a_j} - \frac{\partial u_j}{\partial a_i} \right) \right] da_j,$$

jonka jälkimmäinen osa onkin sama kuin Lagrangen rotaatiotensori (9.6) ja edellinen osa Lagrangen venymätensori l_{ij} .

Edellä tarkastelu tehtiin Lagrangen esitystavassa. Vastaavanlainen esitys saadaan Eulerin esitystavassa korvaamalla $a_i \rightarrow x_i$. Nämä esitystavat ovat samat pienten siirtymien teoriassa. Tämän johdosta voimme käyttää seuraavaksi muuttujasymbolina kirjainta x kirjaimen a sijasta.

On vielä hyödyllistä esittää venymätensorin komponenteille fysikaalinen tulkinta. Tarkastelemme ensin kuvan 9.2 mukaista differentiaalista alkioita,



Kuva 9.2: Venymätensorin komponenttien tulkinta. Normaalivenymä.

joka kokee siirtymän ja venymän vain x_1 -akselin suunnassa. Tällöin voidaan suhteelliselle venymälle kirjoittaa

$$(9.15) \quad \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\left\{ dx_1 + \left(u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) - u_1 \right\} - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \epsilon_{11},$$

missä u_1 on siirtymä x_1 -akselin suuntaan, L_0 alkion alkuperäinen pituus ($= dx_1$) ja L on venymän johdosta alkion saama uusi pituus. Näin saatu venymäkomponentti vastaa *normaalivenymää*. Vastaavanlainen tulkinta saadaan myös komponenteille ϵ_{22} ja ϵ_{33} .

Tarkastellaan seuraavaksi komponenttia

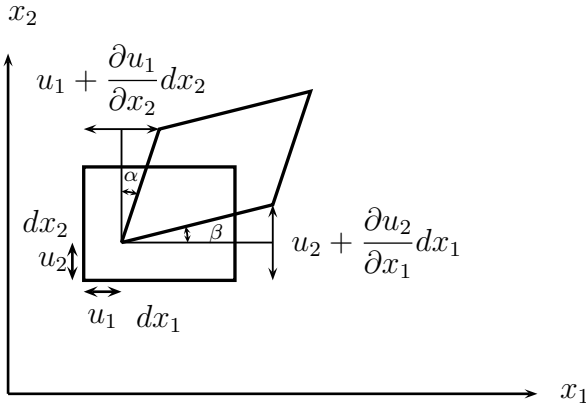
$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right).$$

Kuva 9.3 esittää differentiaalisen alkion siirtymää (u_1, u_2) ja sen venymää, jossa alkujaan suorakulmainen alkio on muuntunut vinokulmaiseksi. Kuvan merkinnöillä voidaan kirjoittaa

$$(9.16) \quad \tan \alpha = \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \approx \alpha$$

ja

$$(9.17) \quad \tan \beta = \frac{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \approx \beta.$$



Kuva 9.3: Venymätenssin komponenttien tulkinta. Leikkausvenymä eli liukuma.

Näin ollen saadaan

$$(9.18) \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \approx \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \equiv \gamma_{12}.$$

Saatu γ kuvaa leikkausvenymää eli liukumaa. Se ilmoittaa keskiarvon siitä, kuinka paljon tarkastelun kohteena olevan pisteen läheisyydessä kappaleen ainekerrokset liukuvat toistensa suhteen. Tällöin ainekerrokset ovat koordinaattitasojen suuntaiset ja yksikön etäisyydellä toisistaan. Vastaavanlainen tulkinta saadaan muillekin ϵ_{ij} ($i \neq j$)-komponenteille.

Huomautus 1. Joissakin kirjoissa liukumakomponenttien γ tilalle on kirjoitettu niiden puolikas $(1/2)\gamma$, ja tällöin tällaista liukumaa kutsutaan ”insinöörileikkausvenymäksi”. Nämä venymät ovat siten kaksi kertaa tensorimuotoiset leikkausvenymäkomponentit. ■

Huomautus 2. Venymätenssin (9.2) komponentit saadaan siirtymävektorin \mathbf{u} komponenteista. Näitä toisistaan riippumattomia differentiaaliyhtälöitä on siten kuusi kappaletta. Niiden avulla voidaan määrittää siirtymävektorin kolme komponenttia. Koska kysymyksessä on ylimääräytynyt probleemi, täytyy siirtymän yksikäsitteiseksi ratkaisemiseksi asettaa tiettyjä lisäehtoja venymäkomponenteille. Nämä lisäehdot tunnetaan ns. *kompatibiliteettiyhtälöinä*

$$(9.19) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$(9.20) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$(9.21) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1},$$

$$(9.22) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$(9.23) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1},$$

ja

$$(9.24) \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Nämä yhtälöt saadaan osittaisderivoimalla venymätensoren komponentteja ja laskemalla komponentteja sopivasti yhteen. ■

Ennen kuin voimme lähteä esittämään kiinteän aineen mekaniikan kenttäyhtälöitä ja ratkaisemaan niihin liittyviä problemeja, tarkastelemme kiinteän aineen konstitutiivisia yhtälöitä.

9.2 Kiinteän aineen konstitutiiviset yhtälöt

Kuten on jo useassa kohdin todettu, tieto aineesta siirretään kontinuumimekaniikan yhtälöihin konstitutiivisten yhtälöiden kautta. Näiden avulla otetaan huomioon kunkin aineen ominaisuudet mekaanisissa rasituksissa ja lämpötilamuutoksissa.

Konstitutiivisia yhtälöitä voidaan formuloida myös teoreettisesti. Tästä aihepiiristä on tullut varsin merkittävä tutkimusalue tietokoneiden laskenta-
tehon jatkuvasti lisääntyessä. Konstitutiivisiin yhtälöihin liittyy monia käsitteitä, jotka määritellään seuraavassa. Käsitteiden englanninkielisten vastineiden tuntemisesta on hyötyä alan kirjallisuutta luettaessa, joten ne esitetään myös keskeisimpien käsitteiden osalta.

9.2.1 Kokoonpuristuvuus ja lämpölaajeneminen

Merkitään tietyn kappaleen tilavuuden V eli ainetilavuuden, differentiaalista muutosta dV :llä. *Suhteellinen tilavuudenmuutos* on silloin

$$(9.25) \quad \frac{dV}{V} = \frac{d\frac{m}{\rho}}{\frac{m}{\rho}} = \frac{-\frac{1}{\rho^2}m d\rho}{\frac{m}{\rho}} = -\frac{d\rho}{\rho}.$$

Tässä on käytetty tiheydelle merkintää $\rho = m/V$, joka tulee kuitenkin ymmärtää nyt differentiaalista tilavuutta koskevana. Massan säilymisestä seuraa, että $dm = 0$.

Aineen *kokoonpuristuvuus* (engl. compressibility) κ määritellään kaavalla

$$(9.26) \quad -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} = \kappa dp,$$

missä dp on paineen muutos. Yhtälön miinus-merkki tulee siitä, että positiivinen paineen muutos aiheuttaa tavallisesti tilavuuden pienenemisen, jolloin dV on negatiivinen. Kokoonpuristuvuuden yksiköksi saadaan 1/Pa. Kokoonpuristuvuus kuvaa siis aineen käyttäytymistä puristuksen alaisena. Mitä suurempi kokoonpuristuvuus κ on, sitä helpommin aine puristuu kasaan. Kokoonpuristuvuuden käänteisarvoa kutsutaan *puristuvuuskertoimeksi* (engl. bulk modulus) tai tilavuuskimmokertoimeksi K

$$(9.27) \quad K = \frac{1}{\kappa}.$$

K :n yksikkö on Pa. Yhtälö (9.26) voidaan siten esittää myös muodossa

$$(9.28) \quad dp = -K \frac{dV}{V} = K \frac{d\rho}{\rho}.$$

Aineen ns. *tilavuuden lämpötilakerroin* (engl. cubic expansion coefficient) γ määritellään lämpötilan muutoksen dT avulla seuraavasti

$$(9.29) \quad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} = \gamma dT.$$

Tilavuuden lämpötilakerroimen yksikkö on 1/K. Vastaavasti aineen *pituuden lämpötilakerroin* (engl. linear expansion coefficient) määritellään

$$(9.30) \quad \frac{dl}{l} = \alpha dT.$$

Myös pituuden lämpötilakerroimen yksikkö on 1/K.

Anisotrooppisessa aineessa pituuden lämpötilakerroin riippuu suunnasta. Isotrooppiselle aineelle voidaan kirjoittaa

$$(9.31) \quad \gamma = 3\alpha.$$

Edellä emme spesifioineet tarkemmin, minkä prosessin seurauksena muutokset tapahtuvat. Onkin syytä korostaa, että kaikki kaavojen (9.26)-(9.31) määrittelyjen kertoimien arvot riippuvat prosessista.

9.2.2 Jännitys-venymä

Monien geofysiikan ongelmien kannalta olennainen relaatio liittyy jännityksen ja venymän väliseen yhteyteen. Tässä käytetään yleistä kontinuumimekaniikan terminologiaa, jolloin lyhenemät tulee käsittää negatiivisiksi venymiksi. Jännitys-venymä-yhteyksien muodostaminen pohjautuu aineen *reologisiiin* malleihin. Emme tässä lähde kovin syvällisesti perehtymään geologisten materiaalien reologiaan. Toteamme kuitenkin, että reologiset perusmallit tunnetaan nimillä *Hooken*¹ malli, *Newtonin* malli ja *Saint-Venantin*² malli. Hooken malli kuvaa aineen kimmoista eli elastista, palautuvaa käyttäytymistä. Newtonin malli kuvaa aineen viskoosia, nestemäistä käyttäytymistä. Saint-Venantin malli kuvaa aineen plastista käyttäytymistä. Näiden perusmallien erilaisilla rinnan ja sarjaan kytkennöillä voidaan saada approksimatiivisia aineille todellisten aineiden jännitys-venymä-käyttäytymisen kuvaamiseksi.

Tavalliset ainemallit ovat *kimmoinen* (engl. elastic), *plastinen* (tai *plastillinen*) (engl. plastic), *viskokimmoinen* (engl. viscoelastic) ja *viskoplastinen* (engl. viscoplastic).

Jännitys-venymä-yhteys voidaan esittää yleisesti homogeeniselle aineelle ja ajasta riippumattomassa tilanteessa muodossa

$$(9.32) \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, T),$$

missä T on lämpötila ja $\bar{\epsilon}$ on venymä- eli muodonmuutostensori. Tässä kirjassa rajoitumme tilanteeseen, jossa relaatio (9.32) kuvaa lineaarista, kimmoista ainetta. Tämä yhteys tunnetaan ns. yleistettynä Hooken lakina, joka tensorimerkinnöin on

$$(9.33) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Kertoimena on siis neljännen kertaluvun tensori, jossa on 81 komponenttia. Kuitenkin johtuen sekä jännitys- että venymätensoren symmetrisyydestä, kertoimessa on korkeintaan 36 riippumatonta erillistä vakiota. Tämä tarkoittaa sitä, että jännitystensorin kuusi jännityskomponenttia ovat kukin lineaarisia funktioita kuudesta venymän komponentista. Tällöin relaatio (9.33) voidaan esittää matriisiyhtälönä, kun käytetään venymille yhtälön (9.2) mukaista esi-

¹Robert Hooke (1635–1703), engl. luonnontutkija.

²Barré de Saint-Venant (1797–1886), ransk. fyysikko ja mekaniikan tutkija.

tystä

$$(9.34) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix},$$

mikä voidaan edelleen lyhennettynä kirjoittaa muotoon

$$(9.35) \quad \sigma_K = C_{KM}\epsilon_M \quad (K, M = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

kun käytetään merkintöjä

$$(9.36) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_1, & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = \sigma_4 \\ \sigma_{22} &= \sigma_2, & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \sigma_5 \\ \sigma_{33} &= \sigma_3, & \sigma_{12} &= \sigma_{21} = \sigma_6 \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_1, & 2\epsilon_{23} &= 2\epsilon_{32} = \epsilon_4 \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_2, & 2\epsilon_{13} &= 2\epsilon_{31} = \epsilon_5 \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_3, & 2\epsilon_{12} &= 2\epsilon_{21} = \epsilon_6. \end{aligned}$$

Energiaan pohjautuvalla tarkastelulla, joka tässä sivuutetaan, voidaan osoittaa, että kerroinmatriisi on symmetrinen eli $C_{KM} = C_{MK}$. Tällöin riippumattomien kerrointen lukumäärä vähenee 36:sta 21:een. Yhtälö (9.34) on voimassa yleisessä lineaarisessa ja *anisotrooppisessa* väliaineessa. Esimerkiksi trikliinisessä kiteessä ei esiinny symmetriaa, joten siinä tapauksessa kerroinmatriisi on täysi.

Tässä esityksessä rajoitamme tarkastelun *isotrooppiseen* aineeseen, jolloin yleistetty Hooken laki on voidaan esittää kahden toisistaan riippumattoman vakion, ns. *Lamén*³ vakion λ ja μ avulla. Kerroinmatriisin alkioille on silloin voimassa yhteydet

$$(9.37) \quad \begin{aligned} C_{12} &= C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \mu \\ C_{11} &= C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

ja muut alkiot (24 kpl) ovat nollia. Toisin sanoen isotrooppisessa tapauksessa

³Gabriel Lamé (1795–1870), ransk. matemaatikko ja vuori-insinööri, École des Minesin kasvatti (1820).

yleistetty Hooken laki saa muodon

$$(9.38) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix},$$

mikä tensorimerkinnöin voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$(9.39) \quad \boxed{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}.}$$

On huomattava, että termi

$$(9.40) \quad \epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \Delta$$

on ns. *dilataatio*, joka tarkoittaa ainealkion tilavuuden muutoksen suhdetta alkuperäiseen tilavuuteen.

Yhtälöstä (9.39) saadaan venymä

$$(9.41) \quad \epsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}.$$

Huomautus. Tähän yhtälöön päästään esimerkiksi tarkastelemalla ensin x_1 -akselin suunnassa vaikuttavaa jännitystä σ_{11} ja sen aikaansaamia venymiä ϵ_{11} x_1 -akselin suunnassa, ϵ_{22} x_2 -akselin suunnassa ja ϵ_{33} x_3 -akselin suunnassa. Tällöin saadaan yhtälöryhmä (koska x_2 - ja x_3 -akselin suuntaiset jännityskomponentit ovat nollia)

$$(9.42) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{22} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) \\ 0 &= (\lambda + 2\mu)\epsilon_{33} + \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}), \end{aligned}$$

josta ratkaisemalla saadaan

$$(9.43) \quad \epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}$$

$$(9.44) \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}.$$

Vastaavalla menettelyllä saadaan ratkaisut x_2 - ja x_3 -akseleiden suunnissa vaikuttavien jännitysten σ_{22} ja vastaavasti σ_{33} aikaansaamille venymille eri akselien suunnissa. Lopputuloksena on yhtälö (9.41). ■

Useimmiten Lamén vakioiden sijasta käytetään neljää kerrointa. Määrittelemme nämä seuraavaksi. Jos tarkastellaan yksiaksiaalista jännitystilaa x_1 -akselin suunnassa, voidaan määritellä isotrooppiselle aineelle yhteydet

$$(9.45) \quad \sigma_{11} = E\epsilon_{11}$$

ja

$$(9.46) \quad \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11}.$$

Kerrointa E kutsutaan kimmokertoimeksi tai eritoten anglosaksisessa kirjallisuudessa myös *Youngin*⁴ kertoimeksi ja kerrointa ν *Poissonin luvuksi* tai Poissonin suhteeksi.

Yhtälöiden (9.43) ja (9.45) avulla saadaan Youngin kertoimen ja Lamén vakioiden välinen yhteys

$$(9.47) \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

ja vastaavasti yhtälöiden (9.44) ja (9.46) avulla Poissonin luvun ja Lamén vakioiden välinen yhteys

$$(9.48) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Jos tarkastellaan hydrostaattista painetta vastaavaa jännitystilaa, voidaan määritellä *puristuvuuskerroin* (engl. bulk modulus) myös Lamén vakioiden avulla. Hydrostaattisessa tilanteessa pätee

$$(9.49) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} \quad \text{ja} \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0, \\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \frac{\sigma_{11}}{3\lambda + 2\mu}, \end{aligned}$$

jolloin puristuvuuskerroin voidaan määritellä dilataatioyhtälön (9.40) avulla

$$(9.50) \quad K = \frac{-\sigma_{11}}{-\Delta} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \lambda + \frac{2\mu}{3}.$$

Tämä antaa yhteyden paineen ja kuutiollisen dilataation välille. Yhtälön (9.49) viimeinen muoto saadaan suoraan yhtälöstä (9.39).

⁴Thomas Young (1773–1829), engl. fyysikko ja luonnonfilosofi.

Niin sanotussa puhtaassa leikkausjännitystilassa, *leikkaus- eli liukukerroin* G (engl. shear modulus) antaa yhteyden jännityksen ja venymän leikkauskomponenttien välille. Koska toinen Lamén vakioista μ liittyy juuri leikkausjännitysten aikaansaamiin muodonmuutoksiin, voidaan leikkaus- eli liukukerroin määritellä

$$(9.51) \quad G = \mu.$$

Tässä esityksessä käytämme liukukertoimelle Lamén vakion symbolia μ .

Youngin kerroin, Poissonin luku, puristuvuuskerroin ja leikkauskerroin ovat paljon käytettyjä materiaaliominaisuuksia teknillisessä lujuusopissa ja kalliomekaniikassa. Kertoimia kutsutaan joskus myös vastaavanimisiksi *moduleiksi*, esim. Youngin moduli.

Näiden kertoimien välille voidaan johtaa varsin suuri määrä erilaisia yhteyksiä. Tavallisimmat ovat

$$(9.52) \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

$$(9.53) \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu} = \frac{3K - 2\mu}{3} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$$(9.54) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3K - 2\mu}{6K + 2\mu},$$

$$(9.55) \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = \frac{9\mu K}{\mu + 3K}$$

ja

$$(9.56) \quad K = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

Kirjoitamme seuraavaksi yleistetyn Hooken lain (9.39) *dyadimerkinnöin*. Venymädyadi on yhtälön (9.4) mukainen. Lisäksi dilataatio $\epsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}$. Kroneckerin δ -tensori δ_{ij} vastaa yksikködyadia $\bar{\bar{I}} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$. Näillä merkinnöillä voidaan kirjoittaa

$$(9.57) \quad \boxed{\bar{\bar{\sigma}} = \lambda \bar{\bar{I}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}).}$$

Kalliomekaniikassa kalliolla on miltei poikkeuksetta tietty *alkujännitystil*a. Tämä jännitystil on syntynyt hyvin monimutkaisten geologisten prosessien seurauksena, ja se tulee määrittää mittaamalla. Jännitystiln mittaaminen onkin yksi hyvin keskeinen probleemi kalliomekaniikassa. Alkujännitystila, kuten myös mahdollinen *alkuvenymä* voidaan ottaa huomioon yleistetyssä Hooken laissa kirjoittamalla se muotoon

$$(9.58) \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij}(\epsilon_{kk} - \epsilon_{kk}^0) + 2\mu(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0) + \sigma_{ij}^0,$$

missä σ_{ij}^0 on alkujännitys ja ϵ_{ij}^0 on alkumuodonmuutos (alkuvenymä). Tavallisin alkuvenymän aiheuttaja on lämpötilan muutos $\Delta T = T - T_0$ alkutilan suhteen.

Todettakoon, että kytkettyjen termo-kimmoisten kenttien teoriassa yleistetty Hooken laki korvataan ns. *Duhamel*⁵-*Neumannin*⁶ lailla, jossa venymä muodostuu kahdesta osasta eli jännityskentästä ja lämpötilakentästä tulevista osista. Alkujännitysten oletetaan olevan sen sijaan nollia. Tällöin kirjoitetaan

$$(9.59) \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} (T - T_0),$$

mistä saadaan venymille

$$(9.60) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}.$$

Yhtälöissä (9.59) ja (9.60) α tarkoittaa piteuden eli lineaarisesta lämpötilakerointa.

9.2.3 Lämpökapasiteetti ja sisäenergia

Aineen ominaislämpökapasiteetti (engl. specific heat capacity) määritellään yhtälöllä

$$(9.61) \quad c = \frac{dQ}{m dT},$$

missä dQ on tietyn ainemäärän saama differentiaalinen lämpö, yksikkönä J, dT on vastaava lämpötilan muutos, yksikkönä K ja m ko. ainemäärän massa, yksikkönä kg. Ominaislämpökapasiteetin yksiköksi saadaan siten J/(kgK). Ominaislämpökapasiteetin arvo riippuu prosessista. Tavallisimmat ovat isobaarinen eli vakiopaineessa tapahtuva prosessi, jolloin ominaislämpökapasiteetti ilmaistaan muodossa *ominaislämpökapasiteetti vakiopaineessa* c_p ja

⁵Jean Duhamel (1797–1872), ransk. matemaatikko.

⁶Franz Ernst Neumann (1798–1895), saks. fyysikko.

isokoorinen eli vakiotilavuudessa tapahtuva prosessi, jolloin ominaislämpökapasiteettina on *ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa* c_V .

Myös sisäenergian muutoksille voidaan esittää erilaisia konstitutiivisia yhteyksiä. Yksi varsin tavallinen yhteys on muotoa

$$(9.62) \quad de = c_e dT,$$

missä de on ominaissisäenergian muutos ja dT muutosta vastaava lämpötilan muutos sekä c_e ominaislämpökapasiteetti vakioimuodonmuutostilassa eli vakiotilavuudessa. Tämä yhteys on voimassa siis vain vakioimuodonmuutosprosessissa. Yhteyttä käytetään usein myös hieman muotoaan muuttavien kappaleiden yhteydessä.

9.2.4 Lämmönjohtavuus

Tavanomaisin konstitutiivinen malli lämmönjohtumistarkasteluissa on ns. Fourierin ”lämmönjohtumislaki”, joka kytkee toisiinsa lämpövirrantiheyden ja lämpötilagradientin:

$$(9.63) \quad \mathbf{q} = -\bar{\bar{k}} \cdot \nabla T,$$

missä tensori tai dyadi $\bar{\bar{k}}$ on *lämmönjohtavuus*. Lämmönjohtavuuden yksiköksi saadaan yhtälön (9.63) perusteella $W/(Km)$.

Lämmönjohtavuus on analoginen sähkönjohtavuudelle. Toisin sanoen Fourierin lämmönjohtavuuslaki ja Ohmin laki (4.11) ovat matemaattiselta muodoiltaan samanlaiset.

Lineaarisisä, isotrooppisessa ja homogeenisessä tapauksessa eli *LIH*-väliaineessa Fourierin lämmönjohtumisyhtälö saa muodon

$$(9.64) \quad \mathbf{q} = -k \nabla T.$$

Yhtälöissä (9.63) ja (9.64) oleva miinus-merkki on seurausta siitä yleisesti havaitusta fysikaalisesta tosiasiasta, että lämpö virtaa korkeamman lämpötilan alueesta matalamman lämpötilan alueen suuntaan. Näin ollen koska gradientti osoittaa lämpötilan kasvun suuntaan, on lämpövirrantiheyden suunta vastakkainen lämpötilan gradientin suunnalle.

Todettakoon, että lämmönjohtavuus on itse asiassa aina lämpötilan funktio eli yhtälön (9.64) pätevyysalue on hyvin rajallinen.

9.2.5 Yksinkertaisten kiinteiden aineiden ominaisuuksia

Taulukossa 9.1 esitetään joidenkin yksinkertaisten geologisten materiaalien (kivilajien) kimmo-ominaisuuksien arvoja. Luvut ovat vain suuntaa antavia.

On huomattava, että useat arvot riippuvat huomattavasti lämpötilasta.

Taulukko 9.1: Geologisten materiaalien (kivilajien) kimmo-ominaisuuksia.

Aine	Youngin kerroin E (GPa)	Poissonin suhde ν	Puristuvuuskerroin K (GPa)	Liukukerroin μ (GPa)	Massatiheys ρ (kg/m ³)
graniitti	40 – 77	0,11 – 0,30	30	20	2500 – 2800
gneissi	60 – 81	0,23	37	27	2600 – 3100
kalkkikivi	54	0,25			2600 – 2700
kvartsiitti	70 – 85	0,13			2500 – 2650
amfiboliitti	113	0,30			2800 – 3100
diabaasi	115	0,26			2800 – 3100
hiekkakivi	16	0,34			1800 – 2700

Taulukossa 9.2 esitetään joidenkin geologisten materiaalien lämmönjohtavuusarvoja. Kuten jo aiemmin on todettu, lämmönjohtavuus on voimakkaasti lämpötilasta riippuva. Lisäksi kiven huokoisuudella ja huokosnesteillä on merkittävä vaikutus lämmönjohtavuuden arvoihin. Selvimmin tämä näkyy hiekkakivellä, jonka lämmönjohtavuuden vaihteluväli onkin suurin. Näin ollen taulukon 9.2 arvoja on pidettävä vain suuntaa antavina. Ominaislämpökapasiteetti (vakio paineessa) kivillä on n. 700-900 J/(kgK) ja pituuden lämpötilakerroin (lämpölaajenemiskerroin) n. $10 \cdot 10^{-6} - 20 \cdot 10^{-6}$. Usein geologisten materiaalien ominaisuudet on taulukoitu ns. *termisen diffusiviteetin* arvoina. Terminen diffusiviteetti on parametri, jonka arvo määräytyy aineen tiheyden ρ , ominaislämpökapasiteetin c_p ja lämmönjohtavuuden k avulla seuraavasti:

$$(9.65) \quad s = \frac{k}{\rho c_p}.$$

Termisen diffusiviteetin yksiköksi saadaan siten m²/s.

9.3 Seismisten kimmoaaltojen teoria

Sekä maanjäristysseismologiassa että seismisissä menetelmissä hyödynnetään elastisten eli kimmoaaltojen etenemistä väliaineessa. Siirrymme seuraavaksi tutkimaan kimmoaaltojen etenemistä sekä niiden kenttäyhtälöitä kiinteän aineen kontinuumimekaanisen tarkastelun pohjalta. Oletetaan, että aineen jännitys-venymä-käyttäytyminen noudattaa yleistä Hooken lakia (9.39).

Taulukko 9.2: Geologisten materiaalien lämmönjohtavuuksia.

Aine	Lämmönjohtavuus k (W/(Km))
graniitti	2,5 – 3,7
gneissi	2,1 – 3,3
kalkkikivi	1,9 – 2,8
kvartsiitti	3,3 – 6,9
amfiboliitti	2,2 – 3,5
diabaasi	2,0 – 3,0
hiekkakivi	1,8 – 5,1

Kontinuumin ainepartikkelin liikeyhtälö saadaan pienten muodonmuutosten teoriassa suoraan liikemäärän säilymis- eli taselaista (8.87), jonka on oltava voimassa mielivaltaiselle tilavuudelle V . Jotta näin on, yhtälön (8.87) integrandien tulee olla samat. Pienten muodonmuutosten teoriaa käytettäessä ero Lagrangen ja Eulerin esitystavan välillä poistuu, joten ainederivaatta korvautuu osittaisderivaatalla. Näin ollen saamme

$$(9.66) \quad \rho \mathbf{b} + \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Kun tähän yhtälöön sijoitetaan yleistetyn Hooken lain mukainen jännitysvenymä-yhteys (9.57), saadaan edelleen

$$(9.67) \quad (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

On huomattava, että tähän muotoon päästään, koska

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \overleftarrow{\nabla}) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) \overleftarrow{\nabla} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})$$

ja

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{I}} \nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}).$$

Nämä relaatiot voi todentaa vaikkapa komponenttimuodossa. Käyttämällä vektori-identiteettiä $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ voidaan yhtälö (9.67) saattaa muotoon

$$(9.68) \quad (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

tai muotoon

$$(9.69) \quad (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Tarkastellaan seismisiä aaltoja lähdealueittensa ulkopuolella, jolloin massapartikkeliin kohdistuva massa- eli kappalevoima \mathbf{b} voidaan merkitä nolllaksi. Mielenkiinto kohdistuu kahteen yleisistä yhtälöistä (9.68) ja (9.69) saatavaan erikoistilanteeseen. Ensiksikin oletamme, että $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Tällöin massapartikkelin liike eli siirtymä on siis *pyörteetön* kenttä. Yhtälöstä (9.68) saadaan vektoriaalinen *aaltoyhtälö*

$$(9.70) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

eli

$$(9.71) \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

mistä nähdään aaltoliikeopin perusteella, että aaltoliikkeen etenemisnopeus on

$$(9.72) \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Näitä aaltoja kutsutaan pyörteettömiksi eli *irrotationaalisiksi* aalloiksi tai seismiikassa tavallisimmin *P*-aalloiksi, kuten tuonnempana perustellaan.

Toiseksi tarkastelemme tilannetta, jossa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Tällöin saamme suoraan yhtälöstä (9.67) vektoriaalisen aaltoyhtälön

$$(9.73) \quad \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

mistä nähdään, että aallon etenemisnopeus on

$$(9.74) \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Näitä aaltoja kutsutaan *ekvivolyymisiksi* aalloiksi tai seismiikassa tutummin *S*-aalloiksi, kuten tuonnempana tarkemmin perustellaan. Ekvivolyymi-termi viittaa siihen, että dilataatio $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ eli ainealkion tilavuus on vakio. Todettakoon, että ekvivolyymi-termi ei ole kuitenkaan kovin yleisesti käytössä suomenkielisessä kirjallisuudessa.

Etenemisnopeudet (9.72) ja (9.74) ovat paljon käytettyjä kaavoja seismisten aaltojen nopeuksien laskemisessa. Ne on edellä esitetty Lamén vakioiden avulla, mutta yhtälöiden (9.52)-(9.56) avulla ne voidaan lausua myös kimmo-
vakioiden E , ν , K ja μ avulla. Yksi tavallinen esitysmuoto on, kun merkitään $c_1 = c_P$ ja $c_2 = c_S$,

$$(9.75) \quad c_P = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$$

ja

$$(9.76) \quad c_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Yhtälöstä (9.69) näemme, että ainakin jompikumpi näistä aalloista on aina olemassa homogeenisessa ja isotrooppisessa väliaineessa, kun kappalevoimia ei ole.

Otetaan yhtälöstä (9.68) puolittain divergenssi, jolloin saadaan

$$(9.77) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

joka on skalaarinen aaltoyhtälö. Koska termi $\nabla \cdot \mathbf{u}$ kuvaa dilataatiota, kutsutaan irrotationaalisia aaltoja myös *dilataatioalloiksi*.

Otetaan yhtälöstä (9.67) puolittain roottori ($\mathbf{b} = 0$), jolloin saadaan

$$(9.78) \quad \frac{\mu}{\rho} \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla \times \mathbf{u}).$$

Tämä on vektoriaalinen aaltoyhtälö, joka kuvaa jäykän ainealkion rotaatio-
liikettä.

Aaltojen nopeuksien välille voidaan johtaa Poissonin suhteen avulla seuraava yhteys

$$(9.79) \quad \frac{c_P^2}{c_S^2} = 1 + \frac{1}{1 - 2\nu}.$$

Koska Poissonin suhde voi olla enintään 0,5, on $1 - 2\nu > 0$, ja tästä seuraa siten, että $c_P > c_S$. Seismologiassa onkin tapana kutsua nopeudella c_P eteneviä irrotationaalisia aaltoja *primaari-* eli *P*-aalloiksi, koska ne saapuvat järjestyskohdasta havaintokohtaan ensimmäisenä. Hitaammalla nopeudella c_S eteneviä aaltoja kutsutaan *sekundaarisiksi* aalloiksi eli *S*-aalloiksi. Näin tulevat perustelluiksi käyttöön ottamamme symbolit c_P ja c_S .

Huomautus. Poissonin suhteen yläraja 0,5 tulee siitä, että puristuvuuskerroin K (9.27) (kuten myös kimmokerroin E) tulee olla positiivinen luku. Kimmoisen aineen tapauksessa on voimassa yhtälö (9.56), mistä nähdään, että täysin kokoonpuristumattoman aineen tapauksessa $\nu = 0,5$, jolloin $K = \infty$. Kaikille todellisille aineille $\nu < 0,5$. Poissonin suhteen teoreettinen alaraja voi sen sijaan olla -1 . Tämä nähdään liukukerroin G eli toisen Lamén vakion (μ) lausekkeesta (9.52), jonka tulee olla myös positiivinen. Tavallisesti kuitenkin $\nu > 0$. ■

Edellä oleva tarkastelu koskee tilannetta, jossa aineessa ei ole rajapintoja, vaan koko avaruuden täyttää homogeeninen, isotrooppinen väliaine. Rajapintojen tapauksessa esiintyy myös muuntuyppisiä aaltoja.

9.3.1 Seismisen aaltoyhtälön ratkaisu kokoavaruudessa

Saadaksemme käsityksen seismisten aaltojen todellisesta luonteesta ratkaisemme aaltoyhtälön tasoallon tapauksessa homogeenisessa ja isotrooppisessa kokoavaruudessa. Aivan kuten sähkömagneettisten aaltojen kohdalla, tasoalto on approksimaatio aallolle, joka on kaukana lähteestä. Tasoaltoratkaisun tutkiminen tuottaa kuitenkin esityksemme tarpeita varten riittävän selvyuden seismisistä aalloista. Oletamme harmonisen aikariippuvuuden $e^{j\omega t}$ ja kirjoitamme aaltolukuvektorin \mathbf{k} suuntaan etenevälle tasoallolle (joka kuvaa siis massapartikkelin siirtymää \mathbf{u} tasapainoaseman suhteen) lausekkeen

$$(9.80) \quad \mathbf{u} = \mathbf{U}e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{j\omega t} = \mathbf{U}e^{-j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mathbf{U}e^{-j(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)},$$

missä $\mathbf{U} = U\mathbf{e}$ on siirtymän amplitudi, yksikkövektori $\mathbf{e} = \mathbf{u}/u$ osoittaa siirtymän eli värähtelyn suunnan, aaltoluku $\mathbf{k} = (2\pi/\Lambda)\mathbf{n}$ ja \mathbf{n} on aallon etenemissuuntaan osoittava yksikkövektori eli $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ ja $k = \omega/c = (2\pi)/\Lambda$. ω on kulmataajuus, Λ (iso lamda) aallonpituus ja c on aallon etenemisnopeus (vaihenopeus). (Käytämme isoa lamdaa (Λ) aallonpituuden symbolina, koska pieni lamda (λ) on jo käytössä Lamén vakiona.)

Tällöin voidaan kirjoittaa, kun huomataan, että nabla-operaattori kohdistettuna muotoa $e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ olevaan funktioon on $\nabla = -j\mathbf{k} = -jk\mathbf{n}$, kuten jo sähködynamiikan yhtälössä (6.115) on esitetty,

$$(9.81) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = -jk(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = -jk(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})Ue^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{j\omega t},$$

$$(9.82) \quad \nabla \times \mathbf{u} = -jk(\mathbf{n} \times \mathbf{u}) = -jk(\mathbf{n} \times \mathbf{e})Ue^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{j\omega t},$$

$$(9.83) \quad \nabla^2 \mathbf{u} = -k^2 \mathbf{u} = -k^2 \mathbf{e}Ue^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{j\omega t},$$

$$(9.84) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -k^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = -k^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) U e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$$

ja

$$(9.85) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{u} = -\omega^2 \mathbf{e} U e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}.$$

Sijoitetaan yhtälöt (9.83)-(9.85) yhtälöön (9.67), ja sovelletaan sitä aalto-
lähteiden ulkopuolella, jolloin kappalevoimat voidaan merkitä nolliksi. Jaka-
malla näin muodostuva yhtälö puolittain termien yhteisellä tekijällä $U e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}$
päädytään yhtälöön

$$(9.86) \quad (\lambda + \mu)(-k^2 \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})) + \mu(-k^2 \mathbf{e}) = \rho(-\omega^2) \mathbf{e}.$$

Tämä yhtälö voidaan edelleen jakaa puolittain $-k^2$:lla ja huomioida, että
 $\omega/k = c$. Tällöin yhtälö (9.86) voidaan saattaa muotoon

$$(9.87) \quad (\mu - \rho c^2) \mathbf{e} + (\lambda + \mu)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{n} = 0.$$

Tarkastellaan seuraavaksi, millä edellytyksillä tämä yhtälö toteutuu eli mil-
loin tasoaallon lauseke (9.80) on yleisen aaltolikeyhtälön (9.67) ratkaisu.
Huomataan, että yhtälö (9.87) toteutuu vain, jos

- (1) $\mathbf{e} = -\mathbf{n}$ tai jos
- (2) molemmat termit ovat nolliä.

Tapauksessa (1) siirtymä eli värähdyssuunta on yhdensuuntainen aallon
etenemissuunnan kanssa ($\mathbf{e} \parallel \mathbf{n}$). Toisin sanoen tällöin aaltoliike on *pitkit-
täinen*, (engl. longitudinal). Edelleen $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = -1$ ja $\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0$. Yhtälöstä
(9.87) saadaan $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, eli sama kuin yhtälön (9.72) mukainen no-
peus c_1 . Koska tällöin myös $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ yhtälön (9.82) mukaisesti ($\mathbf{n} \times \mathbf{e} = 0$),
ovat pitkittäiset aallot samalla myös dilataatio eli irrotationaalisia aaltoja.
Seismiikassa pitkittäistä aaltoa kutsutaan myös *P*-aalloksi. Pitkittäiset aallot
ovat siis ”puristus- ja vetoaaltoja”, (engl. compressional waves).

Tapauksessa (2) tulee olla voimassa ehdot: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0$ ja $c^2 = \mu/\rho$. Huo-
maamme, että tässä tapauksessa aallon nopeus on sama kuin yhtälön (9.74)
mukainen nopeus c_2 . Siirtymä eli värähdyssuunta on nyt kohtisuorassa aallon
etenemissuuntaa vastaan, sillä $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0$. Kysymyksessä on siis *poikittainen*
aaltoliike. Edelleen yhtälön (9.81) mukaan $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Poikittainen aaltoliike
on siis ekvivolyymistä aaltoliikettä.

Tarkastellaan seuraavaksi aaltorintamaan liittyvää traktiota poikittaisen
aaltoliikkeen tapauksessa. Traktiovektori voidaan muodostaa yhtälön (8.78)

mukaisesti sijoittamalla jännitysdydin paikalle yleistetyn Hooken lain mukainen lauseke (9.57), jossa siirtymänä on lauseke (9.80). Tällöin saadaan traktioksi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \left[\lambda \bar{\bar{I}} \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu (\mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u}) \right] \cdot \mathbf{n} \\
 (9.88) \quad &= -jk\lambda (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - jk\mu (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} - jk\mu \mathbf{u} \\
 &= -[\mu \mathbf{u} + (\lambda + \mu) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n}] jk \\
 &= -[\mu \mathbf{e} + (\lambda + \mu) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{n}] (jkU e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}).
 \end{aligned}$$

Yhtälön (9.88) viimeisestä muodosta nähdään, että kun $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = 0$, traktio on yhdensuuntainen venymän eli värähtelysuunnan kanssa. Sen normaalikomponentti aaltoliikkeen etenemissuunnassa on siis nolla. Tästä voidaan päätellä, että poikittainen aaltoliike tarkoittaa leikkausmuodonmuutoksiin liittyviä ”leikkausaaltoja”, (engl. shear waves) eli rotaatioaaltoja. Seismissä poikittaista aaltoa kutsutaankin usein *S*-aalloksi.

9.3.2 Seismiset aallot rajapintojen tapauksessa

Geofysiikan kannalta mielenkiintoisia tilanteita ovat ne, joissa seismiset aallot kohtaavat erilaisia rajapintoja. Tämä aihepiiri on sekä maanjäristysseismologian että seismisten menetelmien kannalta hyvin keskeinen. Koska esityksemme painopiste on kenttäyhtälöiden esittämisessä, emme lähde kovin syvällisesti perehtymään seismisten aaltojen käyttäytymiseen erilaisten rajapintojen läheisyydessä. Luomme enemmänkin kvalitatiivisen kuvan niistä ilmiöistä, joita tähän liittyy. Todettakoon kuitenkin heti alkajaisiksi, että periaatteessa kaikki seismisten aaltojen käyttäytymiseen liittyvät ilmiöt tulevat ymmärretyiksi ja niitä kuvaavat yhtälöt voidaan johtaa edellä esitetyn kimmoteorian avulla. Esityksemme rajoittui tosin vain yleistetyn Hooken lain mukaiseen kimmoteoriaan. Muuntyyppisten väliaineiden tapaukset vaativat kukin omat tarkastelunsa.

Seismiset potentiaalifunktiot

Rajapintojen tarkastelussa on usein hyödyllistä käyttää siirtymävektorille \mathbf{u} potentiaalesitystä, joten esittelemme seuraavaksi seismisessä kimmoteoriasa käytettävät potentiaalit. Olemme vektorianalyysin yhteydessä todenneet, että mielivaltainen, tietyt säännöllisyysvaatimukset täyttävä, vektorikenttä voidaan esittää skalaaripotentialin gradientin ja vektoripotentialin roottorin summana. Tämä tunnetaan ns. Helmholtzin lauseena (2.136), jonka mukaan siis vektorikenttä, jonka divergenssi ja rottori häviävät äärettömyydessä, voidaan jakaa pyörteettömään ja lähteettömään osaan. Näin ollen voimme

kirjoittaa

$$(9.89) \quad \mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{\psi},$$

missä ϕ on skalaaripotentiali, yksikkönä m^2 , ja $\vec{\psi}$ on vektoripotentiali, yksikkönä m^2 . Sijoittamalla tämä muoto massa-alkion yleiseen liikeyhtälöön (9.67), jossa $\mathbf{b} = 0$, saadaan

$$(9.90) \quad \nabla \left[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi - \rho \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \right] + \nabla \times \left[\mu\nabla^2\vec{\psi} - \rho \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} \right] = 0,$$

joka saadaan toteutumaan, kun asetetaan

$$(9.91) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

ja

$$(9.92) \quad \frac{\mu}{\rho} \nabla^2\vec{\psi} = \frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2}.$$

Nämä ovat luonteeltaan aaltoyhtälöitä. Niiden perusteella huomataan, että siirtymäkentän skalaaripotentiali ϕ etenee nopeudella $c_1 = c_P$ (9.72) ja vektoripotentiali $\vec{\psi}$ nopeudella $c_2 = c_S$ (9.74).

Todettakoon, että potentiaaleja ϕ ja $\vec{\psi}$ kutsutaan myös Lamén potentiaaleiksi, kun vektoripotentialille asetetaan lisäehto $\nabla \cdot \vec{\psi} = 0$ (vrt. tätä magneettiselle vektoripotentialille asetettavaan lisäehtoon, ns. Lorenzin ehtoon (6.57)). Tällöin saadaan ottamalla yhtälöstä (9.89) divergenssi ja roottori

$$(9.93) \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2\phi$$

ja

$$(9.94) \quad \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2\vec{\psi}.$$

Huomattakoon vielä, että jos oletamme potentiaaleille harmonisen aika-riippuvuuden $e^{j\omega t}$, saamme yhtälöistä (9.91) ja (9.92) potentiaaleja koskevat homogeeniset Helmholtzin yhtälöt

$$(9.95) \quad \nabla^2\phi + k_P^2\phi = 0$$

ja

$$(9.96) \quad \nabla^2\vec{\psi} + k_S^2\vec{\psi} = 0,$$

missä P - ja S -aallon aaltoluvut ovat $k_P = \omega/c_P$ ja vastaavasti $k_S = \omega/c_S$. Yhtälöt (9.95) ja (9.96) ovat voimassa lähdealueen ulkopuolella. Kun sijoitetaan yhtälö (9.93) yhtälöön (9.95) ja vastaavasti yhtälö (9.94) yhtälöön (9.96), voidaan potentiaalit lausua siirtymävektorin avulla

$$(9.97) \quad \phi = -\frac{1}{k_P^2} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

ja vastaavasti

$$(9.98) \quad \vec{\psi} = \frac{1}{k_S^2} \nabla \times \mathbf{u}.$$

Yhtälö (9.95) liittyy P -aaltoihin ja yhtälö (9.96) S -aaltoihin. Seismisissä menetelmissä P -aallot ovat keskeisiä, koska niitä on suhteellisen helppo tuottaa. Seismisissä menetelmissä usein tyydytäänkin tarkastelemaan vain P -aaltoihin liittyviä aaltokenttiä ja oletetaan, että rotaatioaaltoja ei ole, jolloin aaltokenttä on siis puhtaasti irrotationaalinen dilataatiokenttä eli P -aaltokenttä. On huomattava, että tällöin kysymyksessä on approksimaatio, koska kiinteässä aineessa voivat edetä sekä P - että S -aallot. Koska pitkittäiset aallot ovat luonteeltaan samoja kuin ilmassa etenevät ääniaallot eli *akustiset aallot*, käytetään seismisissä tarkasteluissa *akustista kenttäteoriaa*, joka varsinaisesti liittyy siis ääniaaltoihin. Tästä on vielä se huomattava etu, että akustisen kentän potentiaali ϕ on skalaarinen ja toteuttaa skalaarisen aaltoyhtälön (9.91) tai (9.95). Väliainetta, jossa etenevät vain P -aallot, sanotaan puhtaasti akustiseksi väliaineeksi.

Huomautus. Tietyissä seismisissä menetelmissä käytetään myös äänitaajuuden, siis kuultavissa olevia, aaltoja taajuusalueella 16 Hz - 20 kHz. Myös ultraääniä taajuusalueella n. 20 kHz - 1000 MHz hyödynnetään eräissä mitauksissa. ■

Rajapintojen luonteesta

Seismisissä tarkasteluissa on periaatteessa kolmentyyppisiä rajapintaprobleemeja. Ns. *vapaa* pinta on maan ja ilman (tarkemmin sanottuna tyhjiön) välinen rajapinta. Tällaisella rajapinnalla etenevät *pinta-aallot*, joita kutsutaan Rayleighin⁷ aalloiksi. Nämä aallot vaimenevat nopeasti syvyyden funktiona. Aaltojen nopeus on pienempi kuin P - ja S -aaltojen. Pinta-aaltojen nopeus on taajuuden funktio eli pinta-aallot ovat *dispersiivisiä*. Rayleighin aaltojen lisäksi seismologiassa esiintyy ns. *Love*⁸-aallot, jotka liittyvät S -aallon nopeuseropintaan. Emme kuitenkaan perehdy tarkemmin pinta-aaltoihin.

⁷Lordi (John William Strutt) Rayleigh (1842–1919), britt. fyysikko.

⁸Augustus Edward Hough Love (1863–1940), engl. geofyysikko ja fyysikko.

Toisen rajapintaprobleemin muodostaa kiinteän aineen ja nesteen rajapinta. Tällaisella rajapinnalla, kuten vesitäytteisen kairanreiän seinämässä, esiintyy ns. *putkiaaltoja*, jotka etenevät siis seinämää pitkin. Emme perehdy putkiaaltojen teoriaan tarkemmin.

Kolmannen ja sovelletun geofysiikan kannalta tärkeimmän tapauksen muodostaa kahden kimmoisilta ominaisuuksiltaan erilaisen aineen rajapinta. Tällöin tarkastelun kohteena ovat P - ja S -aaltojen taittuminen ja heijastuminen eli *sironna* aineiden rajapinnalla. P - ja S -aaltoja kutsutaan yhteisellä nimellä *runkoaalloiksi*, (engl. body waves). P -aallon kohdatessa vinosti rajapinnan osa sen kuljettamasta energiasta menee rajapinnan läpi eli taittuu ja osa heijastuu rajapinnasta. Taittumis-heijastumistilanteessa P -aallon lisäksi syntyy S -aaltoja eli tapahtuu ns. *aaltokonversio*. Yleisesti syntyy kumpaakin tulevaa aaltoa (P ja S) kohden neljä uutta aaltoa eli kaksi taittunutta ja kaksi heijastunutta. Jos P -aalto tulee kohtisuoraan rajapintaan, ei synny S -aaltoja, ja vastaavasti jos S -aalto tulee kohtisuoraan rajapintaan, ei synny P -aaltoja. Kuva 9.4 selvittää vinosti rajapintaan saapuvan P -aallon käyttäytymistä. Aaltojen taittumis- ja heijastumiskulmat noudattavat yleistä aaltoliikeopin mukaista lakia, ns. Snellin lakia.

P -aallon heijastuminen ja taittuminen noudattaa siten seuraavaa yhtälöä

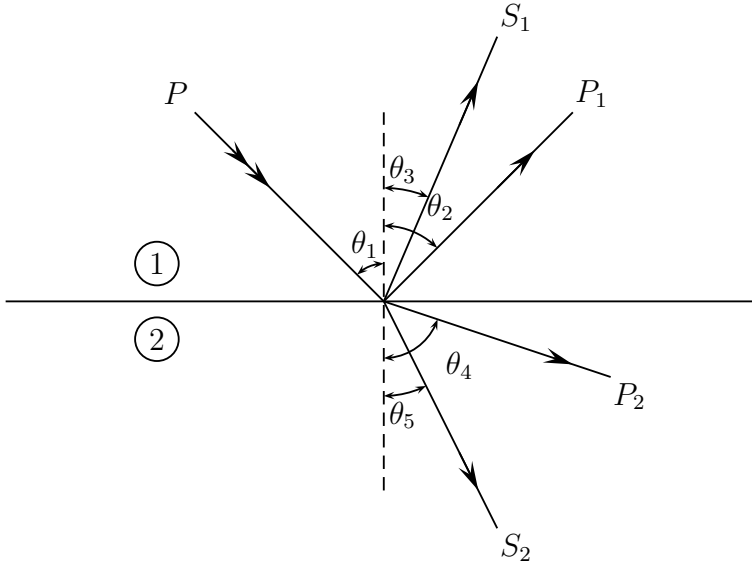
$$(9.99) \quad \frac{\sin \theta_1}{c_{P_1}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{P_1}} = \frac{\sin \theta_3}{c_{S_1}} = \frac{\sin \theta_4}{c_{P_2}} = \frac{\sin \theta_5}{c_{S_2}},$$

missä θ -kulmat ovat kuvan 9.4 mukaiset. P -aaltojen nopeudet ovat c_{P_1} ja c_{P_2} aineessa 1 ja vastaavasti aineessa 2. S -aaltojen nopeudet ovat vastaavasti c_{S_1} ja c_{S_2} . Vastaavanlainen nopeuksien ja kulmien välinen yhtälö voidaan esittää myös, kun tuleva aalto on S -aalto. Kuten jo todettiin, P -aallon kohdatessa rajapinnan kohtisuoraan ei synny lainkaan S -aaltoja ja vastaavasti S -aallon kohdatessa rajapinnan kohtisuoraan ei synny lainkaan P -aaltoja. Yhtälön (9.99) mukaan tulevan aallon tulokulma ja heijastuneen aallon heijastumiskulma ovat yhtäsuuret eli

$$(9.100) \quad \theta_1 = \theta_2.$$

Aaltojen heijastuminen ja taittuminen ovat perustana seismisten menetelmien käytölle. Seismisten aaltojen tarkastelussa voidaan käyttää ns. säde-teoriaa ja Huygensin⁹ periaatetta. Kun aallot kohtaavat rajapinnan, jonka kaarevuussäde on suuri aallonpituuteen nähden, kuten kuvassa 9.4, voidaan aallon kulkeutumista tarkastella säteenä, aivan kuten valo-opissa tavallisesti tehdään. Jos rajapintana on taso, sen kaarevuussäde on ääretön, joten

⁹Christiaan Huygens (1629–1695), tansk. fyysikko ja astronomi.



Kuva 9.4: Seismisen P -aallon heijastuminen ja taittuminen rajapinnalta, joka erottaa kaksi tiheydeltään ja elastisilta ominaisuuksiltaan erilaista ainetta.

sädeteoria on erittäin käyttökelpoinen vaakakerrostuneen maankamaran tapauksessa.

Jos aallot kohtaavat pinnan, jolla on aallonpituuteen nähden pieni kaarevuussäde, käytetään aallon etenemisen kuvaamisessa Huygensin periaatetta. Tämän periaatteen mukaan primaarisen aaltorintaman kutakin pistettä voidaan pitää uuden alkeisaallon eli sekundaarisen aallon keskuksena, josta aallot lähtevät radiaalisesti kulkeutumaan. Palloaallon muotoisten aaltorintamien verhokäyrä on primaarisen aaltorintaman etenemistä kuvaava käyrä. Heijastuminen, taittuminen ja Snellin laki voidaan johtaa Huygensin periaatteesta.

Seismisten aaltojen aallonpituus on tyypillisesti suuruusluokaltaan 100 m tai enemmän. Tämän valossa voi arvioida, kumpaa tapaa, sädeteoriaa vai Huygensin periaatetta, kannattaa soveltaa.

On huomattava, että seismisen runkoaallon taajuus ei muutu heijastumisessa ja taittumisessa, kuten ei sähkömagneettisenkaan aallon taajuus. Sen sijaan nopeus muuttuu johtuen erilaisista aineominaisuuksista ja siten myös aallonpituus on erilainen aineissa 1 ja 2. Näin ollen esimerkiksi P -aallon aaltoluvulle voidaan kirjoittaa aineessa 1 $k_{P_1} = \omega/c_{P_1}$ ja aineessa 2 $k_{P_2} = \omega/c_{P_2}$.

Rajapintaehdot

Aaltojen käyttäytymistä kahden aineen rajapinnalla selittävät yleiset rajapintaehdot. Fysikaalisesti nämä ilmaisevat sen, että siirtymän ja traktion on oltava jatkuvia rajapinnan läpi mentäessä. Rajapintaehdot voidaan siten lausua seuraavasti

1. pinnan normaalin suuntainen siirtymä on jatkuva,
2. pinnan tangentin suuntainen siirtymä on jatkuva,
3. normaalijännitys on jatkuva (traktion normaalikomponentti),
4. tangentiali- eli leikkausjännitys (traktion tangentialikomponentti) on jatkuva.

Siirtymän normaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa sitä, että aineet eivät eroa tai repeä irti toisistaan. Myöskään toinen aine ei voi olla samassa avaruuden osassa toisen aineen kanssa samanaikaisesti. Jos tällaiset ilmiöt tapahtuvat, tarvitaan probleemin käsittelemiseksi toisenlainen lähestymistapa. Siirtymän tangentialikomponentin jatkuvuus takaa sen, että aineet liikkuvat rajapinnan eri puolin samalla tavalla. Toisin sanoen aineet eivät liu'u toisensa suhteen eli niiden keskinäistä liukumaa ei esiinny. Tällaista rajapintaa kutsutaan englanninkielessä termillä *slip free* eli liukuvapaa rajapinta.

Traktion normaali- ja tangentialikomponenttien jatkuvuus takaa voiman jatkuvuuden, toisin sanoen kiihtyvyyden jatkuvuuden, rajapinnalla. Jos aineilla olisi rajapinnan eri puolin erilainen kiihtyvyys, seuraisi tästä, että rajapinnalla olevaan infinitesimaalisen ohueeseen ainekerrokseen kohdistuisi äärellinen nettovoima, ja sillä olisi siten kiihtyvyys, joka lähestyisi ääretöntä, kun rajapinnan eri puolilla olevat pisteet lähenisivät toisiaan. Traktion jatkuvuus takaa siis myös sen, että aineet pysyvät kiinni toisissaan rajapinnalla.

Kun tarkastelu kohdistetaan akustiseen väliaineeseen, jossa etenee siis ainoastaan pitkittäisiä aaltoja, saamme edellä olevien ehtojen avulla helposti ehdon myös potentiaalille ϕ . Huomaamme, että siirtymän tangentialikomponentin jatkuvuusehto tarkoittaa samalla, että potentiaalın ϕ on oltava jatkuva. Tämä nähdään siitä, että dilataatioaalton eli P -aallon tapauksessa $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ja kun tähän sovelletaan Stokesin lausetta, saadaankin juuri \mathbf{u} :n tangentialikomponenttia koskeva jatkuvuusehto $u_{1t} = u_{2t}$. Indeksit 1 ja 2 viittaavat aineisiin 1 ja vastaavasti 2. Koska $\mathbf{u} = \nabla\phi$, seuraa tästä, että $\phi_1 = \phi_2$.

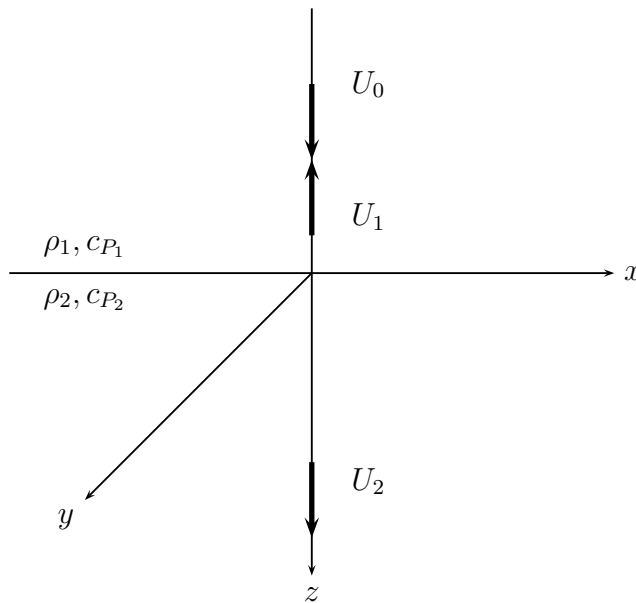
Edellä mainittujen rajapintaehtojes lisäksi potentiaalın ϕ on täytettävä säteilyehto

$$(9.101) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{r}^0 \cdot \nabla\phi - ik_P\phi) = 0,$$

missä r on pallonmuotoisen aaltorintaman säde tarkastelu- eli laskentapistestä äärettömyyteen kuvitellulle pinnalle S_∞ ja \mathbf{r}^0 on radiaalisuuntainen yksikkövektori.

P -muotoisen tasoallon kohtisuora heijastuminen kahden aineen rajapinnalta

Rajapintaehtojen avulla voidaan edelleen johtaa kohtisuoraan rajapintaan tulevan seismisen aallon heijastumista ja läpäisyä kuvaavat heijastus- ja läpäisykertoimet, kuten sähkömagneettistenkin aaltojen kohdalla yhtälöissä (6.142) ja vastaavasti (6.143). P -aallon tullessa kohtisuoraan pintaa vastaan se ei jakaudu P - ja S -aalloiksi, vaan heijastuu ja menee pinnan läpi samansuuntaisena P -aaltona (kuva 9.5).



Kuva 9.5: P -tasoallon kohtisuora heijastuminen ja läpäisy kahden kimmoisen aineen 1 ja 2 rajapinnalla. U_0 on tulevan aallon amplitudi, U_1 heijastuneen aallon amplitudi ja U_2 läpimenneen aallon amplitudi.

Oletetaan harmoninen aikariippuvuus. Valitaan karteesinen koordinaatisto siten, että aalto tulee z -akselin suunnassa, jolloin tasopintana on xy -taso. Tällöin siirtymä on pinnan normaalin suuntainen eikä sillä ole muita komponentteja. Pinnalla $z = 0$ jännitysdyadissa on ainoastaan pinnan

normaalin suuntainen jännityskomponentti $\sigma_{zz} = \sigma_{33}$. Toisin sanoen koordinaatiston valinnan ja jännitysydin symmetrisyyden ansiosta voidaan merkitä $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{11} = \sigma_{yy} = \sigma_{22} = 0$ sekä $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0$. Traktioksi saadaan siten

$$(9.102) \quad \mathbf{t} = \sigma_{33}\mathbf{e}_3 = \sigma_{zz}\mathbf{e}_z.$$

Rajapintaehtojen mukaan siirtymän normaalikomponentin on oltava jatkuva, kuten myös traktion pintaa vastaan kohtisuoran komponentin.

Aikaharmonisessa tapauksessa tulevalle aallolle eli siirtymälle voidaan kirjoittaa yhtälön (9.80) mukaisesti

$$(9.103) \quad \mathbf{u}_0 = U_0\mathbf{e}_z e^{-jk_1 z} e^{j\omega t}.$$

Vastaavasti heijastuneelle aallolle voidaan kirjoittaa

$$(9.104) \quad \mathbf{u}_1 = -U_1\mathbf{e}_z e^{jk_1 z} e^{j\omega t}$$

ja läpimenneelle aallolle

$$(9.105) \quad \mathbf{u}_2 = U_2\mathbf{e}_z e^{-jk_2 z} e^{j\omega t}.$$

Aaltoluvut k_i tarkoittavat siis tässä P -aallon aaltolukuja k_{P_i} ($i = 1, 2$). Aineessa 1 ovat tuleva aalto ja heijastunut aalto. Aineessa 2 on ainoastaan läpimennyt aalto, koska oletamme, että aalto ei kohtaa enää mitään uutta rajapintaa. Rajapinnalla ($z = 0$) on siirtymän jatkuvuusehto kirjoitettavissa siten muotoon

$$(9.106) \quad (\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{e}_z,$$

josta sieventämällä saadaan amplitudeja koskeva ehto

$$(9.107) \quad U_0 - U_1 = U_2.$$

Oletetaan Hooken lain mukainen kimmoinen väliaine, jolloin tulevan aallon traktiolla voidaan kirjoittaa yhtälön (9.88) mukaisesti, kun siihen lisäksi merkitään $\mathbf{n} = \mathbf{e} = \mathbf{e}_z$,

$$(9.108) \quad \mathbf{t}_0 = -(\lambda_1 + 2\mu_1)jk_1 U_0\mathbf{e}_z e^{-jk_1 z} e^{j\omega t}.$$

Heijastuneeseen aaltoon liittyvä traktio on vastaavasti

$$(9.109) \quad \mathbf{t}_1 = (\lambda_1 + 2\mu_1)(-jk_1)U_1\mathbf{e}_z e^{jk_1 z} e^{j\omega t}$$

ja läpimenneeseen aaltoon liittyvä traktio

$$(9.110) \quad \mathbf{t}_2 = -(\lambda_2 + 2\mu_2)jk_2U_2\mathbf{e}_ze^{-jk_2z}e^{j\omega t}.$$

Traktion jatkuvuusehto pinnalla $z = 0$ antaa yhtälön

$$(9.111) \quad (\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_z,$$

johon sijoittamalla yhtälöt (9.108)-(9.110) ja sieventämällä saadaan

$$(9.112) \quad -(\lambda_1 + 2\mu_1)k_1U_0 - (\lambda_1 + 2\mu_1)k_1U_1 = -(\lambda_2 + 2\mu_2)k_2U_2.$$

Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin kerrointa $(\lambda + 2\mu)k$. Koska $k = \omega/c_P$ ja kulmataajuus ω on sama tulevassa, heijastuneessa ja läpimenneessä aallossa, kohdistuu mielenkiintomme viime kädessä kertoimeen $(\lambda + 2\mu)/c_P$. P -aallon etenemisnopeuden yhtälön (9.72) mukaan on voimassa

$$(9.113) \quad \lambda + 2\mu = \rho c_P^2,$$

jolloin kyseinen kerroin saadaan muotoon

$$(9.114) \quad \frac{\lambda + 2\mu}{c_P} = \rho c_P.$$

Näin ollen on tarkoituksenmukaista ottaa käyttöön suure ρc eli määritellä ns. *akustinen impedanssi*

$$(9.115) \quad Z = \rho c,$$

missä siis ρ on väliaineen tiheys ja c seisminen aallon nopeus. Akustisen impedanssin yksiköksi saadaan Pa s/m eli N s/m³.

Akustisen impedanssin avulla traktion jatkuvuusyhtälö (9.112) saadaan muotoon

$$(9.116) \quad -Z_1U_0 - Z_1U_1 = -Z_2U_2.$$

Heijastuskerroin määritellään heijastuneen ja tulevan aallon amplitudien suhteena. Vastaavasti *läpäisykerroin* on läpimenneen aallon amplitudin ja tulevan aallon amplitudin suhde.

Yhtälöistä (9.107) ja (9.116) saadaan heijastuskerroin

$$(9.117) \quad R = \frac{U_1}{U_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\rho_2 c_{P_2} - \rho_1 c_{P_1}}{\rho_2 c_{P_2} + \rho_1 c_{P_1}}$$

ja läpäisykerroin

$$(9.118) \quad T = \frac{U_2}{U_0} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

On huomattava, että akustinen impedanssi (9.115) on analoginen sähködynamiikan aaltoimpedanssille (6.136). Tästä johtuu sen nimi impedanssi.

Tarkkaavainen lukija voi kylläkin ihmetellä, miksi läpäisy-yhtälön (9.118) osoittajassa on $2Z_1$ eli aineen 1 ominaisuudet, kun vastaavassa sähkömagneettisessa läpäisy-yhtälössä (6.143) on osoittajassa $2\eta_2$ eli aineen 2 ominaisuudet. Syynä on aaltojen erilainen luonne. Seismiset P -aallot ovat pitkittäisiä aaltoja. Sen sijaan sähkömagneettiset aallot ovat poikittaisia aaltoja. On lisäksi hyvä huomata, että P -aallon läpäisykerroimen ja heijastuskertoimen summa on yksi. Sähkömagneetiikassa läpäisykerroimen ja heijastuskertoimen erotus on sen sijaan yksi.

Edellä tarkastelu koski kohtisuoraan rajapintaa kohti tulevaa aaltoa. Tämä tarkastelu pätee myös lievästi vinossa kulmassa rajapintaan tulevien aaltojen tapauksessa. Karkeasti voidaan sanoa, että aallon heijastus- ja läpäisykerroimet ovat edellä esitetyn mukaiset, kun tulokulma on pienempi kuin 20° . Niin muodoin esittämällämme tarkastelulla on myös huomattava käytännön merkitys.

Vinosti kahden aineen rajapintaan tulevan seismisen aallon käyttäytyminen voidaan myös täysin määrittää rajapintaehtojen avulla. Emme kuitenkaan tarkastele tätä yksityiskohtaisesti. Toteamme, että näin päädytään aaltojen amplitudeja koskeviin ns. *Zöppritzin*¹⁰ yhtälöihin, joiden avulla voidaan arvioida mm. kohtisuoran heijastuksen ja läpäisyn approksimatiivista pätevyysaluetta.

9.3.3 Loppuhuomautus seismisestä kenttäteoriasta

Seismisten kimmoaaltojen teoria on laaja ja keskeinen aihepiiri geofysiikassa. Edellä johdimme aaltojen keskeiset yhtälöt ainoastaan yksinkertaisen Hoo-ken väliaineen tapauksessa. Aaltojen taittumis- ja heijastumiskäyttäytymistä kuvaa Snellin laki, joka on muodostettavissa paitsi Huygensin periaatteen mukaisesti myös rajapintaehtoja soveltamalla.

Seismiset menetelmät ovat joko aaltojen heijastumiseen tai taittumiseen pohjautuvia. Molemmissa mitataan oleellisesti aikaeroa lähetetyn ja vastaanotetun signaalin välillä. Tuntemalla väliaineiden tiheydet ja elastiset ominai-

¹⁰Karl Zöppritz (1881–1908), saks. geologi ja geofyysikko. Hänen heijastus- ja läpäisykerroimia koskeva tutkimuksensa "Über Reflexion und Durchgang seismischer Wellen durch Unstetigkeitsflächen" painettiin postuumisti vasta I Maailmansodan jälkeen vuonna 1919.

suudet sekä tekemällä mahdollisesti vielä muitakin oletuksia väliaineesta, kuten sen paloittaisesta homogeenisuudesta ja isotrooppisuudesta, voidaan kulkuaikojen perusteella määrittää geologisten muodostumien geometrisiä parametreja, kuten kerrostumien paksuuksia.

Seismiset S -aallot voivat olla polarisoituneita eli voivat värähdellä joko pystysuorassa tai vaakasuorassa tasossa, jolloin puhutaan SV - ja vastaavasti SH -aalloista.

Seismisissä menetelmissä aallot synnytetään tavallisimmin räjähteiden tai täryttimien avulla. Myös vasaran iskulla voidaan tuottaa aaltoja. Tämä tunnetaan ns. vasaraseismisenä menetelmänä.

On huomion arvoista, että edellä esittämämme kimmoaaltojen teoria on muodostettavissa suoraan kontinuumimekaniikan pohjalta.

9.4 Kalliomekaniikan kenttäteoria

Luomme seuraavassa lyhyen katsauksen kalliomekaniikan kenttäteoreettiseen taustaan kontinuumimekaniikan yhtenä sovelluksena. Klassillinen kalliomekaniikka pohjautuu pienten siirtymien teoriaan. Kalliomekaniikan perusongelma on jännitys- ja muodonmuutoskenttien määrittäminen, kun kallioon tehdään onkalo, tunneli tms. tila, joka muuttaa kalliossa vallitsevaa ns. primaarijännitystilaa. Toisen tärkeän ongelma-alueen muodostaa kallion murtumismekaniikka. Kalliossa olevan tasomaisen raon suuntaisen leikkausjännityksen ja sitä vastaan kohtisuorassa olevan normaalijännityksen välinen (konstitutiivinen) yhteys on keskeinen rakoilleen kallion mekaanisen käyttäytymisen analysoinnissa.

Useimmiten kallion oletetaan käyttäytyvän, ainakin ensimmäisessä approksimaatiossa, yleistetyn Hooken lain mukaisesti. Lamén vakioiden sijasta kalliomekaanisissa tarkasteluissa käytetään tavallisesti kimmokerrointa eli Youngin modulia E ja Poissonin lukua ν .

9.4.1 Kalliomekaniikan tasapainoyhtälöt

Kun tasapainossa olevaan neutseelliseen kallioon tehdään onkalo, aiheutuu tästä onkalon ympäristöön jännitysten uudelleen jakautuessa ajasta riippuvia ns. *transientti-ilmiöitä*.

Klassillisessa kimmo- ja lujuusopissa tarkastellaan tilannetta, jossa transientti-ilmiöitä ei enää esiinny ja kalliomassa on siten saavuttanut uuden tasapainoaseman. Näin ollen kalliomekaniikan perusyhtälöt saadaan edellä esitetyistä seismisten kimmoaaltojen teorian yhtälöistä jättämällä huomiotta

aikaderivaatta-termit merkitsemällä ne nolliksi. Kenttäprobleemi redusoituu siten puhtaaksi statiikan ongelmaksi.

Tasapainoyhtälöiksi saadaan yhtälöstä (9.66)

$$(9.119) \quad \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = 0.$$

Komponenttimuodossa nämä yhtälöt ovat

$$(9.120) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho b_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho b_2 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Yhtälöstä (9.77) saadaan dilataatiota koskeva Laplacen yhtälö

$$(9.121) \quad \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla^2 \Delta = 0.$$

Vastaavasti yhtälöstä (9.78) saadaan siirtymän roottoria koskeva vektoriaalinen Laplacen yhtälö

$$(9.122) \quad \nabla^2(\nabla \times \mathbf{u}) = 0.$$

Nämä yhtälöt ovat voimassa kiinteän alueen sisällä. Lisäksi alueen pinnalla ovat voimassa tietyt reunaehdot. Tavallisesti nämä ovat jännitystä tai siirtymää koskevia.

Yhtälöiden (9.120) lisäksi tarvitaan väliaine yhtälöt eli jännityksen ja venymän väliset yhteydet. Huomautettakoon, että venymien tulee lisäksi täyttää ns. *kompatibiliteettiyhtälöt* ((9.19)-(9.24)), koska venymäkomponentit eivät ole toisistaan riippumattomia.

Muistutettakoon, että yhtälöt (9.121) ja (9.122) eivät ole voimassa alkujännitysten tai lämpöjännitysten tapauksessa. Yhtälöt johdettiin yleistetyn Hooken lain avulla, ja ne koskevat siten vain ideaalista kimmoista ainetta. On huomattava, että nämä yhtälöt saadaan olettamalla kappalevoimat vakioiksi, ei siis välttämättä nolliksi.

Puoliäärettömän alueen painovoimasta aiheutuva jännityskenttä

Yhtälöstä (9.120) ja yleistetystä Hooken laista (9.39) saadaan suoraan ns. *litostaattista jännitystilaa* kuvaavat yhtälöt, kun tarkastellaan puoliäärettöntä aluetta. Olkoon puoliäärettömän alueen reuna tason $x_1 x_2$ suuntainen ja sijaitkoon kohdassa $x_3 = 0$. Kun merkitsemme $\mathbf{b} = b_3 \mathbf{e}_3 = -g \mathbf{e}_3$, saamme

yhtälöstä (9.119) tai (9.120) integroimalla homogeenisen aineen tapauksessa ja vakio painovoimakentässä

$$(9.123) \quad \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{33} = \rho g z.$$

Alueen reunalla $x_3 = z = 0$ pystysuora jännityskomponentti $\sigma_{33} = 0$. On huomattava, että gravitaatiosta aiheutuva jännitys on yleisessä tapauksessa laskettava integraalista

$$(9.124) \quad \int_0^z \rho g(z) dz.$$

Myös tiheys on useimmiten ainakin syvyyden eli x_3 :n funktio. Edelleen oletamme, että σ_{11} ja σ_{22} ovat vain x_3 :n funktioita.

Litostaattisen hypoteesin mukaan ainealkion venymät vaakasuunnassa ovat nollija eli $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$, jolloin dilataatio $\Delta = \epsilon_{33}$. Yleistetty Hooken laki tuottaa yhtälön

$$(9.125) \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \lambda \epsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{33},$$

joista päädytään yhtälön (9.48) avulla yhtälöön

$$(9.126) \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{33} = \frac{\nu}{1 - \nu} \rho g h,$$

missä ν on Poissonin luku.

Huomautus. Edellä esitimme yhtälöt yleisessä kolmiulotteisessa muodossa. Usein käytännön laskuja varten tehdään oletus *tasojännitystilasta* tai *tasomuodonmuutostilasta*. Tasojännitystilasta syntyy ohuessa levyssä, kun sitä kuormitetaan reunoiltaan tason suuntaisilla voimilla. Tasomuodonmuutostila soveltuu käytettäväksi pitkissä sylinterimäisissä rakenteissa, joita kuormittavat voimat ovat kohtisuoraan sylinterin akselia vastaan ja voimat eivät muutu akselin suunnassa. Näin on usein esimerkiksi vaakatunneleissa. On huomattava, että tasojännitystilassa kaikki jännityskomponentit ovat tason suuntaisia, mutta venymiä voi esiintyä myös tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. Vastaavasti tasomuodonmuutostilassa kaikki venymätensorin komponentit ovat tason suuntaisia, mutta jännitystä voi esiintyä myös tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa. ■

9.4.2 Primaarijännityskenttä

Edellä käsitelty puoliäärettömän alueen jännityskenttä voidaan ymmärtää ideaalitalanteen primaarijännityskentäksi. Primaarijännityskenttä on kuitenkin

kin useimmiten määritettävä mittaamalla, koska sen aikaansaavat hyvin monimutkaiset geodynaamiset prosessit, kuten Atlantin keskiselänteeltä alkava merenpohjan laajeneminen. Suomessa myös jääkauden jälkeinen maan nousu vaikuttaa primaarijännityskenttään. Tyypillistä Fennoskandian kilven primaarijännityskentälle on huomattavan suuri vaakasuuntainen eli horisontaalipuristus. Primaarijännityskentällä on itse asiassa useita spatiaalisia mitakaavoja. Usein kalliomekaanisissa tarkasteluissa oletetaan, että primaarijännitys on homogeeninen tarkasteltavalla alueella. On huomattava, että koska jännitys on paikasta (ja ajasta) riippuva tensorisuure, puhumisen vaaka- ja pystyjännityksistä tarkoittaa tensorin ao. komponentteja.

Hyvin syvällä vaakakomponentit lähestyvät pystykomponenttia ja syntyy puhdas hydrostaattinen jännitystila. Edellä oleva puoliäärettömän alueen tarkastelu pätee homogeenisen ja isotrooppisen väliaineen tapauksessa. Erilaiset kalliomassan epähomogeenisuudet, kuten rakoilu ja liuskeisuus, aiheuttavat muutoksia jännitystilaan.

Koska ν on usein noin 0,25, saadaan edellä olevan yhtälön (9.126) perusteella tulos, jonka mukaan vaakasuuntaiset ns. *pääjännitykset* σ_1 ja σ_2 ovat karkeasti ottaen $1/3$ vertikaalisesta pääjännityksestä σ_3 . Tällöin siis jännitykset eivät vastaa hydrostaattista tilaa. Pääjännityksiä tarkastellaan tarkemmin seuraavassa kohdassa.

On myös huomion arvoista, että koska kallion ja veden tiheyksien suhde on noin 3 : 1, hydrostaattinen paine vettä sisältävässä raossa on samaa suuruusluokkaa kuin kiinteän kallion vaakasuora pääjännitys.

Usein kalliomekaniikassa ajatellaan primaarisen pystyjännityksen vastaavan litostaattista painetta. Kalliomassan reunoilla vaikuttavat puristus- ja vetojännitykset vastaavat ns. *sivupainetta*. Laboratoriomittakaavan kokeissa sivupaineella on hyvin keskeinen merkitys.

Huomautus 1. Terminologisena seikkana tulokoon todetuksi, että hydrostaattista jännitystilaa ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$), joka voidaan siis kuvata yhdellä skalaarisuureella eli paineella, kutsutaan joissakin teoksissa *isotrooppiseksi* jännitystilaksi. Yleisesti jännitys on kuitenkin tensori, jonka kuvaamiseksi käytetään neliömuotoa olevaa lauseketta

$$(9.127) \quad \sigma_{ij}x_ix_j = \pm k^2.$$

Jos koordinaattiakselit valitaan siten, että ne yhtyvät jännityksen *pääakselisuuntiin* ja kun reaalinen vakio k valitaan sopivasti, vastaa tämä geometrisesti kolmiulotteista ns. *Lamén jännitysellipsoidia*, jonka puoliakseleina ovat ns. *pääjännitykset*. Näissä suunnissa jännitys on joko puhdasta vetoa tai puristusta. Välillä olevissa suunnissa esiintyy myös leikkausjännityksiä. Korostettakoon, että terminologisesti ei ole korrektia kuitenkaan puhua *jännityskentän* anisotropiasta tai anisotrooppisesta jännityskentästä, koska yleisesti

isotropia ja anisotropia ovat *aineen* ominaisuuksia eivätkä kentän. Jännityskentällä on yleisesti aina kolme erisuuruista toisiaan vastaan kohtisuoraa pääjännitystä. ■

Huomautus 2. Jännityskentän homogeenisuus tarkoittaa siis sen tasalaa-tuisuutta eli jännitystensorin vakioisuutta. Toisin sanoen pääjännitykset ja niiden suunnat ovat vakioita tarkasteltavassa tilavuudessa. ■

Vastaavanlaiset huomautukset 1 ja 2 voidaan esittää myös venymiä koskevina.

9.4.3 Pääjännitykset ja jännityskentän invariantit

Edellä jo viittasimme pääakselisuunnissa olevien pääjännitysten käsitteeseen, mutta emme tarkemmin selvittäneet, miten pääjännitykset voidaan määrittää. Tarkastelemme tätä seuraavaksi. Jonkin pisteen kautta asetetulla pintaalkiolla, jonka suunta määräytyy alkion yksikkönormaalivektorin \mathbf{n} avulla, vaikuttava traktio on yhtälön (8.78) mukaan

$$(9.128) \quad \mathbf{t} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}}.$$

Tarkastellaan otaksuttua tapausta, jossa alkion suunta on sellainen, että traktion leikkausjännityskomponentit häviävät eli traktiovektori on yhdensuuntainen normaalivektorin kanssa. Tällöin on siis kirjoitettavissa

$$(9.129) \quad \mathbf{t} = \Sigma \mathbf{n},$$

missä $\Sigma \mathbf{n}$ on siis pintaa vastaan kohtisuorassa oleva traktio. Kun yhdistämme yhtälöt (9.128) ja (9.129), saamme

$$(9.130) \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \Sigma \mathbf{n} = \Sigma \mathbf{n} \cdot \bar{\bar{I}},$$

missä $\bar{\bar{I}}$ on yksikködyadi.

Yhtälö (9.130) voidaan edelleen saattaa muotoon

$$(9.131) \quad (\bar{\bar{\sigma}} - \Sigma \bar{\bar{I}}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Probleemi on siis redusoitunut jännitysdyadin ominaisarvojen ja ominaisvektoreiden määrittämiseen. Koska jännitysdyadi on symmetrinen, ovat sen ominaisvektorit reaalisia ja ortogonaalisia.

Yhtälöllä (9.131) on ei-triviaali ratkaisu vain, jos kerroinmatriisin determinantti häviää eli

$$(9.132) \quad \det(\bar{\bar{\sigma}} - \Sigma \bar{\bar{I}}) = 0.$$

Toisin sanoen pääjännitykset Σ toteuttavat seuraavan yhtälön

$$(9.133) \quad \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \Sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \Sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \Sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Tämä on kolmannen asteen yhtälö, jolla on kolme reaalista juurta. Nämä juuret ovat etsittyjä pääjännityksiä. Niitä vastaavat normeeratut ominaisvektorit ovat \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 ja \mathbf{n}_3 . Kehittämällä determinantti (9.133) auki saadaan muoto

$$(9.134) \quad \Sigma^3 - I_1 \Sigma^2 - I_2 \Sigma - I_3 = 0,$$

missä

$$(9.135) \quad I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$(9.136) \quad I_2 = -(\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{11}\sigma_{22}) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2,$$

$$(9.137) \quad I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{12} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2.$$

Koska yhtälön (9.134) juuret ovat *pääjännityksiä*, jotka eivät riipu koordinaatistosta, myös kertoimien I_1 , I_2 ja I_3 tulee olla koordinaatistosta riippumattomia. Tämän johdosta kertoimia I_1 , I_2 ja I_3 kutsutaan jännityksen *invariantteiksi*. Niillä on siis sama arvo riippumatta suorakulmaisen koordinaatiston akselien valinnasta.

Merkitsemällä pääjännityksiä Σ_1 , Σ_2 ja Σ_3 voidaan invariantit kirjoittaa muotoon, jossa leikkausjännityskomponentit ovat nollia

$$(9.138) \quad I_1 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3,$$

$$(9.139) \quad I_2 = -(\Sigma_2\Sigma_3 + \Sigma_3\Sigma_1 + \Sigma_1\Sigma_2),$$

$$(9.140) \quad I_3 = \Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3.$$

Pääjännitysten suunnat \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 ja \mathbf{n}_3 voidaan määrittää sijoittamalla vuorollaan kukin Σ_i , $i = 1, 2, 3$ yhtälöön (9.131). Näitä suuntia kutsutaan *pääsuunniksi*. Yleinen käytäntö on laittaa pääjännitykset aritmeettisesti pienevään järjestykseen, toisin sanoen

$$(9.141) \quad \Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3.$$

Vastaavanlaiset tarkastelut voidaan tehdä myös venymille, jolloin saadaan venymän invariantit. Pääsuuntien välillä on voimassa oikean käden sääntö eli esimerkiksi $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, jolloin siis kolmas pääsuunta saadaan aina kahden muun avulla lasketuksi.

On huomattava, että pääjännitykset ja niitä vastaavat *päävenymät* ovat kussakin kontinuumin pisteessä olevia jännityksiä ja venymiä. Jännitystila ja muodonmuutostila vastaavat toisiaan muodollisesti, kun normaalijännitys vastaa (normaali)venymää ja leikkausjännitys leikkausvenymää eli liukumaa. Päävenymien suunnissa ei esiinny liukumia.

Yleinen käytäntö myös päävenymien suhteen on esittää ne numeroituina yhdestä kolmeen pienenevässä suuruusjärjestyksessä.

Isotrooppisessa, yleistetyn Hooken lain mukaisessa, lineaarisessa väliaineessa pääjännitysten ja päävenymien suunnat ovat samat.

Invarianttien avulla voidaan muodostaa mittoja jännitystilalle. Yksi tavallinen mitta leikkausjännityksille on ns. oktaedrinen leikkausjännityskriteeri, joka määritellään yhtälöllä

$$(9.142) \quad \begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \{ (\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2 \}^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 + 3I_2}. \end{aligned}$$

Olettamalla leikkausjännitys rakoilua aiheuttavaksi mekanismiksi oktaedrista leikkausjännityskriteeriä voidaan käyttää paikantamaan alueita, joissa rakoilu todennäköisesti tapahtuu. Oktaedrisen leikkausjännityskriteerin määrittelyn tarkoituksenmukaisuus tulee ymmärrettäväksi, koska voidaan osoittaa (kuten seuraavassa näemme), että suurimmat leikkausjännitykset vallitsevat aina kahden pääjännityksen välillä: $\tau = (1/2)(\Sigma_i - \Sigma_j)$, ($i < j$). Suurin mahdollinen leikkausjännitys vallitsee Σ_1 :n ja Σ_3 :n välillä

$$(9.143) \quad \tau_{max} = \frac{1}{2}(\Sigma_1 - \Sigma_3).$$

Leikkausjännitystason suunta on 45° pääjännityksiin nähden. Tämä tulos on lähtökohtana mm. siirrosten analysoinnissa rakennegeologiassa.

Traktion itseisarvon, normaalijännityksen ja leikkausjännityksen välillä on jo todettu olevan yhteys (yhtälö (8.68))

$$(9.144) \quad \sigma^2 + \tau^2 = |\mathbf{t}|^2.$$

Käytämme tätä yhteyttä, kun määritämme mielivaltaisen pinta-alkion leikkausjännityksen pääjännitysten funktiona. Olkoon pinta-alkion normaali $\mathbf{n} =$

$n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z$, missä nyt käytämme erotukseksi pääakselikoordinaatistosta karteesisille koordinaatistolle x, y, z -koordinaatteja. Tällöin traktion komponentit ilmaistuina pääjännitysten avulla ovat

$$(9.145) \quad t_x = \Sigma_1 n_x, \quad t_y = \Sigma_2 n_y, \quad t_z = \Sigma_3 n_z.$$

Normaalijännitys saadaan puolestaan yhtälöstä

$$(9.146) \quad \sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \Sigma_1 n_x^2 + \Sigma_2 n_y^2 + \Sigma_3 n_z^2.$$

Traktion itseisarvon neliö on

$$(9.147) \quad t^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = \Sigma_1^2 n_x^2 + \Sigma_2^2 n_y^2 + \Sigma_3^2 n_z^2.$$

Näin ollen leikkausjännitykselle saadaan yhtälöstä (9.144)

$$(9.148) \quad \begin{aligned} \tau^2 &= \Sigma_1^2 n_x^2 + \Sigma_2^2 n_y^2 + \Sigma_3^2 n_z^2 - (\Sigma_1 n_x^2 + \Sigma_2 n_y^2 + \Sigma_3 n_z^2)^2 \\ &= (\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 (n_x n_y)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 (n_y n_z)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2 (n_z n_x)^2. \end{aligned}$$

Lisäksi on huomattava, että koska \mathbf{n} on yksikkövektori, pätee

$$(9.149) \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Yhtälöistä (9.146), (9.147) ja (9.149) voidaan ratkaista mm. yksikkövektorin komponenttien neliöt lausuttuina normaalijännityksen (σ), leikkausjännityksen (τ) ja pääjännitysten (Σ_1, Σ_2 ja Σ_3) funktiona.

Olemme kuitenkin nyt kiinnostuneita määrittämään sen tason suunnan, jolla leikkausjännitys saa suurimman arvon sekä tämän suurimman arvon suuruuden. Tässä tarkoituksessa muodostamme funktiota (9.148) apuna käyttäen derivaatat

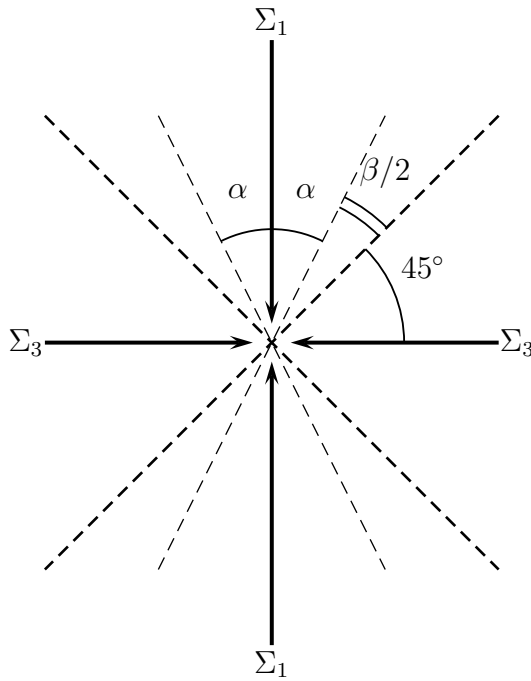
$$(9.150) \quad \frac{\partial \tau}{\partial n_x} = \frac{\partial \tau}{\partial n_y} = 0.$$

On huomattava, että yhtälön (9.149) mukaan on vain kaksi riippumatonta normaaliyksikkövektorin komponenttia, koska kolmas voidaan laskea $n_z^2 = 1 - n_x^2 - n_y^2$. Käyttäen tätä tietoa saadaan algebrallisten laskutoimitusten jälkeen ns. *pääleikkausjännitykset* (jotka kirjoitetaan nyt olettamalla puristus positiiviseksi)

$$(9.151) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2}(\Sigma_1 - \Sigma_2), & \text{kun } n_x = n_y = 1/\sqrt{2}, n_z = 0, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2}(\Sigma_1 - \Sigma_3), & \text{kun } n_x = n_z = 1/\sqrt{2}, n_y = 0, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2}(\Sigma_2 - \Sigma_3), & \text{kun } n_y = n_z = 1/\sqrt{2}, n_x = 0. \end{aligned}$$

Koska pääjännitykset asetetaan järjestykseen $\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$, voidaan päätellä, että suurin mahdollinen leikkausjännitys on juuri yhtälön (9.143) mukainen. Se sijaitsee tasolla, joka muodostaa 45° kulman pääjännitysten Σ_1 ja Σ_3 kanssa ja joka on kohtisuorassa näiden pääjännitysten määrittelemää tasoa vastaan eli on keskimmäisen pääjännityksen Σ_2 suuntainen.

On huomattava, että murtuminen tapahtuu kuitenkin useimmiten hieman eri tasoja pitkin. Maksimaalisen leikkausjännitystason ja murtumistason välisen kulman kaksinkertaista arvoa $\beta = 90^\circ - 2\alpha$, missä α on murtumistason ja pääjännityksen Σ_1 välinen kulma, kutsutaan *sisäiseksi kitkakulmaksi* (kuva 9.6). Sen arvo riippuu jännitystilasta ja materiaalista.



Kuva 9.6: Maksimileikkausjännityksen tasojen (paksu katkoviiva) ja murtumistasojen (ohut katkoviiva) väliset kulmat. α on murtumistason ja pääjännityksen Σ_1 välinen kulma. β on sisäinen kitkakulma.

Edellä oleva tarkastelu luo pohjan myös ns. *Mohrin*¹¹ jännitysypyrälle, joka kuvaa normaali- ja leikkausjännityksen välisen yhteyden pääjännitysten avulla. Tässä esityksessä emme kuitenkaan perehdy tarkemmin Mohrin ympyräteknikkaan. Mohrin ympyrää käytetään mm. rakennegeologiassa.

¹¹Otto Mohr (1835–1918), saks. insinööri.

Aineen murtumisen kuvaamiseksi on kehitetty erilaisia murtumishypoteeseja. Yksi sellainen on ns. *Mohr-Coulombin* murtumisteoria, joka perustuu juuri edellä esityn sisäisen kitkakulman käsitteelle. Tälle murtumisteorialle voidaan esittää ensimmäisessä approksimaatiossa seuraava empiirinen lineaarinen yhtälö

$$(9.152) \quad \tau = C + \sigma \tan \beta,$$

missä τ on murtumispinnan suuntainen leikkausjännitys, σ on murtumispinnan normaalijännitys, C on koheesio, yksikkönä Pa ja $\tan \beta$ on kitkakerroin (β on sisäinen kitkakulma). Todettakoon, että kiteisen kallion murtumisen kuvaamiseksi on kehitetty aivan viime vuosina omia malleja, koska aiemmat mallit, kuten Mohr-Coulombin malli, eivät ole osoittautuneet kiteisen kallion yhteydessä riittävän päteviksi.

Huomautus 1. Edellä käytimme pääjännitysten tunnuksina isoa sigmaa, Σ . Käytännössä pääjännityksiä on mukava merkitä pienellä sigmalla ja käyttää sille alaindeksejä 1, 2 ja 3, jotka vastaavat silloin pääjännityksiä. Jos tarkastellaan pelkästään pääjännityksiä, tämä merkintätapa ei aiheuttane sekaannusta yleisen jännitystensorin tai -dyadin vastaavalla merkinnällä mahdollisesti ilmaistuun normaalijännityskomponenttiin. Pääjännitysten avulla ilmaistuna jännitystensoria vastaavassa matriisissa on ainoastaan päälävis-tääalkiot, jotka ovat samalla itse pääjännitykset. ■

Huomautus 2. Tulokoon vielä korostetuksi se, että pääjännitykset ovat *jännitystilän* fysikaalinen esitystapa. Pääjännitykset ovat riippumattomia koordinaatistosta. Ne ovat siis kussakin kontinuumin (eli kalliomekaniikan tapauksessa kallion) pisteessä vaikuttavia todellisia jännityksiä. Kallion jännitystilamittauksissa ajatellaan joskus approksimatiivisesti, että mitattavat jännitykset ovat juuri pääjännityksiä. Näin menetellään etenkin, kun vaakasuunnassa on puristus, jolle löydetään mittaamalla maksimi- ja minimiarvot ja niiden suunnat. Pystysuunnassa jännityksen ajatellaan muodostuvan litostaattisesta jännityksestä (paineesta), jonka arvo usein tyydytään selvittämään siten vain laskennallisesti. Tarkassa analyysissä pääjännitykset tulee kuitenkin määrittää edellä kuvatun proseduurin avulla yleisestä jännitystensorista. Syynä approksimatiiviseen ajatteluun on se, että jännitystilän mittaaminen on työläs ja vaikea tehtävä. ■

9.4.4 Loppuhuomautus kalliomekaniikan kenttäteorias-ta

Kuten jo on selvinnyt, myös kalliomekaniikan kenttäteoria on suoraan johdettavissa kontinuumimekaniikan periaatteista. Edellä oleva esityksemme on

tosin hyvin suppea, mutta se antanee viitteitä siitä, miltä pohjalta kenttäteorian edelleen esittämisessä tulee edetä. Edellä oleva esitys rajoittui pelkästään ideaaliseen kimmoiseen tapaukseen. Todellisuudessa kalliioväliaine on huomattavan monimutkaista. Itse asiassa suurimmat ongelmat liittyvätkin useimmiten kalliioväliaineen kuvaamiseen realistisesti.

Viime aikoina tutkimuksessa huomio on entistä enemmän keskitetty rakoilleen väliaineen ominaisuuksien selvittämiseen. Tällöin yksi mahdollisuus on pyrkiä luomaan ns. *ekvivalentteja* väliainemalleja, joissa rakoilu sekä mahdolliset rakoäytteet ja niiden ominaisuudet otetaan mukaan jo itse konstituutiiviseen yhtälöön. Tämä probleemi on luonteeltaan samankaltainen kuin jo sähkönjohtavuudenkin yhteydessä mainitsemamme sekoitusteoriaprobleemi.

Kalliomekaaniseen kenttäteoriaan kuuluvat myös kallion murtumismekaaninen käyttäytyminen ja sen kuvaamisessa käytettävät mallit. Tässä esityksessä emme kuitenkaan perehdy näihin. Myös rakoilun muodostuminen ja raon kasvu ovat modernissa kalliomekaniikan tutkimuksessa keskeisiä probleemeja.

Kalliomekaniikan kenttäteoria pohjautuu pienten siirtymien teoriaan. Suuren mittakaavan plastiset muodonmuutokset edellyttävät ns. suurten siirtymien teorian käyttöönottoa. Monet globaalimittakaavan geodynaamiset prosessit, kuten laattatektoniikka, pohjautuvat osaksi suurten siirtymien teoriaan. Suurten siirtymien teoria muodostaa oman problematiikkansa, emmekä tutustu siihen tämän kirjan puitteissa.

Luku 10

Nesteiden mekaniikka

10.1 Virtausmekaniikan jaottelu

Nesteiden mekaniikkaa kutsutaan yleisesti myös virtausmekaniikaksi. Virtausmekaniikan sovellusalue on hyvin laaja, koska itse asiassa kaikkialla ja kaikkina hetkinä tapahtuu aineen virtausta. Rajoitumme tässä esityksessä kuitenkin vain yhteen kiinteän maan geofysiikan sovellusten kannalta tärkeään virtausmekaniikan alueeseen, nimittäin geohydrologian kenttäteoriaan. Aluksi kuitenkin muutama yleinen virtausmekaniikkaa ja sen jaottelua luonnehtiva huomio.

Virtausmekaniikka kattaa varsinaisten nesteiden ja kaasujen mekaniikan. Suurin ero varsinaisten nesteiden ja kaasujen välillä on siinä, että varsinaiset nesteet ovat vain vähäisessä määrin kokoonpuristuvia, kun taas kaasut puolestaan ovat helposti kokoonpuristuvia.

Virtausmekaniikkaa voidaan jaotella usealla tavalla. Yksi tavallinen jako on kitkattomaan (ideaalinnesteeseen) ja kitkalliseen virtaukseen. Toinen jako perustuu nesteen virtauksen luonteeseen, jolloin puhutaan *laminaarisesta* ja *turbulentista* virtauksesta. Kolmas jakoperuste on pyörteetön ja pyörteellinen virtaus. Edelleen voidaan puhua *kokoonpuristuvasta* ja *kokoonpuristumattomasta* virtauksesta.

Virtaus voi tapahtua myös kiinteän aineen sisällä, jolloin kysymyksessä on virtaus huokoisessa aineessa. Kun virtausnopeudet ovat hyvin alhaisia, tulee tarkasteluissa ottaa huomioon myös kiinteän aineen ja nesteen vuorovaikutus. Vuorovaikutus voi olla luonteeltaan kemiallista tai nesteen hidasta diffundoitumista kiinteään aineeseen. Kemialliset vuorovaikutukset, kuten kiinteiden aineiden liukeneminen nesteeseen, liittyvät yleensä kulkeutusmielisiin (engl. transport phenomena).

Edellä mainittiin termi *ideaalinneste*, joka tarkoittaa nestettä ilman sisäis-

tä kitkaa. Ideaalinesteen tapauksessa leikkausjännitys on kaikissa tilanteissa nolla. Kitkallisen nesteen tapauksessa leikkausjännitykselle kirjoitetaan

$$(10.1) \quad \tau = \mu \dot{\gamma},$$

missä μ on (dynaaminen) viskositeetti (yksikkö kg/(ms)) ja $\dot{\gamma}$ on liukukulman muuttumisnopeus eli liukumanopeus (yksikkö 1/s). Kitkallisessa, reaalissa nesteessä voi esiintyä leikkausjännityksiä τ vain, jos liukumanopeudet $\dot{\gamma}$ ovat nolasta eroavia. (Kiinteässä aineessa sen sijaan voi esiintyä leikkausjännityksiä, vaikka liukumanopeudet ovatkin nollia. Vertaa esimerkiksi kiinteän aineen konstitutiiviseen yhtälöön $\tau = G\gamma$, missä G on liukukerroin ja γ liukuma.) Leikkausjännitykset siis häviävät jatkuvassa lepotilassa olevassa nesteessä, sillä siinä kaikki muodonmuutosnopeuskomponentit ovat nollia.

Yhtälö (10.1) on luonteeltaan konstitutiivinen yhtälö jännityksen ja muodonmuutosnopeuden välillä. Jos τ :n ja $\dot{\gamma}$:n välinen yhteys on lineaarinen, kyse on *Newtonin* eli *newtonilaisesta nesteestä*, muussa tapauksessa kysymyksessä on *ei-newtonilainen* neste. Ideaalinesteiden eli kitkattoman virtauksen tapauksessa viskositeettia ei siis esiinny. Koska sisäistä kitkaa ei ole, ei ole myöskään mitään mekanismia, joka synnyttäisi virtauksessa lämpöä. Sanotaan, että virtaus on tällöin *adiabaattista*. Ideaalinesteen malli on tärkeä myös reaalisten nesteiden virtauksen analysoinnissa. Ns. *rajakerrosteorian* mukaan reaalisen nesteen ja kiinteän aineen rajapinnalle kiinnittyy liikkumaton ohut atomimittakaavan nestekerros. Teorian mukaan viskositeetista aiheutuva sisäinen kitka on merkittävä vain tässä kerroksessa. Kerroksen ulkopuolella nesteen virtaukselle sovelletaan usein sen sijaan ideaalinesteen mallia.

Laminaarisessa virtauksessa kuvitellut nestekerrokset eivät sekoitu keskenään, kun puolestaan *turbulentissa* virtauksessa nestepartikkeleiden radat mutkittelevat ja nestekerrokset sekoittuvat keskenään. Laminaarinen virtaus muuttuu turbulentiksi, kun virtauksen ns. *Reynoldsin luku* ylittää tietyn kriittisen arvon. Turbulenttinen virtaus on aina ajasta riippuvaa. Laminaarinen virtaus voi sen sijaan olla stationaarista tai epästationaarista.

Stationaarisessa virtauksessa sitä kuvaavat suureet, kuten nopeus, paine, tiheys, lämpötila jne. eivät muutu ajan funktiona missään avaruuden pisteessä.

Nesteiden mekaniikan yleiset periaatteet ovat

- (1) massan tase (säilymlaki),
- (2) liikemäärän tase (säilymlaki),
- (3) energian tase (säilymlaki).

Itse asiassa massan ja liikemäärän säilymislailla hallitaan kaikki sellaiset virtaukset, joissa virtauksen termodynaamiset suureet ovat lämpötilasta riippumattomia. Tässä esityksessä rajoitumme ensi sijaisesti tämänkaltaisiin virtauksiin.

10.2 Geohydrologian kenttäteoria

Geofysiikassa tarkastellaan useissa yhteyksissä pohjavettä ja erityisesti sen virtausdynamiikkaa. Luomme seuraavassa katsauksen pohjaveden virtaukseen eli *geohydrologian* kenttäteoriaan. Geohydrologian perusprinsiipit ovat luonnollisesti jo edellä useaan kertaan mainitut taselait eli massan, liikemäärän ja energian säilymislait.

Pohjaveden virtaus tapahtuu useimmiten huokoisessa väliaineessa, kuten maaperässä tai rakoilleessa kalliossa. Pohjavettä sisältävää geologista muodostumaa kutsutaan yleisesti *akviferiksi*. Huokoinen väliaine muodostuu kiinteästä runkoaineesta sekä siinä olevista ontoista tiloista eli huokosista. Oletamme seuraavassa, että huokoinen väliaine on täysin kyllästynyt eli saturoidunut, mikä tarkoittaa, että sen koko huokostilavuus on veden täyttämää. Ainakin osa huokosista on useimmiten yhteydessä toisiinsa, jolloin niiden kautta nesteet pääsevät liikkumaan. Osa huokosista voi olla ns. umpiperähuokosia tai eristettyjä huokosia, joiden kautta nestettä ei pääse liikkumaan. Nestevirtauksen kannalta usein puhutaankin *tehokkaasta huokoisuudesta* tai *virtaushuokoisuudesta*, jolla tarkoitetaan juuri sitä huokostilavuutta suhteessa kokonaistilavuuteen, joka osallistuu nesteen virtaukseen. Huokoisuus on siis jonkin ainekappaleen huokosten muodostaman tilavuuden suhde kappaleen kokonaistilavuuteen. Huokoisuus on siten laaduton ja se ilmaistaan usein prosenttilukuna. Kontinuumioletuksessa huokoisuus on aineen ominaisuus eli infinitesimaalisessa ainekappaleessa tulee olla huokosia riittävä määrä, jotta huokoisuutta voidaan käsitellä jatkuvana funktiona, ja kontinuumin piste on siten matemaattista pistettä vastaava. Tämä asia liittyy aina tarkasteltavaan mittakaavaan. Siksi ”infinitesimaalinen” voi tarkoittaa paitsi hyvin pientä mittaa, esim. millimetrejä ja sen osia tai hyvin suurta mittaa, esim. metrien tai jopa satojen metrien skaalassa. Globaaligeofysikaalisissa tarkasteluissa mitta voi olla tätäkin suurempi.

10.2.1 Pohjaveden virtauksen jatkuvuusyhtälö

Oletamme, että huokoinen väliaine on levossa. Määritellään *virtaama* Q (yksikkönä esimerkiksi m^3/s) tietyn pinnan A läpi aikayksikössä virtaavaksi veden määräksi. Jos virtaus on kohtisuorassa pintaa A vastaan, silloin $q = Q/A$

esittää *virtaamanopeutta* pinnan A läpi. Yleisesti virtaamanopeus on vektorisuure. Virtaamanopeuden \mathbf{q} yksikkönä on $\text{m}^3/(\text{m}^2\text{s})$ eli m/s . Suuretta \mathbf{q} kutsutaan myös *virtaamavuon tiheydeksi* tai *virtaamatiheydeksi* tai, kuten usein anglosaksisessa kirjallisuudessa, *virtaamavuoksi* (engl. volume flux) (ks. huomautus sivulla 310) tai tavallisimmin vain *Darcyn nopeudeksi*. Viimeksi mainittuun nimitykseen palataan tarkemmin tuonnempana.

Koska neste täyttää huokostilat, ja nesteen virtausreitit ovat mutkittelevia, nesteen keskimääräinen todellinen lineaarinen virtausnopeus huokoisessa aineessa on $\mathbf{v} = \mathbf{q}/\phi_{\text{eff}}$, missä ϕ_{eff} on tehokas huokoisuus eli virtaahuokoisuus. Sen arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin kokonaishuokoisuus, koska vain osa huokostilavuuden vedestä liikkuu. Virtaahuokoisuus ilmoittaa siis virtaavan veden tilavuuden osuuden koko tilavuudesta. Nopeutta \mathbf{v} kutsutaan *suotautumisnopeudeksi* tai vain (keskimääräiseksi) virtausnopeudeksi. On huomattava, että virtaamanopeus \mathbf{q} ei tarkoita veden virtausnopeutta \mathbf{v} muulloin kuin siinä erityistapauksessa, että vesi täyttää tarkastelutilavuuden kokonaan, jolloin $\phi_{\text{eff}} = 1$. On tärkeää ymmärtää virtaamanopeuden \mathbf{q} ja virtausnopeuden \mathbf{v} ero ja niiden vektoriluonne. Kumpaakaan käsitettä ei tule ymmärtää mikroskooppitaso (huokostason) nopeussuureiksi, vaan makroskooppisiksi keskimääräisiksi suureiksi. Jos tietylle virtaamalle Q väliaineen virtaahuokoisuutta pienennetään, keskimääräisen nopeuden $v = |\mathbf{v}|$ on vastaavasti kasvettava, jotta sama nestemäärä menee aikayksikössä tietyn poikkipinnan läpi.

Olkoon nesteen massatiheys ρ . Silloin tulo $\rho\mathbf{q}$ on nesteen *massavuon tiheys* (engl. mass flux density) tai *virtaustiheys*, yksikkönä $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$. Yleisesti kolmiulotteisessa avaruudessa massavuon tiheys $\rho\mathbf{q}$ on vektorisuure. Massavirta (eli massavuo) (yksikkönä kg/s) differentiaalisen vektoriaalisen pintaalkion $\mathbf{n} dS$ läpi on $\rho\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$. Merkitään kokonaishuokoisuutta symbolilla ϕ . Tällöin $\rho\phi$ on nesteen tiheys keskimääräistettynä ns. bulkkitilavuuteen eli nesteen massan suhde ainetilavuuteen, jossa on mukana sekä huokostilavuus että kiintoaineen tilavuus.

Massan taseyhtälö sanoo, että massavirran, joka tulee umpinaisen pinnan S läpi, on oltava yhtä suuri kuin massan vähenemisnopeus umpinaisen pinnan rajoittamassa kontrollitilavuudessa V . Matemaattisesti ilmaistuna

$$(10.2) \quad \oint_S \rho\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV,$$

missä miinus-merkki tarkoittaa juuri sitä, että massan ulosvirtaus kontrollitilavuudesta johtaa massan vähenemiseen kontrollitilavuudessa. Gaussin lauseen

avulla tämä voidaan muuntaa muotoon

$$(10.3) \quad \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) dV = - \int_V \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV.$$

Jotta yhtälö (10.3) olisi voimassa kaikille mielivaltaisille tilavuuksille V , on integrandien oltava samat, ja saamme siten seuraavan jatkuvuusyhtälön eli massan säilymislain:

$$(10.4) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = - \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}.$$

Jos massan säilymislakiin (taseyhtälöön) halutaan lisätä lähde- tai nielutermi, se voidaan sisällyttää yhtälön vasemmalle puolelle. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$(10.5) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) - J = - \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t},$$

missä massavirran lähdettä kuvaa termi J , yksikkönä $\text{kg}/(\text{m}^3\text{s})$.

Huomautus 1. Edellä johdimme massan taselain eli jatkuvuusyhtälön huokaisen väliaineen tapauksessa. Tätä johtoa ei olisi tarvinnut tehdä tässä uudelleen, koska olisimme voineet ottaa suoraan jo aiemmin esitetyn massan taseyhtälön (8.62) ja soveltaa sen kanssa Reynoldsin kuljetuslausetta (8.43) tiheysfunktioille ρ . Tätä kautta olisimme päätyneet yhtälöön

$$(10.6) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

jossa \mathbf{v} on virtaavan nesteen nopeus. Tämä yhtälö pätee kussakin erillisessä huokostilassa. Huokostilassa olevan nesteen tiheys on edelleen ρ , mutta kokonaisuuutena nesteen bulkkitiheys huokoisessa aineessa on $\rho\phi$, joten tiheyden paikalle on kirjoitettava $\rho\phi$. Lisäksi nopeus \mathbf{v} korvataan virtaamatiheyden \mathbf{q} ja huokoisuuden ϕ suhteella \mathbf{q}/ϕ , kuten edellä on todettu. Tekemällä nämä sijoitukset yhtälöön (10.6) päädytäänkin yhtälöön (10.4). ■

Huomautus 2. Jatkuvuusyhtälö pätee sekä ideaalinesteille että reaalille nesteille, koska yhtälössä ei esiinny lainkaan kitkaa kuvaavia kertoimia. ■

10.2.2 Darcyn laki

Yhtälössä (10.4) on kaksi tuntematonta, $\rho \mathbf{q}$ ja $\rho\phi$, joten tarvitaan vielä jokin konstitutiivinen yhtälö, joka ottaa huomioon väliaineen vedenjohtavuusraakenteen.

Kuten jo nestemekanikan esityksemme lähtökohtaisissa oletuksissa totesimme, rajoitamme tarkastelun isothermisiin olosuhteisiin eli nesteellä (vedellä) on kaikkialla ja aina sama lämpötila. Tällöin vedellä on kolmentyyppistä mekaanista energiaa: (1) kineettistä energiaa $mv^2/2$, potentiaalienergiaa mgz , ja nesteen ”painevoimien” tekemää paine-tilavuus -työtä $m \int_{p_0}^p (V/m) dp$ paineessa p (joissakin kirjoissa tätä pidetään nesteen muodonmuutosenergiانا), (p :n yksikkö Pa), missä v on nesteen nopeus (m/s), g putoamiskiiktyvyys (m/s^2), z referenssitasosta mitattu korkeus, (m), V tilavuus ja p_0 referenssipaine. Mekaanisen energian kokonaismäärä massayksikköä kohden on siten

$$(10.7) \quad E = \frac{1}{2}v^2 + gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Yhtälö (10.7) on ns. *Bernoullin*¹ yhtälö, joka siis ilmaisee nesteen kokonaisenergian massayksikköä kohden. Yhtälö (10.7) ei ole voimassa aina, vaan sen taustana ovat tietyt oletukset, joista yksi on isothermisyys. Edelleen virtauksen on oltava laminaarista ja stationaarista. Tällöin kokonaisenergia pysyy samana virtauksen edetessä samaa virtaviivaa (ks. s. 291) pitkin, koska nesteen sisäinen kitka ei, ideaalinste-oletuksemme mukaisesti, tuota lämpöä. Eri virtaviivoilla kokonaisenergialla on yleensä eri arvo.

Koska pohjaveden virtausnopeus on hyvin pieni, on siihen liittyvä liike-energia myös pieni. Itse asiassa, koska virtausnopeus on aina huomattavasti pienempi kuin 1 m/s, on liike-energia tällöin kokonaisenergiassa toisen kertaluvun pieni termi, joka voidaan jättää huomiotta. Näin ollen saadaan yhtälöstä (10.7) vakiotiheyksiselle nesteelle yhteys

$$(10.8) \quad E \approx gz + \frac{p - p_0}{\rho}.$$

Muodostetaan nyt uusi muuttuja $h = E/g$ siten, että

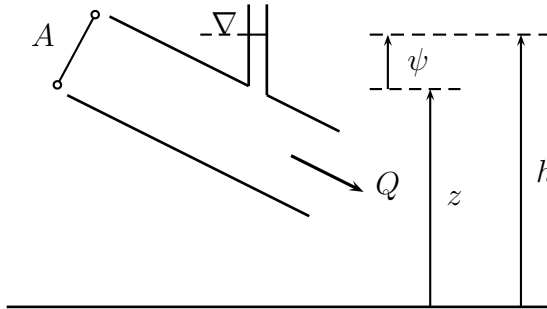
$$(10.9) \quad h = z + \psi,$$

missä

$$(10.10) \quad \psi = \frac{p - p_0}{\rho g}.$$

Parametria h kutsutaan *hydrauliseksi korkeudeksi*, ja tässä yhteydessä z on *asemakorkeus* ja ψ *painekorkeus* (kuva 10.1). Tavallisesti referenssipaine p_0 merkitään nolllaksi.

¹Daniel Bernoulli (1700–1782), alankomaal.-sveits. fyysikko ja matemaatikko.



Kuva 10.1: Hydraulisen korkeuden, h , määrittely asemakorkeuden z ja painekorkeuden ψ summana. Virtaamatiheys eli Darcyn nopeus on Q/A , missä Q on virtaama poikkipinnan A läpi.

Jotta yhtälöä (10.9) voidaan käyttää makroskooppisille systeemeille esitetyssä muodossa, on oletettava, että systeemissä olevan veden tiheys ρ on kaikkialla vakio. Usein näin ei kuitenkaan ole. On hyvin tavallista, että ainakin syvällä olevien kalliopohjavesien tiheys muuttuu syvyyden funktiona esimerkiksi veden suolaisuuden takia. Toinen nesteen tiheyttä muuttava mekanismi on tiheyden riippuminen paineesta $\rho = \rho(p)$. *Kokoonpuristumattomassa* virtauksessa nesteen tiheys kaikkialla systeemissä on vakio. Kun tiheyden paineriippuvuus halutaan ottaa mukaan, hydraulinen korkeus voidaan määrittää yhtälöstä

$$(10.11) \quad h = z + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)g},$$

missä p_0 on paine jollakin tietyllä referenssisitasolla.

Huomautus. Myös painovoiman kiihtyvyyden g muuttuu syvyyden funktiona. Tietyissä tarkasteluissa myös tämä muutos on otettava huomioon hydraulisen korkeuden määrittelyssä. ■

Hydraulista korkeutta kutsutaan myös pietsometriseksi korkeudeksi. Se muodostuu siis kahdesta osasta: kenttäpisteen eli sijaintitason korkeudesta z referenssisitasoon nähden sekä painekorkeudesta. Hydraulisen korkeuden arvot ovat suhteellisia, koska referenssisitaso voidaan määrittellä mielivaltaisesti.

Useimmiten z :n nollassa asetetaan yhtymään merenpinnan tasoon ja z :n kasvusuunta on merenpinnan tasosta ylöspäin.

Huokoisen väliaineen tapauksessa vuontiheytenä on siis *virtaamavuon tiheys eli virtaamatiheys tai virtaamanopeus* \mathbf{q} (yksikkönä m/s) ja sen aiheuttajana on hydraulinen gradientti ∇h (laaduton). Hydraulinen gradientti toimii siis ”ajavana voimana” väliaineessa. Virtaamatiheyden ja hydraulisen gradientin välillä on todettu olevan voimassa monissa tilanteissa konstitutiivinen yhteys, ns. *Darcyn*² laki

$$(10.12) \quad \mathbf{q} = -\overline{\overline{K}} \cdot \nabla h,$$

missä dyadi tai toisen kertaluvun tensori $\overline{\overline{K}}$ on väliaineen ja virtaavan nesteen ominaisuuksista riippuva *vedenjohtavuus*, yksikkönä m/s. Virtaamavuon tiheyttä \mathbf{q} kutsutaan myös *Darcyn nopeudeksi*, kuten jo aiemmin mainittiin. On kuitenkin huomattava, että Darcyn nopeus ei ole sama kuin väliaineessa virtaavan nesteen fysikaalinen nopeus. Siksi Darcyn nopeuden käsite ei ole aivan onnistunut. Syynä Darcyn nopeus -nimitykseen lienee se, että virtaamavuon tiheydellä on nopeuden yksikkö, vaikka se ei fysikaalisesti olekaan nopeus, vaan tietyn poikkipinnan läpi aikayksikössä virtaava nestetilavuus ($\text{m}^3/(\text{m}^2\text{s}) = \text{m/s}$). Sama pätee myös *virtaamanopeus*-termin käyttöön.

Darcyn laissa oleva miinus-merkki tarkoittaa sitä, että pohjaveden virtauksen suunta on korkeammasta hydraulisesta korkeudesta matalampaan eikä, kuten arkikielen ilmaisussa usein virheellisesti sanotaan, korkeammasta paineesta matalampaan paineeseen. Toisin sanoen virtaus tapahtuu *vähenevän* hydraulisen korkeuden suuntaan. Paine korkeuden kannalta pohjaveden virtaussuunta on sen sijaan *kasvavan* paineen suunta. Ainoastaan horisontaalisesti virtaavan pohjaveden suunta, jolloin asemakorkeus z on siis vakio, määräytyy siitä, mihin suuntaan veden paine-ero kahden havaintokohdan välillä on positiivinen eli virtauksen suunta on tässä erikoistapauksessa korkeammasta paineesta matalampaan paineeseen.

Darcyn laki on siis konstitutiivinen laki, kuten Fourierin laki tai Ohmin laki. Sitä ei ole pidettävä yleisenä luonnonlakina, vaan sillä on oma pätevyysalueensa kussakin tilanteessa. Yksi Darcyn lain pätevyysaluetta koetteleva asia on virtaavan nesteen nopeus, joka kontrolloi virtauksen laminaarisuutta tai turbulenssia. Darcyn laki pätee laminaariselle virtaukselle, jonka Reynoldsin luku

$$(10.13) \quad Re = \frac{qd}{\nu},$$

on enimmillään yhden ja kymmenen välissä. Reynoldsin luvussa d on huokoisen väliaineen jokin karakteristinen mitta (esim. raekoko) (yksikkö m), q

²Henry Philibert Gaspard Darcy (1803–1858), ransk. insinööri ja fyysikko.

virtaamavuon tiheyden itseisarvo (yksikkö m/s) ja ν nesteen *kinemaattinen viskositeetti* (yksikkö m²/s).

Vedenjohtavuustensori esitetään usein muodossa

$$(10.14) \quad \overline{\overline{K}} = \frac{\rho g \overline{\overline{k}}}{\mu},$$

missä μ on virtaavan nesteen *dynaaminen viskositeetti*, (yksikkönä kg/(ms)) ($\mu = \nu\rho$), ja $\overline{\overline{k}}$ väliaineen *läpäisevyystensori* (yksikkönä m²). Tällä tavoin esitettyä vedenjohtavuus on siis jaettavissa virtaavasta nesteestä riippuvaan osaan ja toisaalta väliaineesta riippuvaan osaan. Läpäisevyyttä kutsutaan hydrogeologisessa ja geohydrologisessa kirjallisuudessa myös *permeabilitetiksi*.

Huomautus. Hydrogeologia ja geohydrologia ovat kaksi jossain määrin erilaista tieteenalaa, vaikka niiden molempien tutkimuskohteena onkin maankamarassa oleva vesi. Hydrogeologia lähestyy vesiprobleemia geologiselta kannalta painottaen veden esiintymistä geologisessa ympäristössä ja siinä ilmeneviä vuorovaikutuksia. Geohydrologia on geofysiikan ala, jonka mielenkiinnon kohteena on maanpinnan alaisten vesien dynamiikka fysikaalisena problemina. Käytännössä mainittuja tieteenaloja ei voida kuitenkaan erotella toisistaan. ■

Paineesta (tai suolaisuudesta) riippuvan tiheyden tapauksessa virtaamavuon tiheydelle kirjoitetaan ns. *Boussinesqin*³ approksimaation mukainen lauseke

$$(10.15) \quad \mathbf{q} = -\frac{\rho g \overline{\overline{k}}}{\mu} \cdot \nabla \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = -\frac{1 \overline{\overline{k}}}{\mu} \cdot \nabla (\rho g z + p).$$

Boussinesqin approksimaatiossa oletetaan nesteen tiheys vakioksi, mikä voi tuntua ristiriitaiselta, koska tarkastelun kohteenahan on juuri paineesta riippuva tiheys. Tämä kompromissi johtaa kuitenkin huomattaviin matemaattisiin helpotuksiin.

On huomattava, että paineesta riippuva tiheys johtaa hieman erilaiseen yhtälöön kuin paineen suhteen vakiotiheyksinen neste. Nesteen koostumuksen spatiaalisesta vaihtelusta aiheutuva paine-ero, kuten suolaisuusvaihtelun aiheuttamat, voidaan huomioida muodollisesti edellä olevan paineesta riippuvan tiheyden avulla.

10.2.3 Tiheyden ja huokoisuuden paineriippuvuus

Haluamme saada yhtälön (10.5) sellaiseen muotoon, että siinä olisi huomioitu koostumukseltaan homogeenisen ja isotermisen veden tiheyden paineriippu-

³Valentin Joseph Boussinesq (1842–1929), ransk. fyysikko ja matemaatikko.

vuus $\rho = \rho(p)$. Tulon derivoimissääntöä käyttäen yhtälön (10.5) oikea puoli voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$(10.16) \quad \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Yhtälön (10.16) oikean puolen ensimmäinen termi voidaan saattaa muotoon

$$(10.17) \quad \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} = \phi \frac{\partial\rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Kun määritellään nesteen kokoonpuristuvuus sen tilavuuden, V , muutoksen avulla (aivan kuten kiinteän aineen tapauksessa, vrt. yhtälö (9.26))

$$(10.18) \quad \beta = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p},$$

voidaan yhtälö (10.17) ilmaista muodossa

$$(10.19) \quad \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} = \phi\rho\beta \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Yhtälön (10.16) oikean puolen toisen termin edelleen kehittämiseksi tarkastellaan huokoisuuden aikariippuvuutta. Esitystämme varten tarvitaan ns. *efektiivisen jännityksen* käsitettä. Kun tarkastellaan akviferia eli pohjavettä sisältävää geologista muodostumaa, voidaan maankamarassa oleva vertikaalijännitys, jonka aikaansaa tarkastelukohdan yläpuolella olevan kivimassan, maamassan sekä ilmamassan (ja kaiken muunkin, kuten rakennusten) paino, ajatella jaettavaksi kahteen osaan

$$(10.20) \quad \sigma = \sigma' + p,$$

joista ensimmäinen σ' on huokoisen väliaineen runkomateriaalin kokema vertikaalijännitys ja p pohjaveden paine. Tätä jaottelua kutsutaan ns. *Terzaghin*⁴ periaatteeksi. Se on yksi maamekaniikan keskeisiä periaatteita. Sen mukaan siis maamassa kantaa päällä olevan kuorman siten, että maan runkomateriaaliin muodostuu tasapainottava jännitys yhdessä pohjaveden paineen kanssa.

Tavallisesti kokonaisvertikaalijännitys on vakio, jolloin yhtälö (10.20) antaa

$$(10.21) \quad d\sigma' = -dp,$$

⁴Karl von Terzaghi (1883–1963), itävalt.-amerik. insinööri ja maamekaniikan tutkija.

jonka fysikaalinen tulkinta on, että pohjaveden paineen pienentyessä huokoisen aineen kiinteän runkomateriaalin kuormitus vastaavasti kasvaa.

Akviferin kokonaistilavuus eli kappaletilavuus V_B (engl. bulk volume) muodostuu veden tilavuudesta V_W ja huokoisen väliaineen runkoaineen tilavuudesta V_M

$$(10.22) \quad \begin{aligned} V_B &= V_W + V_M, \\ V_M &= (1 - \phi)V_B, \\ V_W &= \phi V_B. \end{aligned}$$

Pohjavesitarkasteluissa tehdään usein yksinkertaistava oletus, että runkoaine on kokoonpuristumatonta ja että puristuksessa, jonka aiheuttaa σ' :n muutos, vain veden tilavuus muuttuu ja kiinteän runkoaineen tilavuus säilyy samana, toisin sanoen

$$(10.23) \quad \frac{\partial V_M}{\partial \sigma'} = 0.$$

Oletetaan lisäksi, että puristuksessa kokonaistilavuuden muutos on pieni ja kimmoisa, jolloin se voidaan esittää vakiokokoonpuristuvuuden α avulla

$$(10.24) \quad \alpha = -\frac{1}{V_B} \frac{\partial V_B}{\partial \sigma'}.$$

Yhtälöistä (10.20) ja (10.23) sekä yhtälöstä (10.22) saadaan kokoonpuristuvuudelle (10.24) seuraava yhtälö

$$(10.25) \quad \begin{aligned} \alpha &= -\frac{1 - \phi}{V_M} \frac{\partial}{\partial \sigma'} \frac{V_M}{(1 - \phi)} = -(1 - \phi) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \frac{1}{(1 - \phi)} \\ &= -\frac{1}{(1 - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma'} = \frac{1}{(1 - \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial p}. \end{aligned}$$

Oletetaan huokoisuuden riippuvan vain paineesta $\phi = \phi(p)$. Tällöin yhtälön (10.25) perusteella voidaan yhtälön (10.16) oikean puolen jälkimmäinen termi kirjoittaa muotoon

$$(10.26) \quad \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho \alpha (1 - \phi) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Voimme nyt esittää massan säilymisyhtälön oikean puolen

$$(10.27) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} &= \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \rho \beta \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \alpha (1 - \phi) \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \rho [\phi \beta + (1 - \phi) \alpha] \frac{\partial p}{\partial t} = S_p \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}$$

missä

$$(10.28) \quad S_p = \rho [\phi\beta + (1 - \phi)\alpha] = \frac{\Delta m_W}{V_B \Delta p}$$

on paineen muutokseen liittyvä massan *varastokerroin*, (yksikkönä $\text{kg}/(\text{m}^3\text{Pa}) = \text{s}^2/\text{m}^2$). Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä vesimassaa m_W kokonaisyksikkötilavuutta kohden, joka poistuu akviferista, kun veden paine alenee yhdellä yksiköllä tai vastaavasti sitä vesimassaa kokonaisyksikkötilavuutta kohden, joka siirtyy akviferiin, kun veden paine kasvaa yhdellä yksiköllä.

Usein varastokerroin ilmaistaan hydraulisen korkeuden ajallisen muutoksen avulla, vaikka hydraulisen korkeuden määrittelyn pohjana oleva Bernoullin yhtälö (10.7) onkin voimassa vain stationaariselle eli ajasta riippumattomalle virtaukselle. Kun lähdetään hydraulisen korkeuden määrittävästä yhtälöstä (10.9), voidaan kirjoittaa

$$(10.29) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Näin ollen

$$(10.30) \quad S_p \frac{\partial p}{\partial t} = S_p g \rho \frac{\partial h}{\partial t} = S_h \frac{\partial h}{\partial t},$$

missä varastokerroin on nyt määritelty

$$(10.31) \quad S_h = S_p g \rho = g \rho^2 [\phi\beta + (1 - \phi)\alpha] = \frac{\Delta m_W}{V_B \Delta h}$$

($[S_h] = \text{kg}/\text{m}^4$). Voimme nyt esittää massan säilymislain muodossa

$$(10.32) \quad \nabla \cdot (\rho \overline{\overline{K}} \cdot \nabla h) + J = S_h \frac{\partial h}{\partial t}$$

tai paineen avulla

$$(10.33) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\rho \overline{\overline{k}}}{\mu} \cdot \nabla (\rho g z + p) \right) + J = S_p \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Massan säilymlaki yksinkertaistuu, kun oletetaan, että tarkasteltavassa tilavuudessa ei ole lähteitä tai nieluja ja kun veden tiheysvaihtelut ovat pieniä. Tällöin yhtälöt (10.32) ja (10.33) saavat muodot

$$(10.34) \quad \nabla \cdot (\overline{\overline{K}} \cdot \nabla h) = S_h \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial t}$$

ja vastaavasti

$$(10.35) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\bar{k}}{\mu} \cdot \nabla(\rho g z + p) \right) = S_p \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Edelleen jos virtaus on stationaarinen eli ajasta riippumaton, yhtälöt (10.34) ja (10.35) sievenevät muotoihin

$$(10.36) \quad \nabla \cdot (\bar{K} \cdot \nabla h) = 0$$

ja vastaavasti

$$(10.37) \quad \nabla \cdot \left(\frac{\bar{k}}{\mu} \cdot \nabla(\rho g z + p) \right) = 0.$$

Jos väliaine on lisäksi *isotrooppinen* ja *homogeeninen*, päädyimme hydraulista korkeutta ja painetta koskeviin Laplacen yhtälöihin

$$(10.38) \quad \nabla^2 h = 0$$

ja

$$(10.39) \quad \nabla^2 p = 0.$$

Nämä ovat tärkeitä monissa yhteyksissä, koska usein oletetaan virtaus stationaariseksi. Yhtälöiden ratkaisemiseksi tarvitaan tietyt reunaehdot, Dirichletin, Neumannin tai sekareunaehto, aivan kuten jo sähköstatiikan ja sähköisen virtausstatiikan kohdalla on esitetty. Tämän johdosta emme perehdy yhtälöiden stationaarisiiin ratkaisuihin tämän enempää.

Huomautus. Suolaisen pohjaveden tapauksessa voidaan käyttää yhtälöä (10.33). Tällöin painekenttä jaetaan kahteen osaan, koska suolapitoisuuden vaihtelu aikaansaa nostevoimia ja se muuttaa siten virtauskenttää. Jäännös- eli residuaalipaine määritellään todellisen paineen ja suolattoman eli makean veden hydrostaattisen paineen erotuksena. Virtauksen synnyttävänä paineena eli "ajavana" paineena (engl. driving pressure) pidetään jäännöspaineen ja nostetermin summaa

$$(10.40) \quad p_d = p + (\rho - \rho_0)gz,$$

missä p_d on ajava paine (Pa), p jäännös- eli residuaalipaine (Pa), ρ suolaisen veden tiheys (kg/m^3) ja ρ_0 makean veden tiheys (kg/m^3).

Yhtälössä (10.40) suolaisen veden tiheys on paikan funktio, $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Usein veden tiheyden riippuvuus suolapitoisuudesta c , (yksikkönä kg/m^3), ilmaistaan lineaarisella riippuvuudella

$$(10.41) \quad \rho = \rho_0 + a_c c,$$

missä ρ_0 on makean veden tiheys (kg/m^3) ja a_c verrannollisuuskerroin. ■

Huomautus ja varoitus. Kuten jo edellä todettiin, hydraulisen korkeuden aikariippuvuus on ristiriidassa sen kanssa, että Bernoullin yhtälö (10.7), johon hydraulisen korkeuden määrittely pohjautuu, pätee vain kitkattomalle, ajasta riippumattomalle virtaukselle. Tämä ristiriita on alan kirjallisuudessa kuitenkin yleisesti hyväksytty eikä siitä ole yleensä erillistä mainintaa. Käytännössä monet geohydrologiset tarkastelut tehdään stationaarille tai kvasistationaarille tilanteelle, joten aikariippuvuus ei aiheuta ongelmaa. ■

10.3 Rakovirtaus ja virtauksen kuutiolaki

Kahden yhdensuuntaisen sileän tasopinnan välissä tapahtuva virtaus muodostaa paljon käytetyn konseptuaalisen mallin esimerkiksi kallion raossa tapahtuvalle virtaukselle. Osoittautuu, että virtaaman suuruus on suoraan verrannollinen rakopintojen kohtisuoran välimatkan eli rakoavauman kolmannen potenssiin. Tästä syystä puhutaan rakovirtauksen kuutiolaista. Seuraavassa tarkastellaan kuutiolain fysikaalista perustaa ja johdetaan sen matemaattinen lauseke. Lähtökohdaksi otetaan virtauksen yleiset liikeyhtälöt eli massan säilymlaki (jatkuvuusyhtälö) ja liikemäärän säilymistä kuvaava ns. Navier-Stokesin yhtälö. Näistä johdetaan tietyin oletuksin mainittu kuutiolaki.

10.3.1 Navier-Stokesin yhtälö

Virtausmekaniikassa Navierin⁵ ja Stokesin⁶ eli Navier-Stokesin yhtälöt muodostavat hyvin keskeisen osan. Johdamme aluksi nämä yhtälöt.

Lähtökohdaksi otamme yleisen kontinuumimekaniikan Eulerin esitystavan mukaisen liikemäärän taseyhtälön (8.87). Sovellamme sitä kiinteään kontrollitilavuuteen, jolloin yhtälön (8.87) pohjalta voidaan suoraan kirjoittaa differentiaaliyhtälö

$$(10.42) \quad \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot \bar{\bar{\sigma}} + \rho \mathbf{b}.$$

⁵Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836), ransk. kimmoteorian ja hydrodynamiikan tutkija.

⁶Sir George Gabriel Stokes (1819–1903), irlantilainen fyysikko ja matemaatikko.

Tarkastelemme seuraavaksi jännitysdyadia $\bar{\sigma}$. On ilmeistä, että päästäksemme tästä eteenpäin tarvitsemme jonkin konstitutiivisen yhtälön nesteiden jännityksen ja sen virtausmekaanisten ominaisuuksien välille. Rajoitumme tarkastelemaan newtonilaista nestettä, jolloin nestealkion leikkausjännityksille pätee lauseke (10.1). Lisäksi oletamme, että nesteen tiheys on vakio. Näiden oletusten vallitessa lineaarisesti viskoosille nesteelle jännitysdyadi on tapana kirjoittaa muotoon

$$(10.43) \quad \bar{\sigma} = -p\bar{I} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\bar{I} + \mu(\mathbf{v}\nabla + \nabla\mathbf{v}),$$

missä p on paine, \mathbf{v} virtaavan nesteen nopeus ja \bar{I} yksikködyadi. Kertoimet λ ja μ liittyvät nesteen kitkaominaisuuksiin. Yhtälö (10.43) perustuu mm. seuraaviin oletuksiin: (1) nesteen sisäinen kitka ilmenee vain silloin, kun nesteosasten välillä on suhteellista liikettä, (2) kyseessä on newtonilainen neste ja (3) neste on isotrooppista. Yhteys on siis konstitutiivinen yhtälö, aivan kuten esimerkiksi yleistetty Hooken laki kiinteälle aineelle (vrt. yhtälöön (9.39)). Hyväksymme tämän relaation annettuna pitäen kuitenkin mielessä, että se pätee vain tiettytyyppisille nesteille, joihin (geofyysikkojen onneksi) kuuluu mm. vesi.

Sijoittamalla lauseke (10.43) liikemäärän taseyhtälöön (10.42) ja käyttäen ainederivaatan lauseketta (8.29) päädytään yhtälöön

$$(10.44) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{b}$$

Tämä yhtälö (tai itse asiassa sen kolme komponenttityhtälöä) tunnetaan nimellä *Navier-Stokesin* yhtälö, joka muodostaa yhden keskeisimmistä virtausmekaniikan yhtälöistä. Huomataan heti, että yhtälö on vahvasti epälineaarinen johtuen termistä $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$. Niinpä yhtälön ratkaiseminen on numeerisestikin hyvin haasteellinen tehtävä, jota käsittelevää kirjallisuutta on olemassa hyvin paljon.

Huomautus 1. Joissakin kirjoissa yhtälössä (10.44) olevien kitkaa kuvaavien parametrien λ ja μ välille esitetään yhteys

$$(10.45) \quad \lambda = -\frac{2}{3}\mu,$$

jolloin yhtälössä (10.44) esiintyvän kertoimen $\lambda + \mu$ paikalla on kerroin $(1/3)\mu$. ■

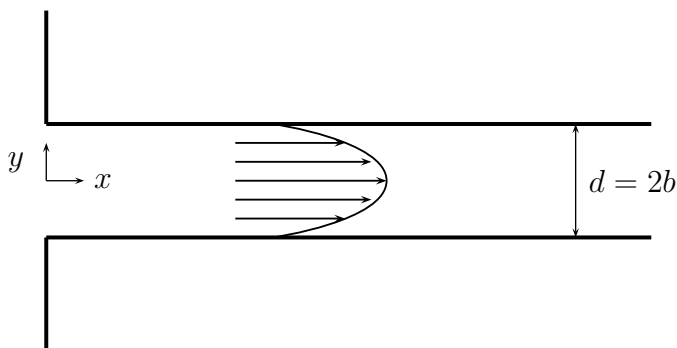
Huomautus 2. Navier-Stokesin yhtälö on siis kitkallisen virtauksen yhtälö. Ideaalinnesteen tapauksessa, jossa kitkatermejä ei esiinny, yhtälö saa muodon

$$(10.46) \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}.$$

Tämä yhtälö tunnetaan ideaalinesteen *Eulerin* yhtälönä. Itse asiassa jo aiemmin mainittu Bernoullin yhtälö (10.7) saadaan integroimalla Eulerin yhtälöä virtaviivaa pitkin. Eulerin yhtälöllä on tärkeä asema virtausmekaniikassa. Esimerkiksi hydrostaatiikan perusyhtälö $\nabla p = \rho \mathbf{b}$ saadaan siitä. ■

10.3.2 Rakovirtaus

Tarkoituksemme on seuraavaksi soveltaa Navier-Stokesin yhtälöä kokoonpuristumattoman nesteen virtaukseen kahden yhdensuuntaisen tasopinnan rajoittamassa tilassa, jolla jäljitellään kallion raossa tapahtuvaa virtausta. Seuraavaksi esitettävä tapaus onkin yksi harvoista, jossa yhtälölle voidaan esittää tarkka, suljetussa muodossa oleva ratkaisu. Tarkastelemme kuvan 10.2 mukaista geometriaa, jonka muodostaa kaksi yhdensuuntaista, etäisyydellä d toisistaan olevaa, sileäpintaista tasoa. Olkoon x -akseli raon suuntainen ja kulkeko raon keskellä. Tasojen välissä niiden suuntaisesti, stationaarisesti virtaava neste (nopeus $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x$, (y - ja z -akselien suuntaiset komponentit ovat nolliä)) oletetaan kokoonpuristumattomaksi. Raon seinämille muodostuu rajakerrosteorian mukaisesti hyvin ohut liikkumaton nestekerros, jolloin reunaehtona raon reunalla on $\mathbf{v} = 0$ eli $u\mathbf{e}_x = 0$.



Kuva 10.2: Rakovirtauksen geometria.

Jatkuvuusyhtälöstä (10.6) seuraa stationaariselle, kokoonpuristumattomalle (tiheys vakio) virtaukselle yhtälö

$$(10.47) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{eli} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Yhteyden (10.47) ja probleemin kaksidimensioisuuden perusteella on pääteltävissä, että nopeusjakauma raon poikki riippuu vain y -koordinaatista eli

$u = u(y)$. Lisäksi hydraulisen korkeuden määrittävän yhtälön (10.9) mukaan paine

$$(10.48) \quad p = \rho g(h - y) + p_0$$

ja edelleen voidaan merkitä massavoima $\mathbf{b} = -g\mathbf{e}_y$. Sijoittamalla nämä tulokset Navier-Stokesin yhtälöön (10.44) saadaan

$$(10.49) \quad \rho g \nabla h = \mu \nabla^2 \mathbf{v},$$

joka probleemin geometrian takia johtaa tavalliseen differentiaaliyhtälöön

$$(10.50) \quad \rho g \frac{dh}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}.$$

Tämän yhtälön ratkaisu reunaehdolla $u = 0$, kun $y = \pm b$, on

$$(10.51) \quad u = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{dh}{dx} (b^2 - y^2).$$

Virtaaman (raon leveysyksikköä kohti) määrittämiseksi integroidaan nopeusjakauma raon poikki y -suunnassa. Tällöin saadaan

$$(10.52) \quad Q = \int_{-b}^b u(y) dy = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{dh}{dx} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = -\frac{\rho g}{2\mu} \frac{dh}{dx} \frac{4b^3}{3}.$$

Käyttämällä avaumalle symbolia $d = 2b$ saadaan yhtälö (10.52) muotoon

$$(10.53) \quad Q = -\frac{\rho g}{12\mu} \frac{dh}{dx} d^3.$$

Darcyn lain mukaisen virtaamalausekkeen

$$Q = - \int K_{fr} \frac{dh}{dx} dy$$

perusteella voidaan yhtälöstä (10.53) päätellä, että raon vedenjohtavuus K_{fr} on

$$(10.54) \quad K_{fr} = \frac{\rho g}{12\mu} d^2.$$

Geohydrologiassa käytetään paljon suuretta, jota kutsutaan *transmissiviteetiksi*. Se määritellään ainoastaan kaksidimensioiselle rakenteelle vedenjohtavuus kerrottuna rakenteen ”paksuudella” eli raon tapauksessa avaumalla. Transmissiviteetiksi saadaan siten

$$(10.55) \quad T_{fr} = d \times K_{fr} = \frac{\rho g}{12\mu} d^3,$$

joka tunnetaan geohydrologisessa ja hydrogeologisessa kirjallisuudessa *kuutiolain* nimellä.

Huomattakoon, että kuutiolain johtamisessa oletettiin laminaarinen, stationaarinen virtaus sekä sileät yhdensuuntaiset rakopinnat. Luonnonrakojen käsittelemiseksi on esitetty tiettyjen korjauskertoimen käyttöä yhtälössä (10.55) (kts. tarkemmin teoksesta [46] *Rock Fractures and Fluid Flow, Contemporary Understanding and Applications*, National Academy Press, 1996, s. 121).

10.4 Advektiivinen lämmönsiirtyminen

Pohjaveden virtauksen mukana tapahtuu myös lämmönsiirtymistä. Tarkastelemme seuraavaksi virtauksen mukana tapahtuvan eli ns. advektiivisen lämmönsiirtymisen teoriaa, lyhyesti *advektiota*.

Olkoon veden ominaislämpökapasiteetti vakiotilavuudessa c_{V_w} , (yksikkönä $J/(kgK)$, ks. määrittävä yhtälö (9.61)). Kerrotaan tämä veden tiheydellä ρ , jolloin saadaan suure, jonka yksikkö on $J/(m^3K)$. Veden lämpö­määrän muutos tilavuutta kohden (yksikkönä J/m^3), kun lämpötila muuttuu referenssilämpötilasta T_0 lämpötilaan T , on siten $\rho c_{V_w}(T - T_0)$. Kertomalla tämä virtaamatiheydellä \mathbf{q} saadaan *advektiivinen lämpövuon tiheys* $\rho c_{V_w}(T - T_0)\mathbf{q}$, joka kuvaa siis veden mukana kulkeutuvaa lämpö­määrää aika- ja pinta-alayksikköä kohden eli tehoa pinta-alayksikköä kohden, yksikkönä $J/(m^2s) = W/m^2$.

Vedessä tapahtuva Fourierin lain mukainen lämmönjohtuminen (yhtälö (9.64)) on

$$(10.56) \quad \mathbf{q}_h = -\lambda \nabla T,$$

missä λ on veden lämmönjohtavuus. Lausekkeen (10.56) oikealle puolelle voidaan tarvittaessa lisätä myös säteilemällä tapahtuvan lämmönsiirron osuus.

Huomautus. Käytimme edellä lämpövuon tiheydelle kirjainsymbolia \mathbf{q}_h ja lämmönjohtavuudelle symbolia λ , jotta välttyään sekaannukselta symbolien \mathbf{q} ja k käytön kanssa. Alaindeksi h lämpövuon tiheyden symbolissa viittaa lämpöön (engl. heat). Viimeksi mainittuja symboleja (\mathbf{q} ja k) olemme geohydrologisessa tarkastelussa käyttäneet virtaamatiheydelle ja vastaavasti läpäisevyydelle. Siksi hieman poikkeavien symbolien käyttö on tarpeen. ■

Muodostamme seuraavaksi advektiivisen lämmönsiirtymisen kenttäyhtälön. Otamme lähtökohdaksi energian taseen periaatteen, joka on esitetty yleisenä taseyhtälönä (8.101). Pohjaveden virtaustarkastelujen kannalta taseyhtälön liike-energiaan liittyvä termi on jo aiemmin todettu mitättömän pieneksi. Myöskään ulkoisten voimien tehoa ei ole tarpeellista tarkastella tässä

yhteydessä, koska sovellamme taseperiaatetta puhtaasti lämmönsiirtymistarkasteluun ja oletamme, että mekaanista energiaa ei muutu lämmöksi. Näin ollen taseyhtälö (8.101) saa nyt käytössä olevilla merkinnöillämme muodon

$$(10.57) \quad - \oint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_h dS = \frac{D}{Dt} \int_V \rho c_{V_w} (T - T_0) dV.$$

Muunnetaan seuraavaksi pintaintegraali tilavuusintegraaliksi käyttäen Gaussin lausetta. Tällöin saadaan

$$(10.58) \quad - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q}_h dV = \frac{D}{Dt} \int_V \rho c_{V_w} (T - T_0) dV.$$

Soveltamalla vielä Reynoldsin kuljetuslauseetta (8.43) yhtälön oikeanpuolen tilavuusintegraalin ainederivaattaan ja siirtämällä näin muodostuvassa lausekkeessa divergenssi-termi yhtälön vasemmalle puolelle saadaan seuraava yhtälö:

$$(10.59) \quad \int_V [\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\rho c_{V_w} (T - T_0) \mathbf{q})] dV = \int_V \rho c_{V_w} \frac{\partial T}{\partial t} dV.$$

Jotta tämä yhtälö on voimassa mielivaltaiselle tilavuudelle V , merkitään yhtälön molempien puolien integrandit yhtäsuuriksi. Näin päädyimme advektiota kuvaavaan kenttäyhtälöön:

$$(10.60) \quad \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \nabla \cdot (\rho c_{V_w} (T - T_0) \mathbf{q}) = \rho c_{V_w} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Mahdolliset lämpölähteet voidaan lisätä yhtälön vasemmalle puolelle.

Varsin usein esiintyvä advektioyhtälön muoto saadaan, kun oletetaan kokoonpuristumaton virtaus, jolloin veden tiheys on vakio ja yhtälön (10.4) mukaan $\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$. (Huokoisen runkoaineen huokoisuus ei alkuperäisen oletuksemme mukaisesti liioin riipu ajasta.) Tällöin päädyimme advektioyhtälöön

$$(10.61) \quad \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_{V_w} \mathbf{q} \cdot \nabla T = \rho c_{V_w} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Huokoisen aineen (huokoisuus ϕ) tapauksessa yhtälöissä (10.60) ja (10.61) olevilla aineparametreilla kuvataan vesi-runkoaine-seoksen ominaisuuksia. Tällöin siis lämpö ei kohdistu pelkästään veteen, vaan myös kiinteään runkoaineeseen. Tämän takia usein kirjoitetaan approksimatiivisesti veden ja runkoaineen muodostaman seoksen lämmönjohtavuudelle

$$(10.62) \quad \lambda = \phi \lambda_w + (1 - \phi) \lambda_s$$

sekä tiheyden ja ominaislämpökapasiteetin tulolle

$$(10.63) \quad \rho c_V = \phi \rho_w c_{V_w} + (1 - \phi) \rho_s c_{V_s},$$

joissa alaindeksi w viittaa veteen (engl. water) ja s kiinteään runkoaineeseen (eng. solid). Näillä merkintätavoilla voidaan huokoisen väliaineen advektioyhtälö (10.61) kirjoittaa muotoon:

$$(10.64) \quad \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_w c_{V_w} \mathbf{q} \cdot \nabla T = \rho c_V \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Tässä yhtälössä siis aineparametrien arvot ovat lausekkeiden (10.62) ja (10.63) mukaiset.

10.5 Diffuusio ja dispersio

Pohjavesitarkasteluissa mielenkiinnon kohteena voi olla itse veden virtauksen lisäksi siihen liuenneiden ja sen mukana liikkuvien aineiden *kulkeutuminen* eli kuljetus. Kulkeutumisesta tapahtuu paitsi itse virtauksen mukana eli *advektiivisesti*, myös aineiden spatiaalisten konsentraatio- eli pitoisuuserojen pyrkimässä tasoittumaan. Tätä tasoittumista kutsutaan *diffuusioksi*. Diffuusio on atomitasoinen ilmiö, joka tapahtuu nestefaasissa, kiinteässä faasissa tai nesteen ja kiinteän aineen rajapinnan läheisenä ilmiönä atomien ja molekyylien liikkumisena. Tällainen on esimerkiksi pohjaveden ja kiviaineen välinen vuorovaikutus, jossa pohjavedessä liuenneena olevat aineet pyrkivät diffundoitumaan kiinteään kiviainekseen, sen huokosiin ja mikrorakoihin. Tällaista diffuusiota kutsutaan erityisnimellä *matriisidiffuusio*. Atomitasoinen luonteesta huolimatta diffuusiolle voidaan muotoilla makroskooppinen kenttäteoria.

Diffuusion tavallinen konstitutiivinen yhtälö on ns. *Fickin*⁷ 1. laki

$$(10.65) \quad \mathbf{J} = -\overline{\overline{D}} \cdot \nabla C,$$

missä C on aineen pitoisuus (yksikkönä kg/m^3), tensori $\overline{\overline{D}}$ diffuusiokerroin (yksikkönä m^2/s) tai massadiffuusiokerroin tai diffusiivisuus ja \mathbf{J} diffuusiovirrantiheys (yksikkönä $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$) tai (diffuusio)massavirrantiheys. Fickin 1. laki on täysin analoginen sähkömagnetismin Ohmin, lämmönsiirtymisen Fourierin tai geohydrologian Darcyn lain kanssa. Miinus-merkki kuvaa sitä, että diffuusiovirran suunta on suuremmasta pitoisuudesta pienempään. Kysymyksessä on siis kokeellinen, tietyllä pätevyysalueella voimassa oleva yhteys, eikä mikään yleispätevä luonnonlaki. Diffuusiokerroin riippuu monista tekijöistä.

⁷Adolph Eugen Fick (1829–1901), saks. fyysikko ja kemisti.

Tärkeää on huomata, että se on vahvasti ainespesifinen, kullekin aineelle ominainen. Toisin sanoen se riippuu siitä, mikä aine liikkuu ja missä aineessa. Lisäksi sillä on vahva lämpötilariippuvuus. Aineen pitoisuus voidaan ilmaista myös yksikössä mol/m³ eli moolia kuutiometrissä, jolloin diffuusiiovirrantiheyden yksiköksi tulee mol/(m²s).

10.5.1 Diffuusio nesteessä

Tarkastellaan aluksi makroskooppisesti liikkumatonta nestettä, jossa on toista ainetta liuenneena tai johon lisätään jotakin toista nestettä (liuosta). Kouluesimerkkinä tässä yhteydessä mainitaan usein mustetipan pudottaminen vesilasiin. Oletetaan diffuusiokerroin vakioksi. Konsentraatioerojen tasaantumiseen liittyvä diffuusiomassavirrantiheys on juuri yhtälön (10.65) mukainen. Massavirran taseyhtälön (10.6) perusteella voidaan välittömästi kirjoittaa liuenneen aineen tai lisätyn liuoksen massatase nesteessä lähdealueen ulkopuolella

$$(10.66) \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial C}{\partial t}.$$

Sijoittamalla tähän yhteys (10.65) saadaan

$$(10.67) \quad \nabla \cdot (D\nabla C) = \frac{\partial C}{\partial t},$$

joka edelleen voidaan diffuusiokerrointa koskevan oletuksemme (homogeeninen) mukaisesti saattaa muotoon

$$(10.68) \quad D\nabla^2 C = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Kirjallisuudessa yhtälöä (10.67) tai (10.68) kutsutaan *Fickin 2. laiksi*. Kysymyksessä on varsinainen diffuusioyhtälö, josta vastaaventyypiset analogiset yhtälöt, kuten lämmönjohtuminen, ovat saaneet nimensä. Yhtälöstä (10.68) huomataan, että jos diffuusio tapahtuu stationaarisesti, pitoisuuden C jakautuminen noudattaa Laplacen yhtälöä

$$(10.69) \quad \nabla^2 C = 0.$$

Jos neste liikkuu eli kysymyksessä on samanaikaisesti myös virtaus, jonka mukana tapahtuu aineen advektiivinen kulkeutuminen nopeudella \mathbf{v} , tulee massataseeseen liittää advektiivinen termi. Yleisesti voidaan esittää *konvektio-diffuusioyhtälö* tai *advektio-diffuusioyhtälö* esimerkiksi seuraavassa muodossa

$$(10.70) \quad \nabla \cdot (D\nabla C) - \nabla \cdot (C\mathbf{v}) + S = \frac{\partial C}{\partial t},$$

missä S kuvaa lähdetermiä. Lähdetermin avulla voidaan huomioida myös aineiden kemiallisia vuorovaikutuksia ja esimerkiksi radioaktiivinen hajoaminen. Yhtälön (10.70) vasemman puolen ensimmäinen termi liittyy diffuusioon ja toinen termi advektioon (konvektioon). Oikealla puolella on epästationaarisuus-termi eli transientti-termi.

Tämä yhtälö esiintyy kirjallisuudessa hyvin monenlaisessa muodossa. Osin yhtälöiden muotoon vaikuttavat väliaineesta ja diffundoituvasta aineesta tehtävät oletukset, osin puhtaasti merkinnälliset seikat, mm. ainederivaatan käyttö.

Huomautus. Termejä *advektio* ja *konvektio* käytetään paljolti synonyymeinä aineensiirtymisen tarkasteluissa. Lämmönsiirtymisen puolella jotkut kirjoittajat pitävät advektiota aineen liikkeen mukana tapahtuvana kulkeutumisenä. Konvektioksi kutsutaan lämmönjohtumisen ja advektion yhteisvaikutusta. ■

10.5.2 Diffuusio huokoisessa aineessa

Tarkastellaan seuraavaksi huokoisessa väliaineessa tapahtuvaa diffuusiota. Oletetaan myös, että diffundoituva aine ei reagoi kemiallisesti kiinteän runkoaineen kanssa eikä muutoinkaan muutu, esimerkiksi radioaktiivisen hajoamisen seurauksena. Tällöin lähdealueen ulkopuolella diffuusiovirrantiheydelle voidaan kirjoittaa

$$(10.71) \quad \mathbf{J} = -\bar{\bar{D}} \cdot \nabla(\phi C),$$

koska huokoisessa aineessa nestettä on vain huokosissa ja liuenneen aineen pitoisuus huokoisessa aineessa on siten ϕC . Annamme seuraavaksi nesteen virrata huokoisessa aineessa virtaamatiheyden (eli Darcyn nopeuden) ollessa \mathbf{q} . Tällöin kokonaisdiffuusiovirrantiheyden tulee lisätä Fickin 1. lain mukaisen kulkeutumisen lisäksi virtauksen mukana tapahtuva kulkeutuminen eli advektio. Kokonaisdiffuusiovirrantiheys on siten

$$(10.72) \quad \mathbf{J}_{tot} = -\bar{\bar{D}} \cdot \nabla(\phi C) + C\mathbf{q}.$$

Huokoisessa väliaineessa massataseyhtälö (10.4) antaa

$$(10.73) \quad \nabla \cdot \mathbf{J}_{tot} = -\frac{\partial(\phi C)}{\partial t}.$$

Sijoittamalla tähän yhteys (10.72) saadaan

$$(10.74) \quad \nabla \cdot (\bar{\bar{D}} \cdot \nabla(\phi C)) - \nabla \cdot (C\mathbf{q}) = \frac{\partial(\phi C)}{\partial t}.$$

Yhtälöä (10.74) kutsutaan huokoisen aineen *konvektio (tai advektio)-diffuusio-yhtälöksi*.

Kun oletetaan huokoisuus vakioksi ja virtaus kokoonpuristumattomaksi ($\nabla \cdot \mathbf{q} = 0$), saadaan yhtälön yksi varsin usein esiintyvä muoto

$$(10.75) \quad \nabla \cdot (\overline{D} \nabla C) - \frac{\mathbf{q}}{\phi} \cdot \nabla C = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

Tällä yhtälöllä on ilmeinen analogia advektiivisen lämmönsiirtymisen yhtälön (10.61) kanssa. Yhtälöiden (10.74) ja (10.75) vasemmille puolille voidaan tarvittaessa lisätä myös lähdetermi S , kuten yhtälössä (10.70) on esitetty.

Diffuusio huokoisessa aineessa on luonteeltaan hieman erilaista kuin diffuusio nesteessä. Huokoisessa aineessa diffuusiota vaikeuttaa kiinteä runkoaine ja sen rakenne. Diffusioreiteistä tulee kiemurtelevia, mitä ilmiötä kuvataan ns. *tortuositeetilla*, (engl. *tortuosity*). Diffuusiokerroin huokoisessa aineessa on ns. *tehokas* diffusiivisuus, joka on pienempi kuin diffusiivisuus pelkässä nesteessä. Lisäksi huokoisessa aineessa on aina osa huokosista sellaisia, ettei niiden kautta tapahdu virtausta (ns. umpiperähuokokset). *Virtaushuokoisuus* on se huokoisuus, joka osallistuu virtaukseen. Emme kuitenkaan perehdy tarkemmin huokoisen väliaineen ominaisuuksiin diffuusion kannalta.

Kallioperässä tapahtuvan diffuusioilmiön kannalta suuret epävarmuudet liittyvät huokoisuuteen ϕ sekä diffuusiokerroimeen \overline{D} . Huokoisuus kalliolla ja kivessä on useimmiten vaikea ja työläs määrittää, joten sen arvoista ja niiden jakautumisesta on tyydyttävä usein tekemään ”valistuneita” arvauksia. Tyypillisesti esimerkiksi graniitin huokoisuus vaihtelee 0,05 %:sta 1 %:een.

Rakoilleen kallion pohjavesivirtauksiin liittyy läheisesti myös *dispersio*. Kallion raossa virtaavan veden nopeus on erilainen eri kohdissa rakoa, mistä syystä aiheutuu liuenneen aineen pitoisuuden hajaantumista eli mekaanista dispersiota. Huomattakoon, että dispersio on nimitys ilmiölle, joka muodostuu itse asiassa useasta eri ilmiöstä. Kyse ei ole siis yhdestä yksittäisestä erillisestä ilmiöstä, vaan oikeastaan kokonaisesta ilmiöjoukosta. Esimerkiksi lämmönjohtuminen vedessä aikaansaa myös dispersiota.

Rakoilleen kallion kulkeutumistarkasteluissa diffuusiokerroin korvataan usein ns. hydrodynaamisella dispersiolla, joka ottaa huomioon sekä mekaanisen dispersion että molekulaarisen diffuusion. Todellisuudessa näiden kuvaaminen yhdellä kertoimella on keinotekoisia, koska mainittuja ilmiöitä ei voi erottaa toisistaan. Huomion arvoista kuitenkin on, että molekulaarinen diffuusio esiintyy myös levossa olevassa nesteessä. Hydrodynaaminen dispersiotensori voidaan esittää esimerkiksi muodossa

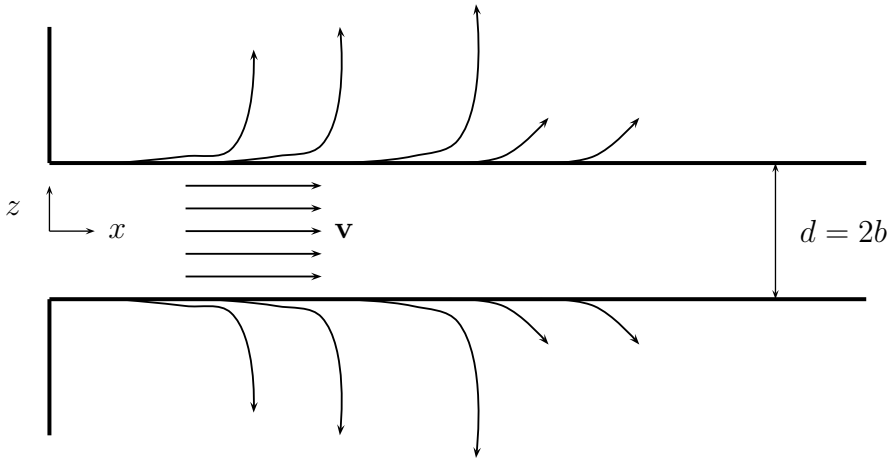
$$(10.76) \quad D_{ij} = \epsilon_T |\mathbf{q}| \delta_{ij} + (\epsilon_L - \epsilon_T) \frac{q_i q_j}{|\mathbf{q}|}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

missä ϵ_L on pitkittäinen dispersiopituus (yksikkönä m), ϵ_T poikittainen dispersiopituus (yksikkönä m) ja δ_{ij} Kroneckerin deltatensori. Tässä muodossa ei ole mukana molekulaarista diffuusiota. Huomattakoon, että hydrodynaamisessa dispersiossa on kysymys kokeellisesta, konstitutiivisesta kertoimesta. Emme lähde tarkemmin perehtymään hydrodynaamiseen dispersioon.

10.5.3 Matriisidiffuusio

Veden virratessa kallion raossa vesi on koko ajan vuorovaikutuksessa ympäröivän kiviaineen eli kalliomatriisin kanssa. Kivessä on pieniä huokosia ja mikrorakoja, joihin pääsee raossa virtaavasta vedestä diffundoitumaan veden mukana kulkevia aineita. Aineen atomaariset osat (ionit ja molekyylit) törmäilevät lämpöliikkeen seurauksena raon seinämiin, josta ne voivat päästä diffundoitumaan kalliomatriisiin. Ilmiötä kutsutaan matriisidiffuusioksi. Tätä ongelmaa on paljon tutkittu käytetyn ydinpolttoaineen geologisen loppusijoituksen turvallisuuden arvioinnin yhteydessä, joten tarkastelemme sitä vielä lopuksi. Kuva 10.3 esittää ilmiötä havainnollistavaa rakomallia. Siinä on kaksi yhdensuuntaista, sileää tasoa, joiden rajoittamassa tilassa virtaa pohjavettä. Virtausprofiili z -akselin suunnassa oletetaan homogeeniseksi, mikä tarkoittaa sitä, että dispersio jätetään seuraavassa tarkastelussa huomioon ottamatta. Toisin sanoen myöskään virtauksen rajakerrosteoriaa ei sovelleta tässä mallissa. Oletamme myös, että kallion mikroraoit ja huokokset ovat jo alun perin täysin veden täyttämiä eli kyllästystilassa (saturoituneita). Tarkastelun yksinkertaistamiseksi ja periaatteellisen ymmärryksen saamiseksi ilmiöön oletamme lisäksi, että raossa veden mukana kulkeva aine eli *liue* ei reagoi kemiallisesti ympäröivän kallion kanssa eikä muutenkaan muutu esimerkiksi radioaktiivisen hajoamisen seurauksena.

Matriisidiffuusion kenttäteoreettisen mallin luomiseksi probleemia tarkastellaan kahdessa osassa, joista toinen liittyy raossa virtaavaan veteen ja toinen raon seinämästä alkavaan diffuusioon kalliomatriisiin. Usein ajatellaan, että veteen liuenneet aineet jakautuvat jotenkin yksinkertaisesti nestefaasin eli veden ja kiinteän faasin eli kalliomatriisin välillä. Tämä ajattelu on johtanut ns. *jakautumiskertoimien* ja *pidättymiskertoimien* (eli pidätyskertoimien) käyttöönottoon. Pidättymiseen raon reunoille vaikuttavat erilaiset kemialliset ja fysikaaliset tekijät, kuten pH ja hapetus-pelkistys-potentiaali (Eh). *Sorptioksi* kutsutussa ilmiössä aineet kiinnittyvät toisen aineen pinnalle jollakin mekanismilla, esimerkiksi sähköisten voimien avulla. Eri aineilla on erilainen taipumus sorboitua erilaisille pinnoille. Pidättyminen ja sorptio riippuvat monista ulkoisista tekijöistä eikä pelkästään pidättyvistä aineista ja liuosten ominaisuuksista. Tärkeä ulkoinen tekijä, josta pidättymiskertoimet riippuvat on esimerkiksi lämpötila. Usein sorptiossa erotetaan vielä tarkem-



Kuva 10.3: Matriisidiffuusio raossa virtaavasta vedestä huokoiseen kivimatriisiin (periaatekuva).

min *adsorptio* ja *absorptio*. Adsorptio tarkoittaa nimenomaan aineen kiinnittymistä toisen aineen pintaan ja absorptio aineen imeytymistä toisen aineen sisään. Käytämme tässä termiä sorptio tarkoittamaan erityisesti adsorptiota.

Edellä oleva lyhyt kvalitatiivinen luonnehdinta antaa jo aiheen otaksua, että sorptiossa ja pidättymisessä on kyse varsin monimutkaisesti kemiallis-fysikaalisesta systeemistä. Niinpä makroskooppisen teorian kehittelyn kannalta on otettu käyttöön yksi kerroin, ”sorptiokerroin” eli *jakautumiskerroin*.

Jakautumiskerroin kuvaa yksinkertaisesti sitä, miten paljon liuenneesta aineesta on kiinnittynyt kalliomatriisin pintaan ja miten paljon liuennutta ainetta on vedessä tasapainotilassa. Aineen paljous voidaan ilmaista joko pinta-alaan ja tilavuuteen pohjautuvana. Pinta-alaan pohjautuva jakautumiskerroin määritellään siis seuraavasti

$$(10.77) \quad K_a = \frac{S_f}{C_f}$$

ja tilavuuteen pohjautuva vastaavasti

$$(10.78) \quad K_d = \frac{S_p}{C_p},$$

missä S_f on raon pinnalle kiinnittyneen liueen massa tai määrä raon pinta-alaan kohden (yksikkö kg/m^2 tai mol/m^2), C_f on raossa virtaavassa vedessä olevan liueen pitoisuus (yksikkö kg/m^3 tai mol/m^3), S_p kalliomatriisissa olevan liueen massa tai määrä kallion runkoainemassaa kohden (yksikkö kg/kg

tai mol/kg) ja C_p liueen pitoisuus kalliomatriisissa olevassa vedessä (yksikkö kg/m³ tai mol/m³). Jakautumiskertoimen K_a yksikkö on siten m³/m² ja jakautumiskertoimen K_d yksikkö m³/kg. On tavallista, että jakautumiskertoimen K_a yksikköä ei supisteta neliometrillä, eikä liioin S_p :n yksikköä kilogrammalla. Jakautumiskerrointa K_d kutsutaan myös massajakautumiskertoimeksi.

Pidättymiskerroin tarkoittaa kokonaisliueen määrää n_{tot} (yksikkö mol tai kg) jaettuna vedessä olevalla liueen määrällä n_m . Kokonaisliueen määrään kuuluu vedessä olevan liueen määrä lisättyinä sorboituneella liueen määrällä n_a eli $n_{tot} = n_m + n_a$. Vedessä oleva liue kykenee liikkumaan. Sen sijaan sorboitunut liue ei liiku. Kaavamuodossa pidättymiskerroin on siis

$$(10.79) \quad R = \frac{n_{tot}}{n_m} = \frac{n_m + n_a}{n_m} = 1 + \frac{n_a}{n_m}.$$

Kuvan 10.3 merkinnöillä saadaan pinta-alaan perustuvaksi jakautumiskertoimeksi määritelmän (10.77) perusteella

$$(10.80) \quad K_a = \frac{n_a/(2\Delta y \Delta x)}{n_m/(2b\Delta y \Delta x)} = \frac{2b}{2} \frac{n_a}{n_m},$$

missä Δx ja Δy ovat x -akselin ja vastaavasti y -akselin suuntaiset raon poikki asetetun, kuvitellun suorakulmaisen kontrollitilavuussärmiön sivut. Raon avauma $2b$ on särmiön z -akselin suuntainen sivu (y -akselin suunta on sivun tasoa vastaan kohtisuorassa suunnassa). On huomattava, että raossa on kaksi pintaa, mistä syystä kokonaisrakopinta-ala on $2\Delta y\Delta x$. Yhtälöistä (10.79) ja (10.80) saadaan pidättymiskertoimelle raossa

$$(10.81) \quad R = R_f = 1 + \frac{2}{2b} K_a,$$

missä alaindeksi f viittaa rakoön (engl. fracture tai fissure). Kerroin $2/(2b)$ kuvaa rakopinnan kokonaispinta-alan suhdetta rakotilavuuteen, mikä täysin saturoituneen virtauksen tapauksessa tarkoittaa samaa kuin ns. *märkäpinnan* (engl. flow wetted surface) suhdetta veden tilavuuteen raossa. Märkäpinnan-käsitteellä on eräissä kulkeutumistarkasteluissa tärkeä asema.

Kiviaineessa eli kalliomatriisissa liueet voivat olla huokosrakenteeseen difundoituneessa vedessä tai sorboituneena huokosten pinnoille. Täysin saturoituneen huokoisen aineen (huokoisuus ϕ) bulkkitilavuus (V_B) muodostuu sekä huokosissa olevan veden tilavuudesta (V_W) että runkoaineen tilavuudesta V_R , jolloin voidaan kirjoittaa seuraavat yhteydet:

$$(10.82) \quad V_B = V_W + V_R, \quad V_W = \phi V_B \quad V_R = (1 - \phi)V_B.$$

Tilavuuteen pohjautuvan jakautumiskertoimen määritelmästä (10.78) ja yhteyksistä (10.82) saadaan jakautumiskertoimelle lauseke

$$(10.83) \quad K_d = \frac{n_a/(\rho_R V_R)}{n_m/V_W} = \frac{n_a/(\rho_R(1-\phi)V_B)}{n_m/(\phi V_B)} = \frac{\phi}{\rho_R(1-\phi)} \frac{n_a}{n_m},$$

missä ρ_R on kiinteän runkoaineen tiheys (yksikkö kg/m³).

Yhtälöistä (10.79) ja (10.83) saadaan pidättymiskertoimelle kalliomatriisissa lauseke

$$(10.84) \quad R = R_p = 1 + K_d \frac{\rho_R(1-\phi)}{\phi},$$

missä alaindeksi p viittaa huokoiseen (engl. porous) kalliomatriisiin. Pidättymiskertoimet ovat määritelmänsä (10.79) perusteella laaduttomia.

Huomattakoon, että pidättymiskertoimet ja siten myös jakautumiskertoimet ovat luonteeltaan täysin empiirisiä. Niiden määrittäminen fysiikan peruseriaatteista lähtien olisi hyvin vaativa tehtävä.

Matriisidiffuusion massataseyhtälö

Seuraavaksi voimme esittää raon massataseen tekemiemme oletusten valitessa kuvan 10.3 mukaisin merkinnöin. Otamme lähtökohdaksi advektio-diffuusio-yhtälön (10.75). Teimme jo aiemmin oletuksen siitä, että veden virtaus raossa on homogeenista, jolloin dispersio voidaan jättää huomiotta. Saadaan

$$(10.85) \quad -v \frac{\partial C_f}{\partial x} + \frac{2}{2b} \left(\phi D_p \frac{\partial C_p}{\partial z} \right) \Big|_{|z|=b} = \frac{\partial C_f}{\partial t} + \frac{2}{2b} \frac{\partial S_f}{\partial t},$$

missä termi $\frac{2}{2b} \left(\phi D_p \frac{\partial C_p}{\partial z} \right) \Big|_{|z|=b}$ on Fickin 1. lain mukainen diffuusiovirta raossa olevasta vedestä raon pinnan huokosiin ja D_p diffuusiokerroin kivimatriisin huokosrakenteessa. Tulo ϕD_p on tehokas diffusiivisuus eli efektiivinen diffuusiokerroin raon vedestä kivimatriisiin. Tehdään oletus sorboituneen ja sorboitumattoman aineen tasapainosta (ns. lineaarinen tasapainoisotermi), jonka mukaan sorboituneen liueen määrä on suoraan verrannollinen vedessä olevaan liueen määrään. Käytännössä tämä tarkoittaa juuri jakautumiskertoimen käyttöä yhtälön (10.77) mukaisesti. Toisin sanoen

$$(10.86) \quad S_f = K_a C_f,$$

josta saadaan edelleen

$$(10.87) \quad \frac{\partial S_f}{\partial t} = K_a \frac{\partial C_f}{\partial t}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (10.85) saadaan

$$(10.88) \quad -v \frac{\partial C_f}{\partial x} + \frac{2}{2b} \left(\phi D_p \frac{\partial C_p}{\partial z} \right) \Big|_{|z|=b} = \left(1 + \frac{2}{2b} K_a \right) \frac{\partial C_f}{\partial t}.$$

Kun käytetään hyväksi pidättymiskerrointa R_f koskevaa yhteyttä (10.81), voidaan yhtälö (10.88) saattaa vielä muotoon

$$(10.89) \quad -v \frac{\partial C_f}{\partial x} + \frac{2}{2b} \left(D_e \frac{\partial C_p}{\partial z} \right) \Big|_{|z|=b} = R_f \frac{\partial C_f}{\partial t},$$

missä $D_e = \phi D_p$ on efektiivinen diffuusiokerroin raon vedestä kalliomatriisiin.

Johtaaksemme kalliomatriisin diffuusioyhtälön tarkastelemme ensin huokoisen kalliomatriisin bulkkitylavyudessa olevaa liueiden pitoisuutta C_B ja S_B . Edellä esitettyjen määritelmien mukaan voidaan kirjoittaa

$$(10.90) \quad C_B = \frac{n_m}{V_B} = \frac{n_m}{V_W/\phi} = \phi C_p$$

ja

$$(10.91) \quad S_B = \frac{n_a}{V_B} = \frac{n_a}{V_R/(1-\phi)} = \rho_R(1-\phi) \frac{n_a}{\rho_R V_R} = \rho_R(1-\phi) S_p.$$

C_B tarkoittaa siis liueiden pitoisuutta bulkkitylavyudessa (yksikkönä mol/m³ tai kg/m³) ja S_B sorboituneiden liueiden pitoisuutta bulkkitylavyudessa (yksikkönä mol/m³ tai kg/m³).

Kalliomatriisissa diffuusiovirralle voidaan muodostaa seuraava Fickin 2. lain muotoinen taseyhtälö:

$$(10.92) \quad \phi D_p \frac{\partial^2 C_p}{\partial z^2} = \phi \frac{\partial C_p}{\partial t} + \rho_R(1-\phi) \frac{\partial S_p}{\partial t},$$

joka voidaan edelleen saattaa jakamalla huokoisuudella ϕ sekä yhteyden (10.78) avulla muotoon

$$(10.93) \quad D_p \frac{\partial^2 C_p}{\partial z^2} = \left(1 + \rho_R \frac{1-\phi}{\phi} K_d \right) \frac{\partial C_p}{\partial t}.$$

Huomioimalla vielä pidättymiskerrointa R_p koskeva yhteys (10.84) saadaan kalliomatriisin diffuusioyhtälöksi

$$(10.94) \quad D_p \frac{\partial^2 C_p}{\partial z^2} = R_p \frac{\partial C_p}{\partial t}.$$

Yhtälöt (10.89) ja (10.94) muodostavat yksinkertaisen kenttäteoreettisen mallin matriisidiffuusiolle. Yhtälöt on ratkaistava samanaikaisesti eli yhtälöryhmänä, koska ne kytkeytyvät toisiinsa pitoisuuden C_p kautta. Emme kuitenkaan lähde perehtymään tarkemmin yhtälöryhmän ratkaisemiseen. Lähteessä [31] on esitetty seikkaperäisesti yhtälöryhmän ratkaisemista ja soveltamista ydinjätteen loppusijoituksen kannalta. Tällöin liueet tarkoittavat käytetystä ydinpolttoaineesta veteen liuenneita radioaktiivisia aineita eli radionuklideja.

10.6 Loppuhuomautus nesteiden mekaniikasta

Nesteiden mekaniikka eli virtausmekaniikka on erittäin keskeinen ala maan ilmakehän ja vesivaipan fysiikassa. Kiinteän maan geofysiikassa nesteiden mekaniikan yksi tärkeä sovellusalue on maa- ja kallioperässä olevan veden virtaus. Tästä syystä otimme tarkasteltavaksi erityisesti huokoisessa väliaineessa tapahtuvan nestevirtauksen.

Esimerkkinä tarkasteltu rakovirtaus ja sitä kuvaava kuutiolaki on tärkeä malli, kun arvioidaan esimerkiksi vuotovesien määriä maanalaisiin tiloihin.

Todettakoon vielä virtausmekaniikan ja potentiaaliteorian välisestä yhteydestä seuraavaa. Laminaarinen virtaus voi olla pyörteetöntä tai pyörteellistä. *Pyörteettömälle* nopeuskentälle pätee kaikkialla

$$(10.95) \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0,$$

jolloin nopeus voidaan ilmaista skalaaripotentialin, ns. *nopeuspotentialin* φ , avulla

$$(10.96) \quad \mathbf{v} = \nabla\varphi.$$

Pyörteetöntä virtausta kutsutaan myös *potentiaalivirtaukseksi*.

Huomataan, että kokoonpuristumattoman nesteen (ρ vakio), jolle jatkuvuusyhtälö (10.6) saa muodon

$$(10.97) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

potentiaalivirtaus toteuttaa siten Laplacen yhtälön

$$(10.98) \quad \nabla^2\varphi = 0.$$

Reunaehtoina tulevat kysymykseen Dirichletin ja Neumannin ehdot tai seka-reunaehto. Emme kuitenkaan lähde perehtymään tarkemmin potentiaalivirtausprobleemeihin. Todettakoon, että analogia esimerkiksi sähköstaattisten probleemien kanssa on ilmeinen, joten aiemmissa luvuissa esitellyt potentiaaliprobleemit ja niiden ratkaisutekniikka ovat relevantteja myös tämäntyyppisissä virtausprobleemeissa.

Kirjallisuutta

- [1] ADAMS, R. A. *A Complete Course Calculus*, 4th ed. Addison Wesley, Don Mills, Ontario, 1999.
- [2] ARFKEN, G. *Mathematical Methods for Physicists*, 2nd ed. Academic Press, Inc., New York, 1970.
- [3] ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [4] ASSZONYI, C., AND RICHTER, R. *The Continuum Theory of Rock Mechanics*. Trans Tech Publications, 1979.
- [5] BARTON, G. *Elements of Green's Functions and Propagation. Potentials, Diffusion, and Waves*. Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [6] BEAR, J. *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering. McGraw-Hill, Inc., New York, 1979.
- [7] BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [8] BEAR, J., TSANG, C.-F., AND DE MARSILY, G., Eds. *Flow and Contaminant Transport in Fractured Rock*. Academic Press, Inc., San Diego, 1993.
- [9] BEAR, J., AND VERRUIJT, A. *Modeling Groundwater Flow and Pollution*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1994.
- [10] BHIMASANKARAM, V. L. S., SOLOVIEV, G. A., AND SESHAGIRI RAO, S. V. *Introduction to the Theory of Fields*. Centre of Exploration Geophysics, Osmania University, Hyderabad 500007, India, 1973.

- [11] BINNS, K. J., AND LAWRENSEN, P. J. *Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems*. Pergamon Press Ltd, Oxford, 1963.
- [12] BOLEY, B. A., AND WEINER, J. H. *Theory of Thermal Stresses*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1997.
- [13] BRADY, B. H. G., AND BROWN, E. T. *Rock Mechanics for Underground Mining*, 2nd ed. Chapman & Hall, London, 1993.
- [14] CARSLAW, H. S., AND JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*, 2nd ed. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [15] CHOU, P. C., AND PAGANO, N. J. *Elasticity. Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches*. Dover Publications, Inc., New York, 1992.
- [16] COUSSY, O. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1995.
- [17] DUBOIS, J., AND DIAMENT, M. *Géophysique, Cours et exercices corrigés*, 2nd ed. Dunod, Paris, 2001.
- [18] EDMINISTER, J. A. *Theory and Problems of Electromagnetics*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
- [19] ELORANTA, E., ERMUTLU, M., FLYKT, M., LINDELL, I., NIKOSKINEN, K., AND SIHVOLA, A. *Electromagnetic characterization of fractured rock for geological disposal studies of spent nuclear fuel*. STUK-YTO-TR 145. Säteilyturvakeskus, Helsinki, 1998.
- [20] ESKOLA, L. *Geophysical Interpretation Using Integral Equations*. Chapman & Hall, 1992.
- [21] EYGES, L. *The Classical Electromagnetic Field*. Dover Publications, Inc., New York, 1980.
- [22] FETTER, C. W. *Contaminant Hydrogeology*, 2nd ed. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ 07456, 1999.
- [23] FOX, E. A. *Mechanics*. Harper & Row, New York, 1967.
- [24] GRANT, F. S., AND WEST, G. F. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- [25] GREEN, A. E., AND ZERNA, W. *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Dover Publications, Inc., New York, 1992.

- [26] GUENTHER, R. B., AND LEE, J. W. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Dover Publications, Inc., New York, 1996.
- [27] INCROPERA, F. P., AND DEWITT, D. P. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [28] JAEGER, J. C. *Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications*, 2nd ed. Methuen & Co. LTD, London, 1964.
- [29] JAEGER, J. C., AND COOK, N. G. W. *Fundamentals of Rock Mechanics*, 2nd ed. Chapman and Hall, London, 1976.
- [30] JEANS, J. H. *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism*, 5th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
- [31] JUSSILA, P. *Geosphere Transport of Radionuclides in Safety Assessment of Spent Fuel Disposal*. STUK-YTO-TR 164. Säteilyturvakeskus, Helsinki, 2000.
- [32] KAUFMAN, A. A. *Geophysical Field Theory and Method, Part A, Gravitational, Electric, and Magnetic Fields*. Academic Press, Inc., San Diego, 1992.
- [33] KELLOGG, O. D. *Foundations of Potential Theory*. Dover Publications, Inc., New York, 1954.
- [34] KOLSKY, H. *Stress Waves in Solids*. Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [35] KRESIC, N. *Quantitative Solutions in Hydrogeology and Groundwater Modeling*. CRC Lewis Publishers, Boca Raton, 1997.
- [36] KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*, 6th ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [37] KURKI-SUONIO, K., AND KURKI-SUONIO, R. *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet*. Limes ry, Helsinki, 1989.
- [38] LAMB, H. *Hydrodynamics*, 6th ed. Dover Publications, Inc., New York, 1945.
- [39] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields*, 4th revised english ed., vol. 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1989.

- [40] LANDAU, L. D., AND LIFSHITZ, E. M. *Fluid Mechanics*, 2nd ed., vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1989.
- [41] LANDAU, L. D., LIFSHITZ, E. M., AND PITAEVSKIĬ, L. *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd ed., vol. 8 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1984.
- [42] LEBEDEV, N. N. *Special Functions and Their Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [43] LEBEDEV, N. N., SKALSKAYA, I. P., AND UFLYAND, Y. S. *Worked Problems in Applied Mathematics*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [44] LINDELL, I., AND SIHVOLA, A. *Sähkömagneettinen kenttäteoria, 1. Staattiset kentät*, vol. 560. Otatieto, Helsinki, 2001.
- [45] LINDELL, I. V. *Methods for Electromagnetic Field Analysis*, vol. 30 of *The Oxford Engineering Science Series*. Claderon Press, Oxford, 1992.
- [46] LONG, J. C. S., Ed. *Rock Fractures and Fluid Flow, Contemporary Understanding and Applications*. National Academy Press, Washington D.C., 1996.
- [47] MALVERN, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Series in Engineering of the Physical Sciences. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1969.
- [48] MASE, G. E. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- [49] MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I, II. Dover Publications, Inc., New York, 1954.
- [50] MIKHAILOV, M. D., AND ÖZİŞİK, M. N. *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. Dover Publications, Inc., New York, 1994.
- [51] MILITZER, H., AND WEBER, F. *Angewandte Geophysik*, vol. 1, Gravimetrie und Magnetik. Springer-Verlag - Akademie-Verlag, Wien, New York, Berlin, 1984.
- [52] NEGI, J. G., AND SARAF, P. D. *Anisotropy in Geoelectromagnetism*. Elsevier, Amsterdam, 1989.

- [53] NEWELL, JR., H. E. *Vector Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.
- [54] NEWTON, I. *Mathematical Principles of Natural Philosophy (Principia)*, vol. I. The Motion of Bodies. University of California Press, Berkeley, California, 1934.
- [55] NYE, J. F. *Physical Properties of Crystals*. Oxford, Clarendon Press, Oxford, 1969.
- [56] OTTINO, J. M. *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1990.
- [57] PAPAS, C. H. *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*. Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [58] PARASNIS, D. S. *Principles of Applied Geophysics*, 4th ed. Chapman and Hall, London, New York, 1986.
- [59] PELTONIEMI, M. *Maa- ja kallioperän geofysikaaliset tutkimusmenetelmät*. Otakustantamo 515, 1988.
- [60] POLUBARINOVA-KOCHINA, P. Y. *Theory of Ground Water Movement*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.
- [61] RANALLI, G. *Rheology of the Earth, Deformation and flow processes in geophysics and geodynamics*. Allen & Unwin, Inc., Boston, 1987.
- [62] REITZ, J. R., MILFORD, F. J., AND CHRISTY, R. W. *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1993.
- [63] ROJANSKY, V. *Electromagnetic Field and Waves*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [64] SADIKU, M. N. O. *Elements of Electromagnetics*, 2nd ed. Saunders College Publishing, Fort Worth, 1994.
- [65] SALONEN, E.-M. Mekaniikan käsitteitä ja kaavoja. Opetusmoniste 6, Helsingin teknillinen korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Mekaniikan laboratorio, Espoo, 1987.
- [66] SALONEN, E.-M. Mekaniikan matematiikkaa. Tutkimusraportti 42, Teknillinen korkeakoulu, Tietotekniikan osasto, Laskennallinen dynamiikka, Espoo, 1995.

- [67] SEDOV, L. I. *A course in continuum mechanics*, vol. I - Basic equations and analytical techniques. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1971.
- [68] SEDOV, L. I. *A course in continuum mechanics*, vol. II - Physical foundations and formulations of problems. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972.
- [69] SEGEL, L. A., AND HANDELMAN, G. H. *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- [70] SIHVOLA, A., AND LINDELL, I. *Sähkömagneettinen kenttäteoria, 2. Dynaamiset kentät*, vol. 570. Otatieto, Helsinki, 2000.
- [71] SLATER, J. C., AND FRANK, N. H. *Electromagnetism*. Dover Publications, Inc., New York, 1969.
- [72] SMYTHE, W. R. *Static and Dynamic Electricity*, 2nd ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1950.
- [73] SOMMERFELD, A. *Mechanics of Deformable Bodies*, 2nd ed., vol. II of *Lectures on Theoretical Physics*. Academic Press Inc., New York, N. Y., 1956.
- [74] SPIEGEL, M. R. *Theory and Problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, SI(metric) edition*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- [75] STEPHANSSON, O., JING, L., AND TSANG, C.-F., Eds. *Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Processes of Fractured Media, Mathematical and Experimental Studies*, vol. 79 of *Development in Geotechnical Engineering*. Elsevier, Amsterdam - Lausanne - New York - Oxford - Shannon - Tokyo, 1996.
- [76] STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1941.
- [77] TIMOSHENKO, S. P., AND GOODIER, J. N. *Theory of Elasticity*, 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [78] TOWNE, D. H. *Wave Phenomena*. Dover Publications, Inc., New York, 1988.

- [79] TURCOTTE, D. L., AND SCHUBERT, G. *Geodynamics, Applications of Continuum Physics to Geological Problems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [80] VAN NOSTRAND, R. G., AND COOK, K. L. Interpretation of resistivity data. Professional Paper 499, U.S. Geological Survey, Washington, USA, 1966.
- [81] VANDERLINDE, J. *Classical Electromagnetic Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.
- [82] VÄISÄLÄ, K. *Vektorianalyysi*. WSOY, Porvoo, 1968.
- [83] WAIT, J. R. *Geo-Electromagnetism*. Academic Press, Inc., New York, 1982.
- [84] WARD, S. H. Electromagnetic theory for geophysical applications. In *Mining Geophysics*, vol. II, Theory. The Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma, 1967, pp. 10–196.
- [85] ZACHMANOGLU, E. C., AND THOE, D. W. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1986.
- [86] ZEMANSKY, M. W. *Heat and Thermodynamics*, 4th ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1957.
- [87] ZIEGLER, H. *An Introduction to Thermomechanics*, 2nd ed. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam - New York - Oxford, 1983.
- [88] ÖZİŞİK, M. N. *Boundary Value Problems of Heat Conduction*. Dover Publications, Inc., New York, 1989.

Hakemisto

- aallonpituus
 - seismisen aallon, 334, 340
 - sähkömagneettisen aallon, 237
 - sähkömagneettisen aallon (kentän) tyhjiössä, 237
 - sähkömagneettisen aallon tyhjiössä, 230
 - vaimeneva sähkömagneettinen aalto, 241
- aalto
 - dilataatio, 333
 - ekvivolyyminen, 332
 - irrotationaalinen, 332
 - leikkaus-, 336
 - Love-, 338
 - P-aalto, 332, 333
 - pinta-, 338
 - primaari-, 333
 - putki-, 339
 - Rayleighin, 338
 - rotaatio-, 336
 - runko-, 339
 - S-aalto, 332, 333
 - sekundaari-, 333
 - taso-, 234–238, 240–242, 334, 335, 342
- aaltoimpedanssi, 243, 345
- aaltokonversio, 339
- aaltoliike
 - vaimeneva, 225
- aaltoluku, 229, 334, 338
 - P-aalto, 340
- aaltoyhtälö, 226, 227, 235, 332–334, 337, 338
- absorptio, 381
- adiabaattinen, 358
- adsorptio, 381
- advektiivinen lämpövuon tiheys, 374
- advektio, 374, 378
- advektio-diffuusioyhtälö, 377
- affinimuunnos, 157
- aikaharmoninen, 222, 223, 231
- aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt, 222
- ainederivaatta, 286, 289, 292, 293
- aineellinen deformaatiogradientti
 - Lagrange, 296
- aineellinen siirtymägradientti (Lagrange), 297
- ainepiste, 285–287, 296
- ajava paine, 369
- akustinen aalto, 338
- akustinen impedanssi, 344, 345
- akustinen kenttäteoria, 338
- akustinen väliaine, 338
- akviferi, 359
- Alembert, Jean le Rond d', 231
- Alembertin operaattori, 231
- alkeisvaraus, 2
- alkujännitystila, 328
- alkuvenymä, 328
- Ampère, André Marie, 134
- Ampère-Maxwellin laki, 218
- Ampèren piirilaki, 178
- Ampèren voimalaki, 174
- ampeeri, 134
- analogia, 131, 190, 202, 213, 252, 310

- anisotrooppinen
 sähkönjohtavuus, 154
 anisotrooppinen puoliavuus, 160
 anisotrooppinen väliaine, 2
 anisotrooppisuus, 2, 154
 kaateellinen, 162
 anisotropiakerroin, 159
 antiferromagnetismi, 192
 Apollonioksen ympyrä, 116
 Apollonios Pergeläinen, 116
 asemakorkeus, 362, 364
 astronominen kehys, 272
 atomaariset virrat, 185
 atsimuuttikulma, 19, 22, 23, 124, 129,
 204
 avaruusintegraali, 30, 31
 avaruuskulma, 47–50, 79, 85
 avaruusvaraustiheys, 71, 74, 87, 91,
 101, 135, 140

 bac-cab -sääntö, 15
 Bernoulli, Daniel, 362
 Bernoullin yhtälö, 362, 368, 370, 372
 Bessel, Friedrich Wilhelm, 65
 Besselin differentiaaliyhtälö, 65, 66,
 151
 Besselin funktio, 61, 65
 ensimmäinen laji, 65, 67, 151
 ensimmäinen laji, modifioitu, 257
 toinen laji, 66, 67, 151
 binomiteoreema, 62, 63, 82, 85, 181,
 242, 248
 Biot, Jean-Baptiste, 175
 Biot-Savartin laki, 175
 body waves, 339
 Bohr, Niels, 2
 Bouguer, Pierre, 278
 Bouguer-laatta, 278
 Bouguer-reduktio, 278
 Boussinesq, Valentin Joseph, 365
 Boussinesqin approksimaatio, 365

 bulk modulus, 322, 326
 bulkkitilavuus, 360, 382

 Cauchy, Augustin, 132, 298
 Cauchy-Riemannin yhtälöt, 132
 Cauchyn deformaatiotensori, 298
 compressibility, 322
 conduction, 310
 Coulomb, Charles Augustin de, 72
 coulombi, 73
 Coulombin laki, 72–74, 85, 87, 167,
 169, 215, 265
 magnetostatiikkaa koskeva, 169, 211
 cubic expansion coefficient, 322
 Curie, Pierre, 193
 Curie-piste, 193

 d'Alembertin operaattori, 231
 Darcy, Henry Philibert Gaspard, 364
 Darcyn laki, 361, 364, 376
 Darcyn nopeus, 360, 364, 378
 DECOVALEX, iii
 deformaatio, 296, 300
 deformaatiogradientti, 296
 deformaation mitta, 299
 deformaatiotensori, 297
 deformation, 300
 deklinaatio, 208
 demagnetointiefekti, 209
 demagnetointikerroin, 203, 210
 depolarisaatiokerroin, 128
 depolarisoiva kenttä, 127
 Descartes, René, 15
 deviaatiojännityskomponentti, 307
 diamagneettinen, 192
 dielektrinen polarisaatio, 87
 dielektrinen vakio, 94
 differentiaali- ja integraalilaskenta, 7,
 25
 differentiaaaligeometrinen alkio, 25
 karteesinen koordinaatisto, 26

- pallokoordinaatisto, 28
 sylinterikoordinaatisto, 27
 differentiaalinen jana
 karteesinen koordinaatisto, 26
 pallokoordinaatisto, 28
 sylinterikoordinaatisto, 27
 differentiaalinen pinta-alkio
 karteesinen koordinaatisto, 26
 pallokoordinaatisto, 28
 sylinterikoordinaatisto, 27
 differentiaalinen tilavuusalkio
 karteesinen koordinaatisto, 26
 pallokoordinaatisto, 28
 sylinterikoordinaatisto, 27
 diffusiivisuus, 376
 diffuusio, 376
 huokoisessa aineessa, 378
 nesteessä, 377
 diffuusiokerroin, 376
 diffuusiiovirrantiheys, 376
 diffuusiolyhtälö, 224, 230, 231, 255, 256,
 377, 384
 dilataatio, 325–327, 332, 338, 347, 348
 dilataatioaalto, 333
 dipoli
 geomagneettisen kentän, 207
 keskeis, 208
 magneettinen, 182, 184
 potentiaali, 82, 83
 staattinen sähköinen, 251
 sähköinen, 81
 sähkökenttä, 82
 värähtelevä magneettinen, 252, 261
 värähtelevä sähköinen, 246, 247,
 251
 dipolikerros, 138
 dipolimatto, 84
 dipolimomentti, 82, 84, 247, 248
 magneettinen, 173, 185, 206
 Dirac, Paul Adrien Maurice, 50
 Diracin δ -funktio, 50
 Dirichletin reunaehto, 100, 110, 145,
 369
 dispersiivinen suure, 138
 dispersiivisyys
 pinta-aalto, 338
 dispersio, 94, 376, 379
 divergenssi, 35, 36
 karteesinen koordinaatisto, 36
 pallokoordinaatisto, 36
 sylinterikoordinaatisto, 36
 divergenssiteoreema, 37, 178
 driving pressure, 369
 dualismi, 131
 Duhamel, Jean, 328
 Duhamel-Neumannin laki, 328
 dummy index, 54
 dyadi, 57
 antisymmetrinen, 58
 kaksoiskertolasku, 57
 konjugaatti, 58
 liitto, 58
 symmetrinen, 58
 yksikködyadi, 58, 60
 dyadilaskenta, 52
 dyadin divergenssi, 59, 178
 dyadin roottori, 59
 dyadit, 59
 dyaditulo, 57

 efektiivinen jännitys, 366
 ei-newtonilainen neste, 358
 Einstein, Albert, 53
 Einsteinin summeeraussääntö, 53
 Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria,
 265
 ekvivalentti väliainemalli, 356
 ekvivolyyminen aalto, 332
 elastic, 323
 energian tase, 358
 energian taseen periaate, 286
 ensimmäisen kertaluvun tensori, 53

- entropian kasvun periaate, 286
 epähomogeenisuus, 2
 erikoisfunktiot, 61
 eriste, 86
 Eskola, Lauri, iii
 etenemiskerroin
 sähkömagneettinen aalto, 229
 etäisyysfunktio, 48
 Euler, Leonhard, 66
 Eulerin esitystapa, 287, 290
 Eulerin infinitesimaalinen venymätensori, 316
 Eulerin spatiaalinen siirtymägradientti, 297
 Eulerin yhtälö
 ideaalinste, 372
 Eulerin äärellinen venymätensori, 299
- Faraday, Michael, 216
 Faradayn induktiolaki, 216, 217
 ferrimagnetismi, 192
 ferromagnetismi, 192
 Fick, Adolph Eugen, 376
 Fickin 1. laki, 376
 Fickin 2. laki, 377
 flow wetted surface, 382
 Fourier, Joseph, 221
 Fourierin lämmönjohtumislaki, 329
 Fourierin laki, 329, 364, 376
 free index, 54
- gal, 266
 Galilei, Galileo, 266
 galvaaniset menetelmät, 141
 Gauss, Carl Friedrich, 37
 Gaussin lause, 35, 37, 44, 193, 220, 231
 Gaussin pinta, 37
 geohydrologia, 359, 365
 geoidi, 275
 geomagneettinen kenttä, 207
- geopotentiaali, 270, 272
 geosentrinen latitudi, 269, 276
 Gilbert, William, 184
 gradientti
 skalaarifunktion, 32
 vektorifunktion, 60
 gradienttilause, 32, 34
 gravitaatio, 263–265
 gravitaatiokentän kenttävoimakkuus, 266
 gravitaatiokenttä, 266, 270
 laatan, 278
 pallon, 277
 gravitaatiomassa, 264
 gravitaatiovoima, 263, 264, 266, 270
 gravity unit, 267
 Green, George, 43
 Greenin deformaatiotensori, 299
 Greenin I kaava, 43
 Greenin II kaava, 43
 Greenin kaavat, 43
 Greenin teoreema, 44
 Greenin äärellinen venymätensori, 299
- gu, 267
- Hamilton, William, 33
 Hamiltonin operaattori, 33
 harmoninen aikariippuvuus, 221
 harmoninen funktio, 100
 heat flux, 310
 heat flux density, 310
 heat flux vector, 310
 heijastuminen
 P-aalto, 339, 342
 seisminen aalto, 339
 sähkömagneettinen aalto, 242
 heijastuskerroin
 seisminen aalto, 344
 sähkömagneettinen aalto, 244
 heikko vuorovaikutus, 263
 Heiskanen, Veikko Aleksanteri, 276

- Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdin-
 and von, 46
 Helmholtzin kelat, 200
 Helmholtzin lause, 44, 46, 336
 Helmholtzin yhtälö, 229, 235, 337
 Hertz, Heinrich Rudolf, 219
 hitaasti muuttuvat kentät, 230, 241
 hitausmassa, 264
 hitausvoima, 264
 Hjelt, Sven-Erik, iii
 homogeneisuus, 2, 94
 jännityskenttä, 350
 Hooke, Robert, 323
 Hooken laki
 yleistetty, 323–325, 327, 328, 348
 Hooken malli, 323
 huokoisen aineen mekaniikka, 283
 huokoisuus, 285, 359, 379
 tehokas, 360
 virtaus, 360, 379
 Huygens, Christiaan, 339
 Huygensin periaate, 339, 340, 345
 hydraulinen gradientti, 364
 hydraulinen korkeus, 362, 363
 hydrogeologia, 365
 hydrostaattinen jännitystila, 349
 hydrostaattinen paine, 307, 326, 349
 häviöllinen väliaine, 225, 240, 241

 ideaalieriste, 86, 145
 ideaalijohde, 86, 145
 ideaalineste, 357, 358, 361, 371, 372
 IGF=International Gravity Formula,
 276
 IGRF=International Geomagnetic Re-
 ference Field, 208
 indeksisääntö, 54
 induktiokenttä, 251
 induktiolaki, 216, 217
 induktiovirta, 227
 indusoitu polarisaatio, 138
 inertiaalikehys, 272
 inertiaalimassa, 264
 infinitesimaalinen venymätensori
 Eulerin, 316
 Lagrangen, 316
 influenssi, 87, 110, 118
 inkлинаatio, 208
 insinööroleikkausvenymä, 320
 isobaarinen prosessi, 328
 isokoorinen, 329
 isotrooppinen jännitystila, 349
 isotrooppinen tensori, 55
 isotrooppinen väliaine, 2
 isotrooppisuus, 2
 itseisarvo
 vektorin, 8
 IUGG=International Union of Geo-
 desy and Geophysics, 276

 Jacobi, Carl Gustav, 29
 Jacobin funktionaalideterminantti, 29,
 291, 293, 295
 jakautumiskerroin, 380–383
 jatkumo, 2, 265
 jatkuvan aineen mekaniikka, 283
 jatkuvuusyhtälö
 massan säilymlaki, 361, 370
 massan taselaki, 361
 pohjaveden virtauksen, 359
 varauksen säilymlaki, 136, 141,
 218, 223
 johde, 86
 johtava puoliavaruus, 147
 juovaviiva, 291
 jännityksen invariantit, 350
 jännitys, 1, 3, 302
 isotrooppinen, 349
 puristus, 303
 veto, 303
 jännitys-venymä, 323
 jännitysdyaadi, 303, 306, 371

- jännitysellipsoidi, 349
 jännitysinvariantit, 351, 352
 jännityskenttä, 283
 primaari, 348
 jännitystila, 355
 alku, 328
 hydrostaattinen, 349
 litostaattinen, 347
 taso, 348
 jännitysvektori, 301
 jäykän kappaleen mekaniikka, 287
 jäännöspaine, 369
- kaateellinen anisotropia, 162
 kaksoiskertolasku
 dyadi, 57
 kaksoislähde, 81
 kaksoispistetulo
 dyadi, 58
 kaksoisristitulo
 dyadi, 58
 kalliomekaniikan tasapainoyhtälöt,
 346
 kalliomekaniikka, 346
 kannanvaihtomatriisi, 21, 163
 kappale, 286, 300
 kappalevoima, 301, 305, 332, 347
 karteesinen koordinaatisto, 16
 differentiaaligeometrinen alkio, 26
 differentiaalinen jana, 26
 differentiaalinen pinta-alkio, 26
 differentiaalinen tilavuusalkio, 26
 Kelvin, Sir William (Thomson), 121
 Kelvinin inversio, 121
 Kelvinin inversioratkaisu, 119
 kenttäpiste, 75
 kenttäviiva, 33, 144, 291
 kentänmuutosvirta, 219
 kerrostunut puoliavaruus, 149
 keskiarvo-ominaisuus, 101
 keskipakovoima, 263, 266, 268–270, 272
- kiertämälaki, 178
 kiihtyvyys, 269, 272, 289, 292, 293,
 341, 363
 kiinteän aineen mekaniikka, ii, 283,
 315
 kimmoaaltojen teoria, ii, 3, 330
 kimmainen, 323
 kimmokerroin, 326
 kinemaattinen viskositeetti, 365
 kinematiikka, 284, 286
 kiteinen ioniliuos, 134
 kitkakerroin, 355
 kitkallinen virtaus, 357
 kitkaton virtaus, 357
 koheesio, 355
 kokonaisdifferentiaali, 34, 292
 kokonaisvaraus, 144
 kokoonpuristumaton virtaus, 357, 363,
 375, 379
 kokoonpuristuva virtaus, 357
 kokoonpuristuvuus, 321, 322, 366, 367
 kolatitudi, 22, 167
 kolmiosääntö, 9
 kompatibiliteettiyhtälö, 320, 347
 konduktio, 133, 136, 186
 konformikuvaus, 131, 132
 konjugaattidyadi, 58
 konservatiivinen, 45, 79, 267, 270
 konstitutiivinen yhtälö
 diffuusio, 376
 geohydrologia, 364
 lämmönjohtuminen, 329
 nesteiden mekaniikka, 358
 painovoima, 273
 rako, 346
 konstitutiiviset yhtälöt
 kiinteän aineen, 321
 magnetostatiikan, 191
 sähködynamiikan, 223
 sähköstatiikan, 92

- kontinuumi, 2, 265, 284–287, 291, 296, 297, 300, 302
- kontinuumimekaniikan aksiomat, 285
- kontinuumimekaniikka, 1, 3, 283
- kontinuumin muodonmuutos, 296
- kontrollialue, 291
- kontrollitilavuus, 291
- konvektiivinen muutosnopeus, 292
- konvektio, 133, 311, 377, 378
- konvektio-diffuusioyhtälö, 377
- koordinaatiston kierto, 8, 52, 53, 59, 162–164
- kosketusvoima, 301
- Kronecker, Leopold, 55
- Kroneckerin δ -tensori, 55, 56
- kuljettuminen, 311
- kulkeutuminen, 136, 376, 378
- kulkeutumisilmiö, 357
- kulmataajuus, 222
- kuutiolaki, 370, 374
- kuvalähdeperiaate, 111, 113, 114, 119, 121, 128, 147, 153, 160, 162, 212, 261
- kuvalähdevaraus, 113
- kvadrupoli, 85
- kvanttielektrodynamiikka, 239
- käytetyn ydinpolttoaineen geologinen loppusijoitus, 284
- laattatektoniikka, 193, 283, 315, 356
- Lagrange, Joseph-Louis, 61, 286
- Lagrangen aineellinen deformaatiogradientti, 296
- Lagrangen aineellinen siirtymägradientti, 297
- Lagrangen esitystapa, 286, 287
- Lagrangen infinitesimaalinen venymätensori, 316
- Lagrangen jäännöstermi, 61
- Lagrangen rotaatiotensori, 317
- Lagrangen äärellinen venymätensori, 299
- Lamén jännitysellipsoidi, 349
- Lamén potentiaali, 337
- Lamén vakiot, 324, 326, 346
- laminaarinen kenttä, 45
- laminaarinen virtaus, 357, 358, 385
- Laplace, Pierre Simon, 42
- Laplacen operaattori, 41–43, 47, 56
- Laplacen yhtälö, 81, 99, 100, 124, 125, 129, 132, 149, 150, 183, 201, 202, 204, 255, 271, 347, 369, 377, 385
- laskentapiste, 75
- latitudi, 22
- Legendre, Adrien-Marie, 63
- Legendren liitännäisfunktio, 257, 258
- Legendren liitännäisyhtälö, 257
- Legendren polynomit, 63, 68, 130
- Legendren yhtälö, 124
- leikkausaalto, 336
- leikkausjännitys, 302, 306, 341, 346, 352–355
- leikkauskerroin, 327
- leikkausvenymä, 320, 352
- Lejeune-Dirichlet, Peter, 100
- Lenz, Heinrich Friedrich Emil, 217
- Lenzin laki, 217
- Levi-Civita, Tullio, 55
- Levi-Civitan ϵ -tensori, 55, 56
- LIH-väliaine, 93, 141, 191, 223, 329
- liike-energia, 311, 312
- liikemäärämomentin tase, 285, 308
- liikemäärämomentti, 308
- liikemäärän tase, 285, 301, 305, 307, 358, 370
- liikkuvuus, 137
- liittodyadi, 58
- Lindell, Ismo V., iii, 114
- lineaarinen lämpötilakerroin, 328

- lineaarinen Lagrangen rotaatiotensori, 317
 linear expansion coefficient, 322
 Lipschitz, Rudolf, 68
 Lipschitzin integraali-identiteetti, 68
 litistyneisyys, 266, 275
 litostaattinen jännitystila, 347
 liue, 380
 liukukerroin, 327
 liukuma, 320, 352
 liukumanopeus, 358
 liukuvapaa pinta, 341
 logaritminen potentiaali, 111
 lokaalinen muutosnopeus, 292
 Lorentz, Hendrik Anton, 170, 228
 Lorentzin voima, 170, 171, 212, 219, 228, 301
 Lorenz, Ludvig Valentin, 228
 Lorenzin ehto, 228, 249, 337
 Lorenzin mitta, 228
 Lounesto, Pertti, iv
 Love, Augustus Edward Hough, 338
 Love-aalto, 338
 lähdejännite, 216
 lähdepiste, 75
 lähteetön vektorikenttä, 44
 lämmönjohtavuus, 329, 330
 lämmönsiirtyminen, 310, 374
 lämpökapasiteetti, 328
 lämpölaajeneminen, 321
 lämpölaajenemiskerroin, 330
 lämpöteho, 309, 310
 lämpötilakerroin, 322
 lämpövirrantiheys, 310
 lämpövuoto, 310
 lämpövuon tiheys, 310
 läpäisevyystensori, 365
 läpäisykerroin
 seisminen aalto, 344
 sähkömagneettinen aalto, 244
 maannousu, 349
 Maclaurin, Colin, 62
 Maclaurinin polynomi, 62
 Maclaurinin sarja, 62
 magneettikentän voimakkuus, 188
 magneettikenttä, 71, 176
 homogeenisesti magnetoituneen pallon, 203
 magnetoituneen aineen, 184
 stationaaristen sähkövirtojen, 175
 virrallisen magnetoituneen aineen, 190
 magneettinen dipolimomentti, 173, 206
 magneettinen johde, 144, 165, 213
 magneettinen johdereuna, 144
 magneettinen napa, 177
 magneettinen napatiheys, 189
 magneettinen permeabiliteetti, 175, 192
 magneettinen skalaaripotentiaali, 183
 magneettinen susceptibiliteetti, 191, 207
 magneettinen varaus, 170, 177, 189, 211
 magneettinen vektoripotentiaali, 179
 magneettinen voima, 169, 174
 magneettisen napavoimakkuuden napatiheys, 189
 magneettisten anomalioiden laskenta, 207, 209
 magneettivakio, 175
 magneettivuoto, 216
 magneettivuon tiheys, 170, 176
 magnetoituma, 185
 remanentti-, 193, 207, 210
 magnetoitumisvirta, 186
 magnetometrinen vastusmenetelmä, 169
 magnetosähköinen induktio, 215, 217
 magnetostatiikan konstitutiiviset yhtälöt, 191
 magnetostatiikka, 169
 maksimisääntö, 54

- massa, 264
 massajakaumat, 265
 massajakautumiskerroin, 382
 massan pintatiheys, 265
 massan säilyminen, 300, 358
 massan säilymisen periaate, 285
 massan tase, 358
 massan tilavuustiheys, 265
 massan viivatiheys, 265
 massasuskeptibiliteetti, 192
 massatiheys, 274, 300
 massavajaus, 275
 massavirrantiheys, 376
 massavirta, 360
 massavoima, 301, 308
 massavoiman momentti, 308
 massavoiman teho, 309
 massavuo, 360
 massavuon tiheys, 360
 massaylijäämä, 275
 materiaalipiste, 286
 matriisidiffuusio, 376, 380, 383, 385
 Maxwell, James Clerk, 71, 215
 Maxwellin yhtälöt, 71, 72, 215, 217, 219, 220
 aikaharmoninen muoto, 222
 integraalimuotoisina, 220
 ratkaiseminen, 234
 merenpohjan laajeneminen, 349
 Merkurius, 265
 metamorfiset kivet, 160
 metamorfiset liuskeet, 154
 metamorfoosi
 vaikutus kivien tiheyteen, 275
 minimi-maksimi-ominaisuus, 101
 mixture formula, 95
 Mohr, Otto, 354
 Mohr-Coulombin murtumisteoria, 355
 Mohrin jännitysypyrä, 354
 molaarinen suskeptibiliteetti, 192
 momentti
 magneettiseen dipoliin kohdistu-
 va, 182
 massavoiman, 308
 pintavoiman, 308
 virtajakaumaan kohdistuva, 171
 monopoli, 85
 multipolikehitelmä, 85, 247
 multivektorialgebra, 60
 muodonmuutoksesta (venymästä) ai-
 heutuva liike, 296
 muodonmuutos, ii, 1, 3, 283, 296, 300,
 346
 alku, 328
 kontinuumin, 296
 pienen muodonmuutosten teoria,
 315
 taso, 348
 muodonmuutosenergia, 362
 muodonmuutosnopeus, 358
 murtumismekaniikka, 346, 356
 muuttujien erottelumenetelmä, 61, 150
 muuttujien separointimenetelmä, 150
 mykkäindeksi, 54
 märkäpinta, 382

 nabla, ∇ , 33
 nabla-operaatiot
 dyadeille, 59
 vektoreille, 41
 nablalla operoimissäännöt, 42
 Navier, Claude Louis Marie Henri, 370
 Navier-Stokesin yhtälö, 370–372
 neliömuoto, 155, 156, 164, 349
 nesteiden mekaniikka, ii, 283, 313, 357,
 385
 nettovuo, 30
 Neumann, Carl Gottfried, 66, 100
 Neumann, Franz Ernst, 328
 Neumannin funktio, 66
 Neumannin reunaehto, 100, 369
 Newton, Sir Isaac, 263

- newtonilainen neste, 358
 Newtonin liikelaki, 268
 Newtonin malli, 323
 Newtonin vetovoimalaki, 263, 265, 267
 Nikoskinen, Keijo, iii
 nivoopinta, 32
 nollannen kertaluvun tensori, 53
 nopeus
 muodonmuutos, 358
 P-aalto, 333
 partikkelin, 289
 S-aalto, 333
 vaihe-, 226, 334
 valon tyhjiössä, 226
 nopeuskenttä, 291
 nopeuspotentiaali, 385
 normaalijännitys, 302, 303, 306, 307,
 341, 346, 352–355
 normaalipainovoima, 266, 275, 276
 normaalivenymä, 319
 noste, 369
 näennäisvoima, 268, 269

 ohm, 137
 Ohm, Georg Simon, 137
 Ohmin laki, 137, 140, 154, 157, 163,
 255, 329, 364, 376
 ohmin laki, 137
 ohminen väliaine, 137, 141, 143–145
 oikeakätinen (korkki)ruuvisääntö, 13,
 198
 oikeakätinen koordinaatisto, 15, 147,
 162
 Okko, Olli, iii
 Oksama, Matti, iii
 oktaedrinen leikkausjännitys-
 kriteeri, 352
 ominaislämpökapasi-
 teetti, 328–330, 374
 ominaissisäenergia, 311, 329
 ominaissuskeptibiliteetti, 192
 ominaisvastus, 137, 149, 150, 153, 159
 Onsager, Lars, 155
 Onsagerin periaate, 155
 ortogonaalinen funktio, 69
 Ostrogradski, Michail, 37
 Ostrogradskin lause, 37

 P-aalto, 332, 333, 335, 338, 339
 aaltoluku, 340
 heijastuminen, 339
 heijastuskerroin, 345
 läpäisykerroin, 345
 taittuminen, 339
 paikallinen muoto, 313
 paikkavektori, 17, 31, 32, 34, 47, 48,
 51, 63, 129, 269
 gradientti, 60
 karteesinen koordinaatisto, 17
 pallokoordinaatisto, 23
 sylinterikoordinaatisto, 20
 paikkavektorikenttä, 47
 paikkavektorin vektorikenttä, 47
 paine, 275, 307, 311, 349, 362, 364,
 366, 368, 369, 373
 litostaattinen, 355
 painekorkeus, 362, 364
 painovoima, 263, 266, 270, 272, 275,
 276, 347
 painovoimakentän differentiaaliyhtälöt,
 270
 painovoimakentän kenttäyhtälöt, 263
 painovoimakentän rajapintaehdot, 272
 painovoimakentän voimakkuus, 266
 painovoimakenttä, 266, 273
 painovoiman kenttäprobleemien rat-
 kaiseminen, 276
 painovoiman potentiaali, 272
 paleomagnetismi, 193
 pallokoordinaatisto, 22
 differentiaaligeometrinen alkio, 28
 differentiaalinen jana, 28

- differentiaalinen pinta-alkio, 28
 differentiaalinen tilavuusalkio, 28
 paramagneettinen, 192
 pascal, 302
 Pascal, Blaise, 302
 path line, 291
 peilikuvavaraus, 113
 Peltoniemi, Markku, iii, 4
 Perfect Magnetic Conductor=PMC,
 165, 213
 periheli, 265
 permeaabeli, 201, 207, 253
 permeabiliteetti
 geohydrologiassa, 365
 magneettinen, 175, 192
 permittiivisyys, 94, 95, 224
 tyhjiön, 73
 petrofysiikka, 193
 pidättymiskerroin, 380, 382
 pienten muodonmuutosten teoria, 315,
 331
 piirilaki, 178
 pinta-aalto, 338
 pintadipolijakauma, 84
 pintaimpedanssi, 138
 pintaintegraali, 29, 30
 pintalähde, 52
 pintamagnetoitumisvirta, 186
 pintavaraustiheys, 74
 pintavirta, 171, 233
 pintavoima, 301, 305, 306, 308
 pintavoiman teho, 309
 piste-ristitulo
 dyadi, 58
 pistetulo, 11, 17, 20, 23
 pitkittäinen aaltoliike, 335
 pitkittäinen dispersiopituus, 380
 pituuden lämpötilakerroin, 322, 328,
 330
 plastic, 323
 plastinen, 323
 PMC, 165, 213
 poikittainen aaltoliike, 335, 336, 345
 poikittainen dispersiopituus, 380
 Poisson, Siméon-Denis, 81
 Poissonin luku, 326, 327, 333, 334, 346
 Poissonin relaatio, 281
 Poissonin suhde, 326, 333, 334
 Poissonin yhtälö, 81, 100, 158, 179,
 271
 poistovoima, 72, 174
 polaariakseli, 275
 polarisaatio, 88
 dielektrinen, 86–88
 elliptinen, 240
 eristeen, 88
 indusoitu, 138
 johteen, 88
 lineaarinen, 240
 sähkömagneettisen aallon, 239
 ympyrä, 240
 polarisaatiovaraus, 89, 90, 92, 144, 189
 polarisaatiovektori, 88, 93, 144
 polarisoituma, 88
 polku, 291
 polkupyörä, 38
 positiivi-definiittisyys, 155
 potentiaalienergia, 78, 79, 267, 268,
 362
 potentiaaliteoria, 1, 3, 100, 271, 385
 potentiaalivirtaus, 385
 primaarijännityskenttä, 348
 primaaripotentiali, 123, 126, 150, 152
 puoliavaruus, 147
 anisotrooppinen, 160
 puristusjännitys, 303
 puristuvuuskerroin, 322, 326, 327
 putkiaalto, 339
 Pythagoraan teoreema, 17, 64, 105
 Pythagoras, 17
 pyörrevirta, 217, 227, 253, 254

- pyörteetön kenttä, 39, 45, 78, 183, 201, 267, 272, 332, 357, 385
 pyörähdysellipsoidi, 275, 276
 pääakselikoordinaatisto, 353
 pääakselimuoto, 164
 pääakselisuunta, 164, 165, 349, 350
 pääjännitys, 307, 349–352, 354, 355
 päälleikkausjännitys, 353
 pääsuunta, 351, 352
 päävenymä, 352

 radiation, 310
 radionuklidi, 284, 385
 radiusvektori, 7, 17, 22, 161, 164, 277
 rajakerrosteoria, 358, 372, 380
 rajapintaehto, 95, 100, 142, 193, 201, 205, 231, 272, 304, 341
 rakovirtaus, 370, 372, 385
 ratakäyrä, 286, 287, 289, 291
 rataviiva, 291
 Rayleigh, lordi (John William Strutt), 338
 Rayleighin aalto, 338
 redox-prosessi, 138
 referenssiellipsoidi, 275, 276
 referenssipaine, 362
 regionaalianomalia, 208
 remanenttimagne-
 toituma, 193, 207, 210
 reologia, 323
 Representative Elementary
 Volume, 285
 residuaalipaine, 369
 resiprookkisuusperiaate, 149
 reunaehto, 77, 100, 108, 110, 112, 124, 125, 144, 149, 165, 201, 231, 369, 372
 Dirichletin, 100, 110, 145, 369
 Neumannin, 100, 369
 seka-, 369
 REV, 285
 Reynolds, Osborne, 293
 Reynoldsin kuljetuslause, 293, 295, 296, 361, 375
 Reynoldsin luku, 358, 364
 Riemann, Bernhard, 132
 risti-pistetulo
 dyadi, 58
 ristitulo, 12, 18, 20, 23, 56
 Rodrigues, Olinde, 63
 Rodriguesin kaava, 63
 roottori, 38–41, 47
 karteesinen koordinaatisto, 39
 pallokoordinaatisto, 40
 sylinterikoordinaatisto, 40
 rotaatio, 296, 317, 333
 rotaatioaalto, 336
 rotaatiovektori, 317
 runkoaalto, 339
 Rutherford, Ernest, 2

 S-aalto, 332, 333
 Saint Venant, Barré de, 323
 Saint-Venantin malli, 323
 Salonen, Eero-Matti, iii
 sarjaoppi, 61
 Savart, Félix, 175
 seismiset menetelmät, 3, 336, 339
 seismiset potentiaalifunktiot, 336
 seismisten kimmoaaltojen teoria, 330, 345, 346
 sekoituskaava, 95
 sekoitusteoria, 95, 356
 sekundaarinen aalto, 333
 sekundaaripotentialiaali, 123, 129, 150
 shear modulus, 327
 shear waves, 336
 sideerinen vuorokausi, 270
 siemens, 137
 Siemens, Werner von, 137
 Sihvola, Ari, iii, 95
 siirrosvirrantiheys, 218

- siirrosvirta, 218, 219, 230, 241, 253, 255
- siirtymä, 289, 290, 292, 299, 316–320, 332, 334–337, 341–343, 347
- siirtymägradientti, 296, 297, 299, 316, 318
- siirtymägradienttitensori, 316
- siirtymäkentän skalaaripotentiaali, 337
- siirtymäkenttä, 337
- sähköinen, 91
- siirtymävektori, 290, 297, 317, 318, 320, 336, 338
- singulariteetti, 50–52, 79, 84, 91, 104, 107, 129
- sinimuotoinen aikariippuvuus, 221
- sirkulaatio, 30, 38
- sironta
- seisminen aalto, 339
 - sähkömagneettinen, i
 - sähkömagneettinen aalto, 242
- sirontakenttä, 123, 127
- sisäenergia, 286, 309, 311, 312, 328, 329
- sisäinen kitkakulma, 354, 355
- sivupaine, 349
- skalaari, 1, 8
- skalaarifunktio, 7, 32–34, 43, 45, 54, 56
- skalaarifunktion gradientti, 32
- skalaarikolmitulo, 14, 18
- skalaaripotentialiaali, 45, 142, 183, 188, 189, 196, 201, 204, 221, 227, 246, 249, 255, 272, 280, 281, 336, 337, 385
- skalaaritulo, 11
- skin depth, 242
- slip free surface, 341
- Snellin laki, 245, 339, 340, 345
- Snellius, Willebrord (Snell van Roijen), 245
- Soininen, Heikki, iii
- solaarinen vuorokausi, 270
- solenoidaalinen vektorikenttä, 44
- Sommerfeld, Arnold, 252
- Sommerfeldin säteilyehto, 252
- sorptio, 380, 381
- sorptiokerroin, 381
- spatiaalikoordinaatti, 290
- spatiaalinen deformaatiogradientti (Eulerin) , 297
- spatiaalinen piste, 286
- spatiaalinen siirtymägradientti (Eulerin), 297
- specific heat capacity, 328
- staatinnainen kenttäteoria, 71
- staatinnaisen dipolin kenttä, 251
- stationaarinen virtaus, 137
- stationaaritila, 139
- Stefanescu, Sabba S., 153
- Stefanescun ratkaisu, 153
- steradiaani, 48
- Stokes, George Gabriel, 40, 370
- Stokesin lause, 38, 40, 41, 44, 45, 97, 98, 172, 173, 175, 178, 181, 182, 193–195, 216, 220, 231–233, 256, 272, 341
- strain, 300
- suhteellinen siirtymä, 317
- suhteellinen siirtymävektori, 317, 318
- suhteellinen tilavuudenmuutos, 321
- suljettu systeemi, 135, 286, 300
- suotautumisnopeus, 360
- superpositioperiaate, 73, 75, 153, 161, 190, 211, 264, 268, 271
- suskeptibiliteetti
- magneettinen, 191, 193, 207
 - sähköinen, 93, 94
- suunnattu derivaatta, 32
- suunnikassääntö, 9
- suuntakosini, 17, 21, 53–55, 162
- suurten muodonmuutosten teoria, 315

- sylinterikoordinaatisto, 18
 differentiaaligeometrinen alkio, 27
 differentiaalinen jana, 27
 differentiaalinen pinta-alkio, 27
 differentiaalinen tilavuusalkio, 27
 sädeteoria, 339, 340
 sähködynamiikan konstitutiiviset yhtälöt, 223
 sähködynamiikka, 71, 215
 sähköinen dipoli, 81
 sähköinen siirtymäkenttä, 91
 sähköinen susceptibiliteetti, 93, 94
 sähköinen virtausstatiikka, 133
 sähkökenttä, 71, 74
 sähkökentän differentiaaliyhtälöt, 77
 sähkökentän divergenssi, 79–81
 sähkökentän potentiaali, 78
 sähkökentän roottori, 77, 80
 sähkökentän voimakkuus, 71, 75
 sähkömagneettinen aalto, 345
 sähkömagneettinen induktio, 71, 215, 216
 sähkömagneettinen spektri, 238
 sähkömagneettinen säteily, 238, 246
 sähkömagneettiset potentiaalit, 221
 sähkömagneettisten potentiaalien differentiaaliyhtälöt, 226
 sähkömagnetismi, i, 1, 3, 71, 215
 sähkömotorinen voima, 216
 sähköjohtavuus, 136–138
 anisotrooppinen, 154
 sähköpotentiaali, 77, 78
 sähköstaattisen kentän energiatiheys, 98
 sähköstatiikka, 71
 sähkövakio, 73, 156, 226
 sähkövirran voimakkuuden tiheys, 71
 sähkövirrantiheys, 133, 134, 310
 sähkövirta, 133, 134
 sähkövuon tiheys, 91, 187
 säilymlaki, 1, 135, 136, 285, 358
 säteilyehto, 252, 341
 säteilykenttä, 251
 säteilylämmönsiirto, 238, 310
 taitekerroin, 237, 245
 taittuminen
 P-aalto, 339
 seisminen aalto, 339
 sähkömagneettinen aalto, 245
 tasainen ympyräliike, 272
 tasavirta, 140
 taselaki, 285
 tasoaalto, 234–238, 240–242, 334, 335, 342
 tasojännitystila, 348
 tasomuodonmuutos, 348
 Taylor, Brook, 61
 Taylorin sarja, 61, 248, 317
 tehokas huokoisuus, 359
 tehollinen susceptibiliteetti, 210
 tensori, 1, 8, 52, 53, 55, 59
 antisymmetrinen, 55
 ensimmäisen kertaluvun, 53
 isotrooppinen, 55
 nollannen kertaluvun, 53
 symmetrinen, 55
 toisen kertaluvun, 53, 54
 terminen diffusiviteetti, 330
 termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö, 286
 termodynamiikka, 155, 311
 klassillinen, 311
 Terzaghi, Karl von, 366
 Terzaghin periaate, 366
 tesla, 170
 Tesla, Nikola, 170
 testivaraus, 75, 176
 tetradi, 60
 tilavuuden lämpötilakerroin, 322
 tilavuusintegraali, 29, 30
 tilavuuskimmokerroin, 322

- tilavuusmagnetoitumisvirta, 186
 tilavuustiheys, 265
 tilavuusvaraustiheys, 74
 tilavuusvirta, 171
 toisen kertaluvun tensori, 53, 54
 tortuositeetti, 379
 tortuosity, 379
 torus, 38
 traktio, 301, 302, 304, 305, 335, 336,
 341, 343, 344, 350, 352, 353
 transientti, 378
 transientti-ilmio, 346
 translaatioliike, 296
 transmissiviteetti, 373
 transport phenomena, 357
 triadi, 60
 tunkeutumissyvyys, 241, 242
 turbulenttivirtaus, 357, 358
 tyhjiö, 72, 88, 92, 96, 98, 101, 109,
 110, 133, 169, 171, 183, 217,
 218, 224, 226, 230, 234, 237
 tyhjiön magneettinen permeabiliteet-
 ti, 175
 tyhjiön permittiivisyys, 73, 100
 täydellinen magneettinen johde, 165

 ulkoinen varaus, 92
 ulkoisten voimien teho, 309, 312, 374
 ulkonormaaliyksikkövektori, 37, 50
 uniaksiaalisuus, 156

 vahva vuorovaikutus, 263
 vaihdantalaki, 9
 vaihekerroin, 229
 vaihenopeus, 226, 334
 vaimenemiskerroin, 229
 sähkömagneettinen aalto, 229
 vaimeneva aaltoliike, 225, 241
 vaimenevan aallon yhtälö, 230, 231
 valon tyhjiönopeus, 226
 vapaa indeksi, 54

 vapaa pinta, 338
 vapaan putoamisen kiihtyvyys, 266
 varastokerroin, 368
 varauksen säilymlaki, 135, 136, 141,
 215, 218, 224
 varausjakaumat, 74
 varauspiste, 75, 112
 vastavektori, 10
 vedenjohtavuus, 364, 365, 373
 vektori, 1, 8
 dyaditulo, 11
 kertominen skalaarilla, 10
 pistetulo, 11, 17, 20, 23
 ristitulo, 11, 12, 18, 20, 23, 56
 skalaari- ja vektorikomponentit, 12
 skalaarikolmitulo, 14
 skalaarikomponentti, 12
 skalaarin ja vektorin tulo, 10
 skalaaritulo, 11
 vastavektori, 10
 vektorien kertolasku, 11
 vektorien yhtäsuuruus, 8
 vektorikolmitulo, 14
 vektorikomponentti, 12
 vektoritulo, 11, 12
 yhteen- ja vähennyslasku, 9, 10
 yksikkövektori, 8
 yksikkövektorin derivaatta, 31
 vektorianalyysi, 25
 vektoriarvoisen funktion derivaatta ska-
 laarimuuttujan suhteen, 31
 vektorikenttä
 lähteetön, 44
 paikkavektorin, 47
 pyörteetön, 39, 45
 solenoidaalinen, 44
 vektorikenttien luokittelu, 44
 vektorikolmitulo, 14
 vektorin gradientti, 60
 vektoripotentiaali, 45, 247
 vektoriviiva, 33

- venymä
 alku, 328
- venymätensori
 äärellinen, 297
- vertikaalisuunta, 275
- vetojännitys, 303
- vetovoima, 72, 174, 263–265, 268, 274, 276
- viivaintegraali, 29
- viivajohdin, 197, 198
- viivalähde, 52, 110, 111, 115, 117, 119
- viivavaraustiheys, 74
- viivavirta, 141, 146, 166, 171, 197
- viivästyneet potentiaalit, 246, 247
- viivästynyt aika, 246
- viivästynyt skalaaripotentiali, 246
- viivästynyt vektoripotentiali, 247
- virrantiheys, 134, 138, 140, 171, 191, 218
- virtaama, 359, 360, 370, 373
- virtaamanopeus, 360, 364
- virtaamatiheys, 360, 361, 364, 374, 378
- virtaamavuo, 360
- virtaamavuon tiheys, 360, 364, 365
- virtaputki, 291
- virtasilmukka, 174–176, 180, 182–184, 186, 199, 252
- virtaushuokoisuus, 359, 379
- virtausmekaniikka, ii, 3, 287, 296, 315, 357, 370–372, 385
- virtausnopeus, 360
- virtausstatiikka, 71, 137, 139, 168
 sähköinen, 133
- virtaustiheys, 360
- virtaviiva, 144, 291, 362, 372
- viscoelastic, 323
- viscoplastic, 323
- viskokimmoinen, 323
- viskoplastinen, 323
- viskositeetti
 dynaaminen, 358, 365
- kinemaattinen, 365
- VLf-menetelmä, 240
- voima
 magneettiseen dipoliin kohdistuva, 182
 virtajakaumaan kohdistuva, 171
- voiman ja vastavoiman laki, 264
- voiman tekemä työ, 45, 267
- voimatiheys, 76
- volume flux, 360
- vuoksivoima, 266
- Väisälä, Kalle, 37
- väliaineyhtälö, 2, 92, 284
- värähtelevä magneettinen dipoli, 252, 261
- värähtelevä sähköinen dipoli, 246, 247
- weber, 216
- Weber, Wilhelm Eduard, 216
- Wihuri, Jenny ja Antti, iii
- yhdesti yhtenäinen alue, 37
- yksikköyodi, 58, 60
- yksikkövektori, 8
- yksikkövektorin derivaatta, 31
- yleinen gravitaatiovakio, G , 264
- yleiskertomerkki tähti, $*$, 37, 41
- yleistetty Hooken laki, 323–325, 327, 328, 348
- ympyräpolarisaatio, 240
- ympyrävirtasilmukka, 199, 252
- Youngin kerroin, 326, 327
- Youngin moduli, 327, 346
- Zöpplitz, Karl, 345
- Zöpplitzin yhtälö, 345
- äärellinen johtavuus, 233
- äärellinen muoto, 313
- äärellinen venymätensori, 297
- Ørstedt, Hans Christian, 170